

УДК 532.542.011.6

ЛАМИНАРНАЯ КОНВЕКЦИЯ ВЯЗКОЙ И ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОМ КАНАЛЕ

С. М. Дроздов

Рассмотрена ламинарная конвекция вязкой и теплопроводной жидкости в замкнутом канале произвольной формы. Приведены результаты расчета эволюции температуры жидкости и исследована динамика скорости конвективного движения в зависимости от параметров тепловой и механической диссипации. Численно получен режим хаотической конвекции.

Ламинарная конвекция жидкости в замкнутом канале исследуется давно. Анализ этой проблемы содержится, например, в работах [1, 2]. Кроме этого, Зальцманом и Лоренцем при исследовании конвекции Релея — Бенара были получены уравнения динамики конвекции, известные как уравнение Лоренца, которые приближенно описывают и конвекцию в канале с осью круговой формы [3, 4]. Приближенность этих уравнений связана с серьезными ограничениями, налагаемыми на физические процессы, определяющие ламинарную конвекцию при построении математической модели задачи. Так, жидкость, циркулирующая в канале, предполагается нетеплопроводной, и это, наряду с другими ограничениями, делает спорным вопрос применимости уравнений к реальным физическим моделям и объяснению экспериментальных результатов.

В настоящей статье сделана попытка учета основных физических эффектов ламинарной конвекции в канале. На основе полученных уравнений найдено решение для эволюции температуры и исследована динамика конвективного движения в канале.

1. Постановка задачи и вывод уравнений, описывающих конвекцию в канале. Рассмотрим замкнутый канал или трубку, ось которой образует плоский контур Γ с однозначной зависимостью $R(\varphi)$ (рис. 1, а). Канал расположен в вертикальной плоскости в поле тяжести в среде с температурой T_0 . Он заполнен жидкостью, относительно которой сделаны следующие предположения:

1. Жидкость несжимаема $\rho_0 = \text{const}$.
2. Зависимость плотности от температуры учитывается только при расчете сил плавучести (приближение Обербека — Буссинеска):

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)),$$

где коэффициент расширения $\alpha \ll 1$.

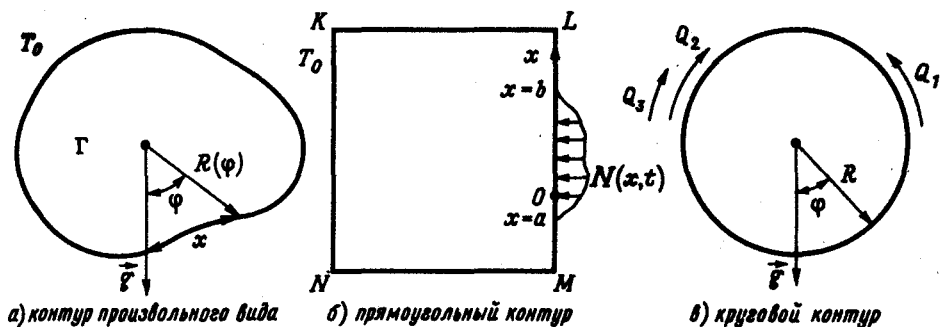


Рис. 1

3. Вязкость μ , теплоемкость c и теплопроводность λ жидкости постоянны.
 4. Тепло к жидкости проводится произвольно распределенными источниками ограниченной суммарной мощности $P(t)$:

$$P(t) = \int_v \int N(x, r, \psi, t) dv,$$

где v — объем канала, x — координата вдоль оси канала.

5. Стенки трубки имеют погонную теплоемкость $c_T = \text{const}$.

В этих предположениях уравнения Навье — Стокса имеют вид [5]

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \text{grad } p + \rho_0 [1 - \alpha(T(x, r, \psi, t) - T_0)] \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{V}, \\ \text{div } \mathbf{V} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где t — время; $\mathbf{V}$ — вектор скорости; p — давление; $T(x, r, \psi, t)$ — температура частицы жидкости в канале.

Проинтегрируем первое уравнение системы (1) по площади поперечного сечения и по контуру вдоль оси канала:

$$\int_0^l dx \int_A \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) dA = \frac{d}{dt} \left[\int_0^l dx \int_A (\mathbf{V} \cdot \mathbf{i}) dA \right] = l \frac{dQ}{dt}. \quad (2)$$

Здесь A — площадь сечения канала, l — длина оси канала, $\mathbf{i}$ — единичный вектор вдоль оси канала. По определению $Q = \int_A (\mathbf{V} \cdot \mathbf{i}) dA$.

С учетом второго уравнения (1) Q не зависит от x :

$$\int_0^l dx \int_A \text{grad } p dA = \int_A dA \int_0^l (\mathbf{i} \text{grad } p) dx = 0, \quad (3)$$

$$F_K = \int_0^l dx \int_A \rho_0 \alpha \mathbf{g} [T(x, r, \psi, t) - T_0] dA = \rho_0 \alpha A \int_0^l T(x, t) (\mathbf{g}, \mathbf{i}) dx, \quad (4)$$

где F_K — сила конвекции; $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения;

$$T(x, t) = \frac{1}{A} \int_A T(x, r, \psi, t) dA \quad (5)$$

— средняя температура в сечении трубки;

$$\int_0^l dx i \int_A \mu \Delta V dA = F_{\text{тр}}$$

— полная сила трения на внутренней поверхности трубки.

По закону Пуазейля для ламинарного течения в трубке сила сопротивления пропорциональна вязкости μ и объемному расходу Q :

$$F_{\text{тр}} = -lA\xi_p Q. \quad (6)$$

В частности, для круглого поперечного сечения трубки

$$\xi_p = \frac{8\pi\mu}{A^2}, \quad (7)$$

для эллиптического сечения с полуосями a и b

$$\xi_p = 4\mu \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} = \frac{8\pi\mu}{A^2} \frac{a^2 + b^2}{2ab}.$$

В общем случае для ξ_p можно принять форму (7), где A — площадь равновеликого кругового сечения. Сбрав вместе соотношения (2), (3), (4) и (6) получим:

$$\rho l \frac{dQ}{dt} = \rho \alpha A \int_0^l T(x, t) (\mathbf{g} \cdot \mathbf{i}) dx - \xi_p l A Q.$$

Здесь и далее $\rho = \rho_0$.

Уравнение баланса тепла имеет вид [5]:

$$\rho c \frac{dT(x, r, \psi, t)}{dt} = \lambda \Delta T(x, r, \psi, t) + N(x, r, \psi, t).$$

Проинтегрируем это уравнение по площади A . Интеграл от левой части равен

$$\rho c \iint_A \frac{dT(x, r, \psi, t)}{dt} dA = \rho c \left[A \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + Q(t) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right]. \quad (8)$$

Выражение (8) приближенное. Для точного равенства в правой части (8) должен стоять дополнительный член:

$$\varepsilon = \rho c \frac{\partial}{\partial x} \left[\iint_A u(r, t) (T(x, r, \psi, t) - T(x, t)) dA \right],$$

где $u(r, t)$ — распределение скорости жидкости в сечении трубки. Интеграл от первого слагаемого правой части уравнения баланса тепла равен

$$\lambda \int_A \Delta T(x, r, \psi, t) dA = A \lambda \frac{\partial^2 T(x, r)}{\partial x^2} + q_{\text{бок}}.$$

Для получения замкнутой задачи необходимо связать в последнем выражении поток тепла с периметра сечения $q_{\text{бок}}$ со средней температурой в сечении (5). В качестве такой связи принимается, что

$$q_{\text{бок}} = -\beta [T(x, t) - T_0]. \quad (9)$$

Так же как и (8), выражение (9) приближенное.

Для оценки области применимости выражений (8) и (9) и определения коэффициента β была рассмотрена следующая задача: по бесконечной трубке радиусом r_t и толщиной стенок h_t течет жидкость с заданным расходом θ или средней скоростью U . Температура жидкости выше температуры окружающей среды, с которой трубка находится в тепловом контакте. Заданы все необходимые теплофизические параметры среды, трубки и жидкости в трубке. В предположении конвективного или чисто теплопроводного обмена теплом между трубкой и окружающей средой решена задача нахождения стационарного распределения температуры в жидкости, стенке трубки и окружающей среде. Распределение температуры получено в виде

$$T(x, r) = f(r)e^{-bx}. \quad (10)$$

Безусловно, соотношение (10) выражает лишь один из возможных видов распределения температуры в трубке. Однако для оценки точности приближений (8) и (9) частный случай (10) вполне подходит. Ниже в таблице приведены результаты расчетов некоторых режимов теплоотдачи от жидкости в окружающую среду.

Условия теплообмена	U , см/с	$\epsilon' \cdot 10^2$	β , Вт/(м·К)
1. Жидкость — вода, трубка — полихлорвинил, $r_t = 3,7$ мм, $h_t = 1,5$ мм, среда — воздух	0,1	0,486	0,2417
	0,925	0,486	0,2418
	5	0,486	0,2418
2. Жидкость — метиловый спирт, трубка — полихлорвинил, $r_t = 4,0$ мм, $h_t = 0,2$ мм, среда — сталь	0,1	12,02	9,335
	1	11,7	9,504
	10	11,4	9,11

В таблице $\epsilon' = \epsilon / \left(Q \frac{\partial T(x, r)}{\partial x} \right)$ — относительная ошибка равенства (8).

Как видим, в случае 1 оба предположения (8) и (9) выполняются очень хорошо, а в случае 2 равенство (8) является плохим приближением. В целом расчеты показывают, что соотношения (8) и (9) удовлетворительны, когда

$$\frac{\lambda}{\lambda_t} \frac{h_t}{r_t} \gg 1,$$

где λ_t — теплопроводность трубки, или когда

$$\frac{\lambda}{\lambda_{cp}} \gg 1,$$

где λ_{cp} — теплопроводность окружающей среды.

Величину β в выражении (9) можно определять и эмпирически. Так, для случая 1 в таблице экспериментальное значение β получено в пределах $\beta = 0,317 \div 0,426$ Вт/(м·К), что близко к значению, полученному в расчетах $\beta = 0,2418$ Вт/(м·К).

Если предположить, что процесс теплообмена между стенками трубки и жидкостью происходит мгновенно, то можно учесть и затраты тепла на изменение температуры стенок трубки q_t :

$$q_t = -c_{эфф} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t},$$

где $c_{эфф}$ — эффективная погонная теплоемкость трубки. Обозначим интеграл от второго слагаемого правой части уравнения баланса тепла

$$N(x, t) = \int_A N(x, r, \psi, t) dA.$$

Если уравнение оси трубки $R(\varphi)$, то система уравнений процесса конвекции жидкости в трубке имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho l \frac{dQ}{dt} &= \rho g \alpha A \int_0^{2\pi} T(x, t) [\sin \varphi \cdot R(\varphi) - \cos \varphi R'(\varphi)] d\varphi - \xi_p l A \cdot Q(t), \\ (\rho c A + c_{\text{эфф}}) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - A \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \rho c \cdot Q(t) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \\ &+ \beta_0 (T(x, t) - T_0) = N(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

при начальных условиях $Q(0) = Q_0$; $T(x, 0) = \chi(x)$, $T(x, t) = T((x + l), t)$,
условии замкнутости трубки

$$x = \int_0^{\varphi} \sqrt{(R')^2 + (R(\varphi))^2} d\varphi, \quad R' = \frac{dR(\varphi)}{d\varphi}.$$

2. Конвекция в прямоугольном контуре. Пусть контур Γ — прямоугольник $LKNM$ (рис. 1, б). Предположим, что все источники тепла сосредоточены на некотором отрезке $[a, b]$, принадлежащем $[M, L]$. В данном случае сила конвекции принимает следующий вид:

$$F_k = g A \alpha \rho \left(\int_M^L T(x, t) dx - \int_K^N T(x, t) dx \right).$$

Введем безразмерные функции и переменные:

$$T(x, t) = M_T \bar{T} + T_0; \quad Q = M_Q \bar{Q}; \quad x = M_x \bar{x}; \quad t = M_t \bar{t}; \quad \bar{c}_{\text{эфф}} = \frac{c_{\text{эфф}}}{\rho c A}. \quad (12)$$

После подстановки масштабов (12) и алгебраических преобразований система (11) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \frac{d\bar{Q}}{d\bar{t}} &= \int_M^L \bar{T} d\bar{x} - \int_K^N \bar{T} d\bar{x} - \xi \bar{Q}; \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} - \Lambda \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\bar{Q}(\bar{t})}{1 + \bar{c}_{\text{эфф}}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + B_0 \bar{T} &= n(\bar{x}, \bar{t}); \\ \bar{Q}(0) &= \bar{Q}_0; \quad \bar{T}(\bar{x}, 0) = \bar{\chi}(\bar{x}); \\ \bar{T}(\bar{x}, \bar{t}) &= \bar{T}((\bar{x} + m), \bar{t}); \quad m = \frac{l}{M_x}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$\xi = \frac{8\pi\mu M_Q}{A^2 \alpha g \rho M_T}.$$

Для определенности будем рассматривать эволюцию системы из состояния $\bar{Q}(0) = 0$ и $\bar{\chi}(\bar{x}) = 0$.

Рассмотрим класс задач, в которых перенос тепла посредством теплопроводности значительно меньше переноса тепла конвекцией. Строгое условие получается после введения масштабов и имеет вид

$$\Lambda = \frac{A\lambda}{M_x M_Q \rho c (1 + \bar{c}_{\text{эфф}})} \ll 1.$$

Если в качестве M_x взять длину контура l , а остальные масштабы M_Q , M_T , M_t найти из физических предположений, о которых будет сказано ниже, то значения Λ будут иметь порядок $10^{-4} - 10^{-6}$. Возникает соблазн пренебречь теплопроводностью. Однако задача имеет начальный этап, когда скорость конвекции отсутствует и все тепло передается теплопроводностью. Примем в качестве первого этапа промежуток времени, когда все тепло сосредоточено в пределах отрезка $[M, L]$, и покажем, что в течение этого этапа решение для $\bar{Q}(t)$ можно получить в виде квадратуры, а при некоторых простых видах $P(t)$ — даже в элементарных функциях. Условия задачи не содержат характерных масштабов M_Q , M_T , M_t . Длина контура l , как будет показано ниже, тоже не является характерным масштабом на первом этапе. Для определения масштабов и коэффициентов в уравнениях системы (13) необходимы четыре физических соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_x A}{M_t} &= M_Q; \\ \frac{1}{\sigma} &= \frac{l M_Q}{M_x A g \alpha M_T M_t} = 1; \\ \max \left(\int_a^b n(\bar{x}, \bar{t}) dx \right) &= \frac{1}{\rho c M_Q M_T (1 + \bar{c}_{\text{эф}})} \int_a^b N(x, t) dx = \frac{\max(P(t))}{\rho c M_Q M_T (1 + \bar{c}_{\text{эф}})} = 1; \\ \Lambda &= \frac{A \lambda}{M_x M_Q \rho c (1 + \bar{c}_{\text{эф}})} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Обозначим далее $P = \max(P(t))$.

О последнем соотношении следует сказать особо. Смысл его состоит в том, что в масштабах первого этапа перенос тепла теплопроводностью одного порядка с конвекцией. Это позволяет определить первый этап как малоскоростной или разгонный. Все это, однако, не исключает появления больших скоростей на этом этапе.

Разрешив соотношения (14) относительно масштабов, получим:

$$\left. \begin{aligned} M_Q &= \left[\frac{P A^4 g \alpha \lambda^2}{(1 + \bar{c}_{\text{эф}})^3 \rho^3 c^3 l} \right]^{1/5}; & M_x &= \left[\frac{A \lambda^3}{l^4 \rho^2 c^2 (1 + \bar{c}_{\text{эф}})^2 \alpha g P} \right]^{1/5}; \\ M_t &= \left[\frac{A^2 \lambda \rho c (1 + \bar{c}_{\text{эф}}) l^2}{\alpha^2 g^2 P^2} \right]^{1/5}; & M_T &= \left[\frac{P^4 l}{(1 + \bar{c}_{\text{эф}})^2 \rho^2 c^2 A^4 \alpha g \lambda^2} \right]^{1/5}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Так, для трубки диаметром 7,4 мм и длиной $l = 6,28$ м при мощности $P = 3$ Вт, когда рабочая жидкость — вода, масштабы (15) равны: $M_Q = 0,04$ см/с, $M_x = 0,23$ см, $M_t = 0,91$ с, $M_T = 41^\circ\text{C}$.

В дальнейшем, если не будет оговорено особо, штрихи над безразмерными величинами опущены.

Проинтегрируем второе уравнение системы (13) по стороне $[M, L]$:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_M^L T dx \right) - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_M^L + \frac{Q(t)}{1 + \bar{c}_{\text{эф}}} T \Big|_M^L + B_0 \int_M^L T dx = f(t).$$

Обозначим $\int_M^L T dx = F_x(t)$; $\int_M^L n(x, t) dx = f(t)$.

По условию первого этапа течения проинтегрированные члены исчезают. Вместе с первым уравнением системы (13) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= F_{\kappa}(t) - \xi Q; \\ \frac{dF_{\kappa}}{dt} &= f(t) - B_0 F_{\kappa}; \quad Q(0) = 0; \quad F_{\kappa}(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Очевидно, что решение для $Q(t)$ может быть получено, по крайней мере, в квадратурах. Приведем решение системы (16) для

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0; \end{cases}$$

$$Q(t) = \frac{1}{\xi B_0} (1 - e^{-\xi t}) + \frac{e^{-B_0 t} - e^{-\xi t}}{B_0(B_0 - \xi)}.$$

После того как найдено решение $Q(t)$, относительно $T(x, t)$ имеем задачу Коши для линейного уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q(t)}{(1 + c_{\text{эф}})} \frac{\partial T}{\partial x} + B_0 T = n(x, t). \quad (17)$$

Условие периодичности автоматически выполняется при $x \gg 1$. Если дополнительно предположить, что крайние точки области подвода тепла a, b в переменных первого этапа отстоят далеко от угловых точек M и L , то для решения уравнения (17) можно использовать метод преобразования Фурье. Кратко приведем это решение в связи с тем, что переменный коэффициент $Q(t)$ не позволяет воспользоваться классической формулой свертки.

Фундаментальное решение уравнения (17) имеет вид:

$$\varepsilon(x, t) = 1(t) \frac{e^{-B_0 t}}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{|x - S(t)|^2}{4t}}. \quad (18)$$

Как видим, подобно фундаментальному решению уравнения теплопроводности, решение (18) также представляет колоколообразную функцию. Однако этот «колокол» перемещается по x по закону $S(t)$. Интересно отметить, что в результате учета теплоемкости трубки $c_{\text{эф}} > 0$ скорость переноса тепла $\frac{dS}{dt} = \frac{Q(t)}{1 + c_{\text{эф}}}$ меньше скорости жидкости $Q(t)$. Полное решение уравнения (17) найдем как свертку фундаментального решения (18) и правой части $n(x, t)$:

$$T(x, t) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(\eta, z)}{2\sqrt{\pi(t-z)}} e^{-B_0(t-z)} e^{-\frac{|x - \eta - (S(t) - S(z))|^2}{4(t-z)}} dz d\eta. \quad (19)$$

Особенностью свертки (19) является использование разности $S(t) - S(z)$ вместо $S(t - z) = Q(t - z)$, как этого требует формула свертки в случае $Q(t) = \text{const}$. Бесконечные пределы по η в интеграле (19) можно заменить на a, b , так как $n(x, t) \neq 0$ при $x \in [a, b]$.

Приведем еще одну форму решения (19):

$$T(x, t) = - \int_0^t e^{-B_0(t-z)} \int_a^b n(\eta, z) \frac{\partial \Phi(\eta)}{\partial \eta} d\eta dz, \quad (20)$$

$$\text{где } \varphi = \frac{x - \eta - [S(t) - S(z)]}{\sqrt{2(t-z)}}, \quad \Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varphi} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

здесь $\Phi(\varphi)$ — функция Гаусса.

Таким образом, на первом этапе течения решение задачи (13) дается решением системы (16), из которой находим $Q(t)$ и $S(t)$, эволюция температуры во времени t и вдоль x дается выражениями (19) или (20).

Рассмотрим два частных случая.

1. Равномерный нагрев на отрезке $[a, b]$:

$$n(x, t) = f(t) \frac{1}{b-a}; \quad x = [a, b];$$

$$T(x, t) = \frac{1}{b-a} \int_0^t f(z) e^{-B_0(t-z)} \left[\Phi\left(\frac{x-a-S(t)+S(z)}{\sqrt{2(t-z)}}\right) - \Phi\left(\frac{x-b-S(t)+S(z)}{\sqrt{2(t-z)}}\right) \right] dz.$$

2. Сосредоточенный нагрев:

$$n(x, t) = f(t) \delta(x);$$

$$T(x, t) = \int_0^t \frac{f(z)}{2\sqrt{\pi(t-z)}} e^{-B_0(t-z)} \exp - \frac{(x-S(t)+S(z))^2}{4(t-z)} dz. \quad (21)$$

На рис. 2 показана эволюция температуры из нулевых начальных условий для случая $f(t) = 1(t)$ в (21).

Как указывалось выше, полученное для $Q(t)$ и $T(x, t)$ решение справедливо до тех пор, пока тепло не доходит до точек L и M контура. Существует, однако, частный случай большой теплоотдачи, когда решение первого этапа справедливо при любом t . Условия существования такого режима конвекции следующие:

$$\left. \begin{aligned} B_0^2 \xi x_L &\gg 1, \\ B_0 \xi x_M &\gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Второй этап начинается после того, как тепло достигает точки L контура, если не выполнено условие (22). Этот этап характеризуется

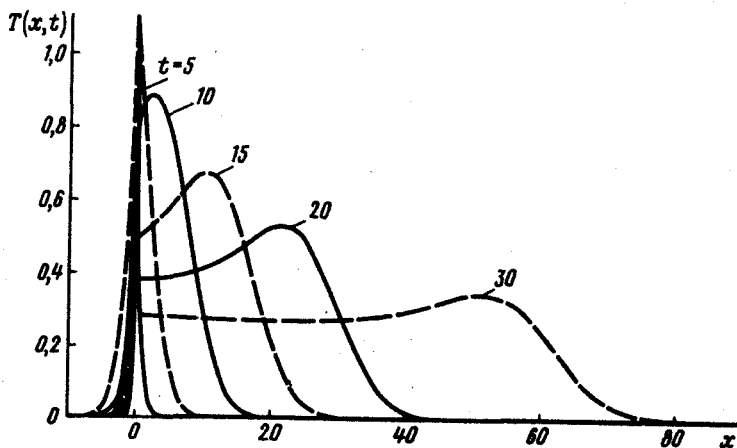


Рис. 2

тем, что перенос тепла конвекцией значительно больше переноса тепла теплопроводностью и тепло распространяется по всему контуру. На этом этапе характерной длиной является $M_x = l$. Для определения M_Q , M_T и M_l принимаются первое и третье соотношения (14), принятые для первого этапа. Так как на втором этапе течения характерным является стационарный режим, когда сила конвекции равна силе сопротивления, то последним условием принимается

$$\xi = \frac{8\pi\mu M_Q}{A^2 g \alpha \rho M_T} = 1.$$

Система уравнений (13) упрощается из-за пренебрежения теплопроводностью $\Lambda \ll 1$. Однако в отличие от первого этапа для $Q(t)$ уже нельзя получить систему типа (16), не зависящую от $T(x, t)$. Становятся несправедливыми и предположения, позволившие получить решение (19) для $T(x, t)$. Прямое численное решение системы (13) без учета теплопроводности с начальными данными, взятыми из первого этапа, видимо, не представляет большой сложности. Однако здесь ограничимся рассмотрением лишь стационарного случая, а все основные свойства нестационарной конвекции будут рассмотрены ниже на примере кругового контура. В стационарном случае система (13) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \int_M^L T dx - \int_K^N T dx; \\ -\Lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{Q}{(1+c_{эфф})} \frac{dT}{dx} + B_0 T &= n(x). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Если $n(x)$ таково, что второе уравнение системы (23) интегрируется до конца, то для Q можно получить алгебраическое уравнение. В качестве примера приведем решение системы (23) для случая $n(x) = \delta(x)$ и $\Lambda \ll 1$:

$$Q = \frac{1 - e^{-k_1 x_L} + e^{-k_1 x_M} - e^{-k_1} - e^{-k_1 x_K} + e^{-k_1 x_N}}{B_0(1 - e^{-k_1})},$$

где

$$k_1 = \frac{B_0}{Q}(1 + c_{эфф}) \sim 1;$$

$$T(x) = \frac{(1 + c_{эфф})}{Q} \left(\frac{e^{-k_1 x}}{1 - e^{-k_1}} + e^{k_2(x-1)} \right);$$

$$k_2 = \frac{Q}{(1 + c_{эфф})\Lambda} \gg 1.$$

3. Конвекция в круговом контуре. В случае кругового контура (рис. 1, в) выражение для силы конвекции (4) принимает вид ($x = \varphi$):

$$F_K = Ag\alpha\rho R \int_0^{2\pi} T(\varphi, t) \sin \varphi d\varphi. \quad (24)$$

За масштаб длины примем $M_x = R$. Для определения масштабов M_Q , M_T , и M_l примем, подобно тому как это было сделано для прямоугольного контура (14), следующие физические соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_x A}{M_t} &= \frac{RA}{M_t} = M_Q; \\ \frac{1}{\sigma} &= \frac{M_Q}{Ag \alpha M_T M_T} = 1; \\ \max \left(\int_0^\varphi n(\varphi, t) d\varphi \right) &= \frac{P}{\rho c M_Q M_T (1 + c_{\varphi\varphi})} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Решив (25), получим масштабы:

$$\left. \begin{aligned} M_Q &= \left(\frac{A^2 \alpha g R P}{\rho c (1 + c_{\varphi\varphi})} \right)^{1/3}; \\ M_T &= \left(\frac{P^2}{A^2 \rho^2 c^2 (1 + c_{\varphi\varphi})^2 \alpha g R} \right)^{1/3}; \\ M_t &= \left(\frac{A R^2 \rho c (1 + c_{\varphi\varphi})}{\alpha g P} \right)^{1/3} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

и коэффициенты:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \lambda \left(\frac{A}{\rho^2 c^2 (1 + c_{\varphi\varphi})^2 R^4 \alpha g P} \right)^{1/3}, \\ B_0 &= \beta_0 \left(\frac{R^2}{\rho^2 c^2 (1 + c_{\varphi\varphi})^2 A^2 \alpha g P} \right)^{1/3}, \\ \xi &= 8\pi\mu \left(\frac{R^2 c (1 + c_{\varphi\varphi})}{A^2 \alpha g \rho^2 P} \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

В результате подстановки соотношений (24) и (26) в систему уравнений (11) получим безразмерную систему уравнений конвекции в круговом контуре:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\varphi, t) \sin \varphi d\varphi - \xi Q; \\ \frac{\partial T}{\partial t} - \Lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{Q(t)}{(1 + c_{\varphi\varphi})} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + B_0 T &= n(\varphi, t), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где $Q(0) = Q_0; \quad T(\varphi, 0) = \chi(\varphi); \quad T(\varphi, t) = T((\varphi + 2\pi), t).$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\varphi, t) \cos \varphi d\varphi; & F_\kappa(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\varphi, t) \sin \varphi d\varphi; \\ f_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(\varphi, t) \cos \varphi d\varphi; & f_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(\varphi, t) \sin \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Тогда эволюция $Q(t)$, $a(t)$ и $F_k(t)$ во времени описывается следующей нелинейной системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= f_1(t) - B \cdot a(t) - Q(t)F_k(t)/(1 + c_{\text{эфф}}); \\ \frac{dF_k}{dt} &= f_2(t) - B \cdot F_k(t) + Q(t)a(t)/(1 + c_{\text{эфф}}); \\ \frac{dQ}{dt} &= F_k - \xi Q, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где $Q(0) = Q_0$; $a(0) = a_0$; $F_k(0) = F_{k0}$; $B = B_0 + \Lambda$.

Отметим, что система уравнений (28) без каких-либо дополнительных предположений выводится из системы (27). Первое уравнение системы (28) получается умножением второго уравнения (27) на $\frac{1}{2\pi} \cos \varphi$ и интегрированием по всему контуру. Аналогично получено второе уравнение (28) с тем отличием, что умножение производится на $\frac{1}{2\pi} \sin \varphi$. Третье уравнение системы (28) — первое в системе (27). Таким образом, скорость конвекции $Q(t)$ может быть получена в результате решения задачи Коши для системы (28). После этого $T(\varphi, t)$ находится решением смешанной задачи для второго уравнения системы (27), где $Q(t)$ известно. Для случая с малой теплопроводностью ($\Lambda \ll 1$) здесь, как и в прямоугольном контуре, имеется начальный этап, когда тепло не охватывает весь контур:

$$|S(t)| \ll \pi. \quad (29)$$

На этом этапе полностью справедливо решение (19). Здесь также нужно перейти к микропеременным и масштабам первого этапа (15), заменив l на R , а $x = \frac{R(\varphi - \varphi_0)}{M_k}$. Условие (29) всегда выполняется при не слишком больших колебаниях около устойчивого положения равновесия ($\varphi_0 = \pi$ — при подогреве, $\varphi_0 = 0$ — при охлаждении). В этом случае формула (20) верна для всего процесса конвекции, если

$$\pi \sqrt{\frac{B_0}{\Lambda}} \gg 1.$$

На рис. 3 представлены результаты расчета эволюции температуры для случая (21) при $f(t) = 1(t)$. В момент включения сосредоточенного источника тепла, расположенного в верхней точке $\varphi_0 = \pi$, жидкость имела начальную скорость $Q_0 > 0$. Хорошо видно, как затухающие колебания скорости $Q(t)$ генерируют волнообразное распределение температуры.

Вернемся к рассмотрению свойств решений системы (28). Конвекция в круговом контуре исследовалась многими авторами [1] — [4]. В указанных работах без учета теплопроводности жидкости, теплоемкости трубки и при узком наборе способов подвода тепла получена система уравнений динамики процесса конвекции, известная под названием «системы Лоренца»:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} &= \sigma(V - U); \\ \frac{dV}{d\tau} &= -V + q_1 U - W U + q_2; \\ \frac{dW}{d\tau} &= UV - W. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

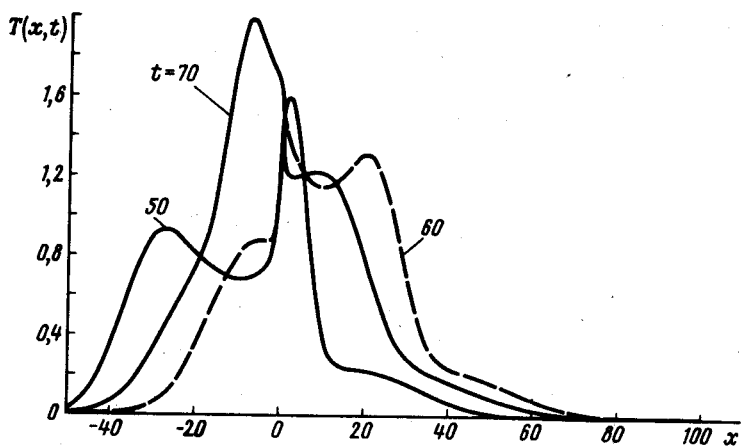


Рис. 3

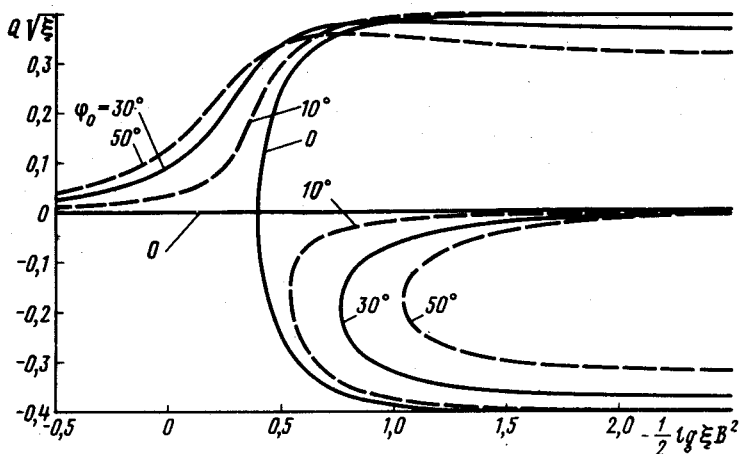


Рис. 4

Если $\Lambda = 0$, $c_{эфф} = 0$ и $f_1(t) = \text{const}$, $f_2(t) = \text{const}$, то между системами (28) и (30) имеется следующая связь:

$$\tau = \frac{1}{B_0} t; \quad U = \frac{1}{B_0} Q; \quad V = \frac{1}{\xi B_0} F_k; \quad W = \frac{(a - f_1)/B_0}{\xi B_0};$$

$$\sigma = \xi/B_0; \quad q_1 = f_1/(\xi B_0^2); \quad q_2 = f_2/(\xi B_0^2).$$

Проведем исследование решений системы (28) для случая $f_1 = \text{const}$ и $f_2 = \text{const}$. Несмотря на то что система (28) сравнительно проста, она обнаруживает свойства, характерные для многих, значительно более сложных, нелинейных физических систем с диссипацией.

Неединственность стационарных решений. Если распределение источников тепла $n(\varphi)$ задано, то стационарные решения системы (28) зависят от параметра ξB^2 . На рис. 4 представлена эта зависимость для $n(\varphi) = \delta(\varphi - \varphi_0)$ при различных углах φ_0 подвода тепла. Видно, что при большой диссипации $\xi B^2 > d_1$ имеется одно решение с конвекцией в сторону точки подвода тепла. При некотором (зависящем от φ_0 и $c_{эфф}$ значении $d_1 = (\xi B^2)_1$ про-

исходит бифуркация и появляется еще одно решение с конвекцией в противополоственном направлении, которое при дальнейшем уменьшении ξB^2 распадается на два решения: одно с большой (Q_2), другое с малой (Q_3) отрицательной скоростью (см. рис. 1, в). Если $\varphi_0 = 0$ (подогрев в нижней точке, рис. 1, в), то

$$d_1 = \frac{1}{2\pi(1+c_{эфф})} = (\xi B^2)_1 = \mu \beta_0^2 \frac{8\pi R^2}{A^2 \rho^2 c_{эфф}(1+c_{эфф})P}.$$

Потеря устойчивости стационарных решений при уменьшении диссипации. До точки первой бифуркации единственное стационарное решение Q_1 устойчиво. После того как ξB^2 становится меньше d_1 , появляются еще два решения: Q_2 — устойчивое — с большой отрицательной скоростью и Q_3 — неустойчивое — с малой. Поведение решений автономной системы удобно исследовать в фазовой плоскости. В данном случае следует говорить о фазовом пространстве a, Q, F_k . В фазовом пространстве устойчивые стационарные решения представляют собой точки, к которым спирально сходятся все траектории. Каждая точка — аттрактор — имеет свою область притяжения. При дальнейшем уменьшении ξ и B происходит последовательная потеря устойчивости сначала второго решения, а потом и первого.

На рис. 5 в плоскости параметров $B, \lg(1/\xi)$ даны области различного поведения решений (28) при $\varphi_0 = 10^\circ, c_{эфф} = 0$. Кривая 1 на этом рисунке — кривая первой бифуркации. Она разделяет области, где существуют одно и три стационарных решения. Кривая 2 является линией потери устойчивости решения Q_2 по отношению к малым возмущениям. Кривая 3 есть линия, на которой теряет устойчивость Q_1 . В области между кривыми 2 и 3 устойчиво только решение Q_1 . В области под кривой 3 устойчивых стационарных решений нет.

Наличие нестационарных и даже случайных решений при стационарных внешних условиях и силах — важнейшее свойство решений системы (28). Оно было обнаружено Зальцманом [4] и Лоренцем [3] для системы (30). Как показывают численные решения задачи Коши для системы (28) в области под кривой 3 (см. рис. 5), после разрушения стационарных решений система выходит на хаотическое незатухающее во времени решение. Характерное свойство таких решений — крайняя чувствительность их к изменению начальных условий и любых других параметров задачи.

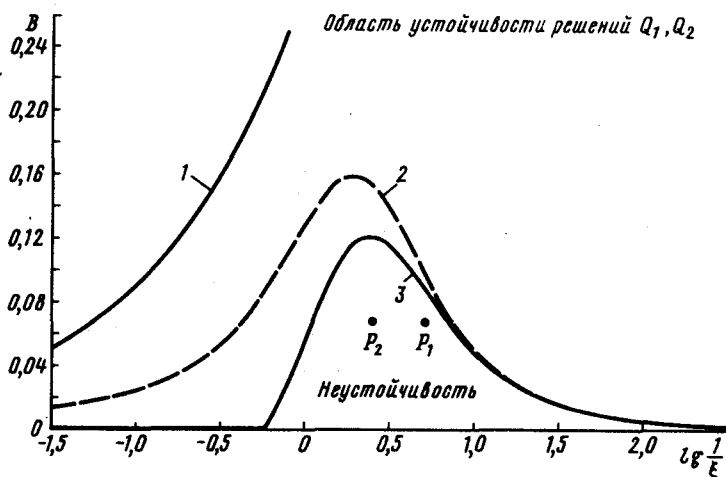


Рис. 5. Точка P_1 — периодическое по времени решение ($\xi = 0,2, B = 0,07$); точка P_2 — хаотическое решение ($\xi = 0,4, B = 0,07$)

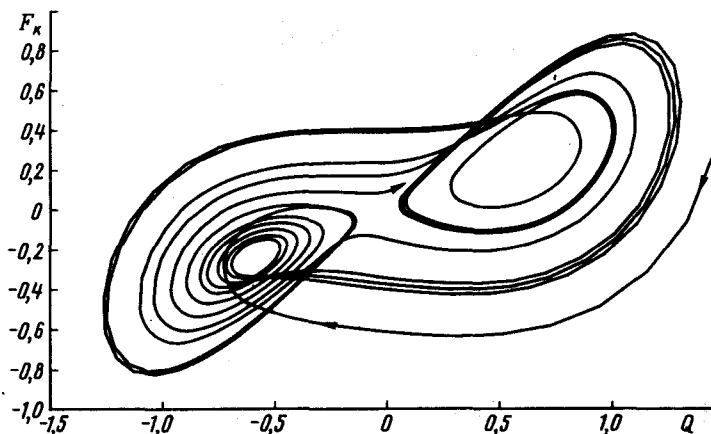


Рис. 6

Существование хаотических решений указывает на появление в фазовом пространстве системы (28) притягивающего множества типа «странный аттрактор». Проекция следа фазовой точки системы (28), движущейся по странному аттрактору, на плоскость F_k, Q представлена на рис. 6 ($\xi = 0,4$; $B = 0,07$ — точка P_2 , см. рис. 5).

Однако было бы ошибкой рассматривать всю область под кривой 3 на рис. 5 как область хаотических решений. Еще Лоренцем [3] и Зальцманом [4] при численном исследовании системы (30) были обнаружены решения, похожие на периодические. Автором данной работы при численном интегрировании системы (28) тоже получены нелинейные устойчивые периодические решения (например, в точке P_1 на рис. 5). Хаотические решения обнаружены в области между кривыми 2 и 3 на рис. 5. Здесь при одних и тех же параметрах ξ и B задача имеет и хаотическое, и устойчивое стационарное решения.

В заключение несколько слов о влиянии теплоемкости трубки $c_{эфф}$ на решение (28). Учет $c_{эфф}$ приводит к смещению кривых 1 — 3 на рис. 5 в сторону меньших значений коэффициентов диссипации ξ, B .

Автор благодарит Ю. Н. Ермака за помощь и поддержку во время написания статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Walander P. On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop//J. Fluid Mech.—1967. Vol. 29.
2. Суинни, Дж. Голла б. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. — М.: Мир, 1984.
3. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow//J. Atmos. Sci. — 1963. Vol. 20.
4. Zaltzman B. Finite amplitude free convection as an initial value problem//J. Atmos. Sci. — 1962. Vol. 19.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987.