

УДК 528.48

UDC 528.48

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КООРДИНАТ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПУНКТОВ ЛИНЕЙНЫМИ
ЗАСЕЧКАМИ**

**ABOUT DETERMINATION OF
COORDINATES OF GEODETIC
AREAS BY LINEAR SERIFS**

Соколов Юрий Григорьевич
к.т.н., профессор

Sokolov Yury Grigorievich
Cand. Tech.Sci., professor

Пшидаток Саида Казбековна
ассистент

Pshidatok Saida Kasbekovna
lecturer

*Кубанский государственный аграрный
университет, Краснодар, Россия*

Kuban State Agrarian University, Krasnodar, Russia

В данной работе рассматривается вопрос определения координат геодезических пунктов для сгущения плановых сетей, привязочных и других работ, путем выполнения только линейных измерений. Предложен способ определения координат двух пунктов с помощью линейных засечек. Приведены математическая обработка полученных результатов и числовой пример ее реализации.

Problem of geodetic area coordinate determination for concentration of planned nets, binding and other works, by means of execution only linear serifs is considered in the given work. Way of determination of coordinates of two areas with the help of linear serifs was offered. Mathematical processing of received results and numeric example of its realization were casted.

Ключевые слова: ОПРЕДЕЛЕНИЕ
КООРДИНАТЫ, ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПУНКТЫ,
ЛИНЕЙНЫЕ ЗАСЕЧКИ.

Key words: DETERMINATION OF
COORDINATES, GEODETIC AREAS,
LINEAR SERIFS.

Для определения координат точек, которые могут быть использованы в дальнейшем как пункты съёмочного обоснования или как пункты, координаты которых необходимы для решения каких-либо других задач, существует много различных способов, часть из них может быть использована и в случае привязки ходов к пунктам геодезической основы. Практически все эти способы основываются на угловых измерениях. В настоящее время в связи с широким внедрением в производство светодальномерной техники появилась возможность оперативно и качественно, взамен угловых, производить линейные измерения, на которые, как известно, внешние условия, центрировка и редукция оказывают значительно меньшее влияние, чем на угловые.

В работе предлагается способ определения координат двух пунктов двумя линейными засечками.

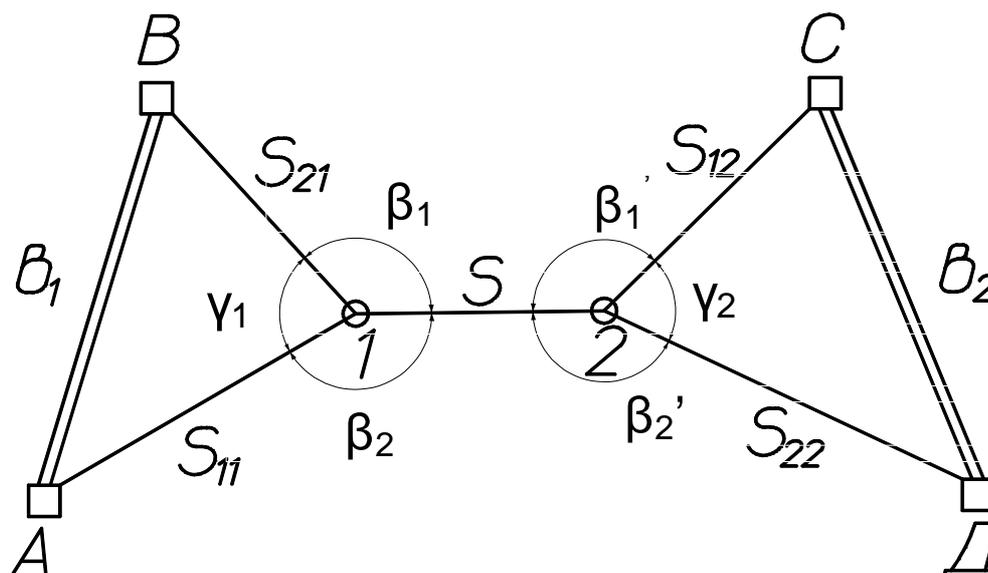


Рисунок 1. К определению координат линейными засечками

На рисунке 1 изображены точки: А, В, С, Д с известными координатами. От этих точек выполнены равноточные линейные измерения сторон S_{11} , S_{21} , S_{12} , S_{22} . Кроме того, измерена еще сторона S между искомыми точками 1 и 2.

Решение поставленной задачи заключается в следующем:

Для линии S можно записать:

$$S - \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = f_s, \quad (1)$$

где: X_1 , X_2 , Y_1 и Y_2 – вычисленные значения координат линейными засечками по формулам:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_B + q_1 \times (X_A - X_B) + h \times (Y_A - Y_B) \\ Y_1 &= Y_B + q_1 \times (Y_A - Y_B) - h \times (X_A - X_B) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= X_D + q_2 \times (X_C - X_D) + h \times (Y_C - Y_D) \\ Y_2 &= Y_D + q_2 \times (Y_C - Y_D) - h \times (X_C - X_D) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где:
$$q_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{S_{21}}{e_1} \right)^2 - \left(\frac{S_{11}}{e_1} \right)^2 \right]; \quad (4)$$

$$q_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{S_{22}}{e_2} \right)^2 - \left(\frac{S_{12}}{e_2} \right)^2 \right];$$

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{S_{21}}{e_1} \right)^2 - q_1^2};$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{S_{22}}{e_2} \right)^2 - q_2^2};$$

f_s – линейная невязка.

Дифференцируя (1) по всем измеренным сторонам, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_s}{\partial S} &= 1; \frac{\partial f_s}{\partial S_{11}} = \cos \alpha_s \frac{\partial X_1}{\partial S_{11}} + \sin \alpha_s \frac{\partial Y_1}{\partial S_{11}} \\ \frac{\partial f_s}{\partial S_{21}} &= \cos \alpha_s \frac{\partial X_1}{\partial S_{21}} + \sin \alpha_s \frac{\partial Y_1}{\partial S_{21}} \\ \frac{\partial f_s}{\partial S_{12}} &= -\cos \alpha_s \frac{\partial X_2}{\partial S_{12}} - \sin \alpha_s \frac{\partial Y_2}{\partial S_{12}} \\ \frac{\partial f_s}{\partial S_{22}} &= -\cos \alpha_s \frac{\partial X_2}{\partial S_{22}} - \sin \alpha_s \frac{\partial Y_2}{\partial S_{22}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где: α_s – дирекционный угол стороны S.

Для нахождения частных производных в выражениях (5) продифференцируем формулы (2) и (3) по измеренным сторонам и после преобразований, согласно [1; 2; 3], получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial S_{11}} &= \frac{\sin \alpha_{21}}{\sin \gamma_1}; & \frac{\partial Y_1}{\partial S_{11}} &= -\frac{\cos \alpha_{21}}{\sin \gamma_1}; \\ \frac{\partial X_1}{\partial S_{21}} &= -\frac{\sin \alpha_{11}}{\sin \gamma_1}; & \frac{\partial Y_1}{\partial S_{21}} &= \frac{\cos \alpha_{11}}{\sin \gamma_1}; \\ \frac{\partial X_2}{\partial S_{12}} &= \frac{\sin \alpha_{22}}{\sin \gamma_2}; & \frac{\partial Y_2}{\partial S_{12}} &= -\frac{\cos \alpha_{22}}{\sin \gamma_2}; \\ \frac{\partial X_2}{\partial S_{22}} &= -\frac{\sin \alpha_{12}}{\sin \gamma_2}; & \frac{\partial Y_2}{\partial S_{22}} &= \frac{\cos \alpha_{12}}{\sin \gamma_2}; \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где: γ_1 и γ_2 – углы засечек;
 α – дирекционные углы сторон.

Подставляя (6) в (5), получим условное уравнение для избыточно измеренной стороны S:

$$V_{11} \frac{\sin(\alpha_{21} - \alpha_s)}{\sin \gamma_1} + V_{21} \frac{\sin(\alpha_s - \alpha_{11})}{\sin \gamma_1} + V_{12} \frac{\sin(\alpha_s - \alpha_{22})}{\sin \gamma_2} + V_{22} \frac{\sin(\alpha_{12} - \alpha_s)}{\sin \gamma_2} + V_s + f_s = 0, \quad (7)$$

Или, учитывая, что $\alpha_{21} - \alpha_s = \beta_1$, $\alpha_s - \alpha_{11} = \beta_2$, $\alpha_s - \alpha_{22} = \beta_2$, $\alpha_{12} - \alpha_s = \beta_1$, получим:

$$V_{11} \frac{\sin \beta_1}{\sin \gamma_1} + V_{21} \frac{\sin \beta_2}{\sin \gamma_1} + V_{12} \frac{\sin \beta_2}{\sin \gamma_2} + V_{22} \frac{\sin \beta_1}{\sin \gamma_2} + V_s + f_s = 0, \quad (8)$$

В уравнении (8) обозначим коэффициенты при неизвестных поправках через a_1 , a_2 , a_3 , и a_4 . Тогда запишем:

$$a_1 V_{11} + a_2 V_{21} + a_3 V_{12} + a_4 V_{22} + V_s + f_s = 0, \quad (9)$$

Для точки, например 1, весовые функции будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \frac{\sin \alpha_{21}}{\sin \gamma_1} V_{11} - \frac{\sin \alpha_{11}}{\sin \gamma_1} V_{21} \\ f_y &= -\frac{\cos \alpha_{21}}{\sin \gamma_1} V_{11} + \frac{\cos \alpha_{11}}{\sin \gamma_1} V_{21} \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

Присоединяя к условному уравнению (9) выражения для весовых функции и решая совместно по способу наименьших квадратов, получим искомые поправки к длинам измеренных сторон:

$$\left. \begin{aligned} V_{11} &= -\frac{f_s}{[aa]} \times a_1; & V_{21} &= -\frac{f_s}{[aa]} \times a_2; & V_{12} &= -\frac{f_s}{[aa]} \times a_3; \\ V_{22} &= -\frac{f_s}{[aa]} \times a_4; & V_s &= -\frac{f_s}{[aa]}; \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

По известной формуле [4] найдем обратные веса искомых функции:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P_x} &= [f_x f_x] - \frac{[a \times f_x]^2}{[a \times a]}; & \frac{1}{P_y} &= [f_y f_y] - \frac{[a \times f_y]^2}{[a \times a]}; \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

Тогда средняя квадратическая ошибка M положения искомой точки 1 будет:

$$M = \mu \sqrt{\frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y}}, \quad (13)$$

$$\text{Здесь } \mu = m_s = \sqrt{\frac{[V^2]}{r}},$$

V – вычисленные поправки;

r – число условных уравнений. (В рассматриваемом случае $r = 1$).

Рассмотрим следующий пример (рис. 2).

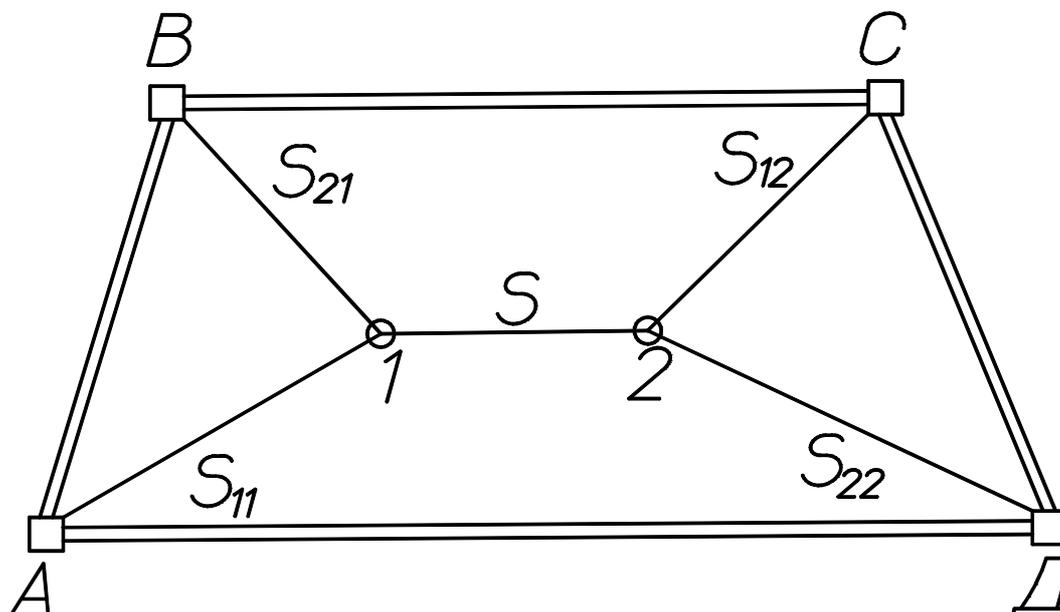


Рисунок 2. Схема расположения опорных и определяемых пунктов

Опорные пункты имеют следующие координаты:

$$X_A=0.000 \text{ м.}; X_B=1000.000 \text{ м.}; X_C=1000.000 \text{ м.}; X_D=0.000 \text{ м.};$$

$$Y_A=0.000 \text{ м.}; Y_B=1000.000 \text{ м.}; Y_C=2000.000 \text{ м.}; Y_D=2000.000 \text{ м.};$$

Измеренные длины линий составили:

$$S_{21} = 866.000 \text{ м.}; S_{11} = 500,010 \text{ м.}; S_{12} = 499.987 \text{ м.}; S_{22} = 866.050 \text{ м.};$$

$$S = 1239,340 \text{ м.};$$

Решение:

По формулам (2) и (3) определяют координаты искомых точек 1 и 2.

$$q_1 = 0.5 \times [1 + 0.749956 - 0.25011] = 0.749973$$

$$h_1 = \sqrt{0.749956 - 0.562495} = 0.4330087$$

$$X_1 = 1000.00 - 749.973 = 250.027$$

$$Y_1 = 0.000 + 433.0087 = 433.009$$

$$q_2 = 0.5 \times [1 + 0.7500426 - 0.249987] = 0.7500278$$

$$h_2 = \sqrt{0.7500426 - 0.5625417} = 0.4330137$$

$$X_2 = 0 + 750.028 = 750.028$$

$$Y_2 = 2000.000 - 433.014 = 1566.986$$

По полученным координатам точек 1 и 2 вычисляют линейную невязку по формуле (1)

$$f_s = 1239.340 - \sqrt{250000.800 + 1285905} - 1 = +0.023 \text{ м.}$$

Далее по координатам вычисляют дирекционные углы сторон:

$$\alpha_s = 66.206^\circ; \alpha_{11} = 59.997^\circ; \alpha_{21} = 149.999^\circ; \alpha_{22} = 330.001^\circ; \alpha_{12} = 240.003^\circ.$$

Используя (7) составляют условное уравнение для избыточного измеренной стороны S:

$$V_{11} \times 0.994 + V_{21} \times 0.108 + V_{12} \times 0.994 + V_{22} \times 0.108 + V_s + 0.023 = 0$$

и составляют по формулам (10) весовые функции:

$$f_x = 0.500 \times V_{11} - 0.866 \times V_{21}$$

$$f_y = 0.866 \times V_{11} - 0.500 \times V_{21}$$

Присоединяя к полученному условному уравнению выражения для весовых функции и решая их совместно по способу наименьших

квадратов по формулам (11) получаем поправки к длинам измеренных сторон.

$$[aa] = 0.9883 + 0.0117 + 0.9883 + 0.0117 + 1 = 3$$

$$V_{11} = -0.0076; V_{21} = -0.0008; V_{12} = -0.0076; V_{22} = -0.0008; V_s = 0.0077;$$

По формулам (12) находят обратные веса, m и M :

$$1/P_X = 1 - 0,05 = 0,95; \quad 1/P_Y = 1 - 0,25 = 0,75;$$

$$m = \pm 13,2 \text{ мм.}; \quad M = \pm 17 \text{ мм.}$$

Наконец, дифференциальные поправки в вычисленные координаты точек можно найти, согласно [5], по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \delta X_1 &= \frac{V_{21} \times \sin \alpha_{11} - V_{11} \times \sin \alpha_{21}}{\sin(\alpha_{11} - \alpha_{21})} \\ \delta Y_1 &= \frac{V_{21} \times \cos \alpha_{11} - V_{11} \times \cos \alpha_{21}}{\sin(\alpha_{11} - \alpha_{21})} \\ \delta X_2 &= \frac{V_{12} \times \sin \alpha_{22} - V_{22} \times \sin \alpha_{12}}{\sin(\alpha_{22} - \alpha_{12})} \\ \delta Y_2 &= \frac{V_{12} \times \cos \alpha_{22} - V_{22} \times \cos \alpha_{12}}{\sin(\alpha_{12} - \alpha_{22})} \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

Подставляя в формулу (14) найденные значения, получим:

$$\delta X_1 = +6,2 \text{ мм.}; \quad \delta Y_1 = -4.3 \text{ мм.}; \quad \delta X_2 = -3.1 \text{ мм.}; \quad \delta Y_2 = -7 \text{ мм.};$$

Таким образом, предлагаемый способ может быть с успехом использован на практике для решения рассматриваемых задач. Заметим

при этом, что взаимной видимости между исходными пунктами: А, В, С и Д не требуется.

Литература

1. Соколов Ю. Г. Способ создания геодезических сетей. Патент РФ №2178869, 2002 г.
2. Соколов Ю. Г., Тимошенко Н. А. К вопросу уравнивания заполняющих геодезических сетей из четырехугольников с измеренными сторонами. Сборник «Геодезия и фотограмметрия», г. Ростов-на-Дону, 2001 г.
3. Соколов Ю. Г., Тимошенко Н. А., Данильченко П. М., К вопросу составления условных уравнений в геодезических сетях из треугольников с измеренными сторонами. Научный журнал КубГАУ № 28(4), г. Краснодар, 2007 год.
4. Большаков В. Д., Левчук Г. П. «Справочник геодезиста, кн.2, Издание 3 переработанное и дополненное. М «Недра»,1985 год.
5. Соколов Ю. Г., Биматов И. Б. Упрощенный способ определения поправок в координаты при уравнивании линейной триангуляции. Материалы научно-технической конференции, ТИСИ, г. Томск, 1972 год.