**Динамическая модель рынка двух товаров с нулевым запасом прочности**

**The dynamical model of two goods market with zero factor of safety**

Калитин Борис Сергеевич
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры методов оптимального управления
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета
Kalitine@yandex.ru

Трухан Екатерина Владимировна
аспирант кафедры методов оптимального управления
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета
KTrukhan@mail.ru

**Аннотация**

В статье исследуется устойчивость экономического равновесия динамической модели рынка двух взаимодополяющих товаров. Модель описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений относительно вектора цен. Исследован критический случай двух нулевых корней. Рассмотрен рынок товаров повседневного спроса и дана соответствующая экономическая интерпретация условий устойчивости рыночных цен приминительно к случаю нулевого запаса прочности для обоих товаров.

The stability of economic equilibrium of two complementary goods market dynamical nonlinear differential model regarding the price vector is investigated. The critical case of two zero roots has been investigated. The convenience goods market was examined and the economic interpretation corresponding the market zero factor of safety has been given.

**Ключевые слова**

Математическая модель, динамическая модель, рынок двух товаров, взаимодополняющие товары, экономическое равновесие, устойчивость, запас прочности.

Mathematical model, dynamical model, two goods market, complementrary goods, economic equilibrium, stability, factor of safety.

**Введение**

В данной работе представлена модель рынка двух взаимодополняющих товаров, описывающая динамику цен на рассматриваемом рынке в зависимости от поведения основных и косвенных участников рыночной торговли [1]. Особенность построенной модели в том, что она позволяет осуществлять анализ происходящих на рынке событий безотносительно к процессу производства. Ясно, что синтез двух моделей (производственной и торговой) приводит к двукратному усложнению объекта исследований, если речь идет о произвольном, но достаточно большом наборе различных производимых и реализуемых товаров. Поэтому, предложенный подход, во-первых, упрощает задачу адекватного моделирования общественных отношений групп участников рыночных отношений, а во-вторых, дает почву для подготовки синтеза двух основных классов экономических моделей – моделей торговли и производства – на равноправной основе. Выбор конструкции модели позволяет акцентировать внимание на тех характеристиках рынка, которые находятся в центре исследования и получать удовлетворительные результаты и выводы относительно исследуемой проблематики. Данная модель, таким образом, попадает в раздел математической экономики, который относится к изучению происходящих на рынке событий безотносительно к тому, кто, когда, как и сколько произвел представленные на продажу товары или услуги. Кроме того, данный подход позволяет упростить задачу моделирования общественных отношений основных групп участников рынка – продавцов и покупателей.

Модель представляет собой систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений и исследуется методами качественной теории дифференциальных уравнений. В работе [3] изложены основы использованного метода построения математических моделей конкурентного рынка $n$ товаров. Данный метод основан на учете экономических сил групп-участников описываемых отношений – продавцов, покупателей и государства, а также сил конкуренции. Устойчивость экономического равновесия такой модели для рынка двух взаимозаменяемых товаров изучена в работе [4]. В работе [5] исследован рынок двух взаимодополняющих товаров в основном случае и в критическом случае одного нулевого корня, также было отмечено, что критический случай пары чисто мнимых корней системы линейного приближения модели невозможен. Настоящая работа является продолжением выше упомянутых исследований и изучает устойчивость экономического равновесия математической модели двух взаимодополняющих товаров в критическом случае двух нулевых корней.

## Основная часть

### 1. Описание модели

В предположении, что функции объемов продаж линейны модель представляется системой двух нелинейных дифференциальных уравнений [5]:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\dfrac{v_1 p_1' y_1}{y_1 + p_1'} - \dfrac{d_1 p_1'' y_1}{p_1'' - y_1} + r_1\left( (1-e_1)y_1 - e_{12} p_{12}^0 y_2 - \dfrac{e_1}{p_1^0} y_1^2 - \dfrac{e_{12}}{p_2^0} y_1 y_2 \right), \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{v_2 p_2' y_2}{y_2 + p_2'} - \dfrac{d_2 p_2'' y_2}{p_2'' - y_2} + r_2\left( (1-e_2)y_2 - e_{21} p_{21}^0 y_1 - \dfrac{e_2}{p_2^0} y_2^2 - \dfrac{e_{21}}{p_1^0} y_1 y_2 \right), \end{cases} \quad (1)$$

где $p_j^* < p_j < p_j^{**}$, $j = 1,2.$

Переменные $y_j = p_j - p_j^0$ означают отклонение вектора цен от состояния экономического равновесия и использованы следующие обозначения:

$p_j(t)$ – цена единицы $j$-го товара в момент времени $t$;

$p_j^0$ – равновесная цена $j$-го товара;

$q_j(t)$ – количество единиц $j$-го товара, продаваемого в момент $t$;

$q_j^0$ – равновесное количество единиц $j$-го товара по цене $p_j^0$;

$p_j^*$ – нижнее (пороговое) значение цены $j$-го товара, связанное с осуществленными затратами продавца;

$p_j^{**}$ – верхнее (потолочное) значение цены $j$-го товара, выше которого покупатели отказываются приобретать данный товар;

$p_j' = p_j^0 - p_j^*$ – излишек цены продавца;

$p_j'' = p_j^{**} - p_j^0$ – излишек потребительской цены.

Правая часть каждого из уравнений системы дифференциальных уравнений (1) представляют собой сумму трех нелинейных функций, моделирующих экономические силы соответственно производителей (продавцов), потребителей и государства. Выбор таких функций основывается на экономических законах торговли.

Коэффициенты $v_j, d_j$ и $r_j$ положительны и означают интенсивности экономических сил (*j*-го товара) соответственно для продавцов, покупателей и государства; $e_j$ – эластичность спроса по цене, $e_{ji}$ – перекрестная эластичность спроса по цене [2].

## 2. Устойчивость

В модели (1) исследуемому экономическому равновесию цен $p_1 = p_1^0$, $p_2 = p_2^0$ соответствует начало координат $y_1 = y_2 = 0$. Для установления свойств устойчивости равновесия выделим линейную и нелинейную части уравнений (1) в окрестности начала координат. Имеем:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -S_1 y_1 + R_1 y_2 + M_{11} y_1^2 - \dfrac{r_1 e_{12}}{p_2^0} y_1 y_2 - H_{21} y_1^3 + o(|\, y_1 \,|^3), \\ \dot{y}_2 = R_2 y_1 - S_2 y_2 + M_{12} y_2^2 - \dfrac{r_2 e_{21}}{p_1^0} y_1 y_2 - H_{22} y_2^3 + o(|\, y_2 \,|^3), \end{cases} \tag{2}$$

где $S_j = v_j + d_j - r_j(1 - e_j)$ – запас прочности рынка *j*-го, $o(|\, y_j \,|^3)$ – величина порядка малости выше третьего при $y_j \to 0$. Введем следующие обозначения:

$$R_j = -r_j p_{ji}^0 e_{ji}, \quad p_{ji}^0 = p_j^0 / p_i^0, \; j,i = 1,2;$$

$$H_{1j} = \frac{v_j}{p_j'} - \frac{d_j}{p_j''}, \quad M_{1j} = H_{1j} - \frac{r_j e_j}{p_j^0}, \quad H_{2j} = \frac{v_j}{p_j'^2} + \frac{d_j}{p_j''^2}, \; j = 1,2. \tag{3}$$

Модель первого приближения для уравнений (2) принимает вид системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -S_1 y_1 + R_1 y_2, \\ \dot{y}_2 = R_2 y_1 - S_2 y_2. \end{cases} \tag{4}$$

Ее характеристическое уравнение представляется квадратным трехчленом

$$\lambda^2 + \lambda(S_1 + S_2) + S_1 S_2 - R_1 R_2 = 0. \tag{5}$$

В соответствии с теоремой Рауза – Гурвица выполнение неравенств

$$S_1 + S_2 > 0; \quad S_1 S_2 - R_1 R_2 > 0, \tag{6}$$

означает, что корни уравнения (5) имеют отрицательные вещественные части. В этом случае согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению [3, с.43] нулевое решение системы (1) будет асимптотически устойчивым. Неравенства (6) равносильны соотношениям

$$S_1 > 0, \quad S_2 > 0; \quad S_1 S_2 - R_1 R_2 > 0.$$

на основании экономического смысла параметров изучаемой модели.

Из уравнения (5) и принятых обозначений (3) видно, что критический случай двух нулевых корней [6] возникает при выполнении равенств

$$v_1 + d_1 - r_1(1 - e_1) = 0, \quad v_2 + d_2 - r_2(1 - e_2) = 0, \quad e_{12} e_{21} = 0. \tag{7}$$

Другие варианты таковы, что критический случай пары чисто мнимых корней уравнения (5) невозможен, а критический случай одного нулевого корня исследован авторами в работе [4].

### 3. Критический случай двух нулевых корней

Исследуем устойчивость экономического равновесия модели (1) при выполнении предположений (7). С экономической точки зрения он характеризуется нулевыми запасами прочности каждого из двух реализуемых товаров рынка и отсутствием зависимости объемов продаж (по крайней мере, для одного из товаров) от изменения цены на другой товар.

Пусть сначала в соответствии с предположением (7) имеют место условия

$$v_1 + d_1 - r_1(1 - e_1) = v_2 + d_2 - r_2(1 - e_2) = 0; \ e_{21} = 0, \ e_{12} \neq 0. \tag{8}$$

Тогда с учетом предположения критического случая (8) будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = R_1 y_2 + M_{11} y_1^2 - \dfrac{r_1 e_{12}}{p_2^0} y_1 y_2 - H_{21} y_1^3 + o(|\, y_1\,|^3), \\ \dot{y}_2 = M_{12} y_2^2 - H_{22} y_2^3 + o(|\, y_2\,|^3), \end{cases} \tag{9}$$

Предварительно заметим, что точки фазовой плоскости системы (9), где $y_1 = 0$ определяют инвариантное множество. Поэтому если решение $y_2 = 0$ дифференциального уравнения

$$\dot{y}_2 = M_{12} y_2^2 - H_{22} y_2^3 + o(|\, y_2\,|^3) \tag{10}$$

неустойчиво, то неустойчивым будет и начало координат исходной системы (9). По этой же причине устойчивость системы (9) возможна лишь при условии устойчивости уравнения (10). Таким образом, исследование устойчивости нулевого решения системы (9) можно разделить на следующие взаимоисключающие возможные случаи.

а) Легко видеть, что при выполнении условия

$$M_{12} \neq 0 \qquad (11)$$

решение $y_2 = 0$ уравнения (10) неустойчиво. Это значит, что если имеет место соотношение (11), то начало координат системы (9) неустойчиво.

б) Так как по определению величина $H_{22}$ строго положительна, то решение $y_2 = 0$ уравнения (10) асимптотически устойчиво при выполнении условия

$$M_{12} = 0. \qquad (12)$$

Таким образом, на основании вышесказанного устойчивость исследуемой системы (9) возможна лишь при выполнении условия (12). В этом случае система (9) имеет вид уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = R_1 y_2 + M_{11} y_1^2 - \dfrac{r_1 e_{12}}{p_2^0} y_1 y_2 - H_{21} y_1^3 + o(|\, y_1\,|^3), \\ \dot{y}_2 = -H_{22} y_2^3 + o(|\, y_2\,|^3). \end{cases} \qquad (13)$$

Для функции $V(y) = \dfrac{1}{2} y_2^2$ производная по времени в силу системы (13), равная $\dot{V}(y_2) = -H_{22} y_2^4 + o(|\, y_2\,|^4)$, является знакоотрицательной в некоторой окрестности точки $y_1 = 0$ $y_2 = 0$. На множестве, где $V(y_2) = 0$ (т. е. $y_2 = 0$) система переходит в скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{y}_1 = M_{11} y_1^2 - H_{21} y_1^3 + o(|\, y_1\,|^3). \qquad (14)$$

Ясно, что при $M_{11} \neq 0$ решение $y_1 = 0$ этого уравнения неустойчиво, а значит, неустойчивым будет начало координат системы (14).

Если $M_{11}=0$, то с учетом неравенства $H_{21}>0$ имеем асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения (14). В этом случае согласно теореме 2.7 [3, с. 33] начало координат системы (9) также будет асимптотически устойчивым.

Аналогичным образом исследуется ситуация, когда вместо предположения (8) выполняется симметричное условие

$$v_1+d_1-r_1(1-e_1)=v_2+d_2-r_2(1-e_2)=0;\ e_{12}=0,\ e_{21}\neq 0$$

о наличии двух нулевых корней.

Наконец, рассмотрим ту ситуацию критического случая двух нулевых корней, когда обе перекрестные эластичности равны нулю, т. е. имеют место равенства

$$v_1+d_1-r_1(1-e_1)=v_2+d_2-r_2(1-e_2)=0;\ e_{12}=0,\ e_{21}=0.$$

В данном случае система (1) записывается в виде

$$\begin{cases}\dot{y}_1=M_{11}y_1^2-H_{21}y_1^3+o(|y_1|^3),\\ \dot{y}_2=M_{12}y_2^2-H_{22}y_2^3+o(|y_2|^3).\end{cases} \qquad (16)$$

Поскольку здесь каждое из уравнений системы не зависит от другого, то неустойчивость нулевого решения (16) будет иметь место при условии, что $|M_{11}|+|M_{12}|\neq 0$. И наоборот, если выполнено противоположное условие, а именно: $M_{11}=M_{12}=0$, то начало координат системы (16) будет асимптотически устойчивым.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи, когда система первого приближения (4) обладает парой нулевых корней. Общий результат этих исследований можно сформулировать в виде следующего утверждения.

**Теорема 1.** *Пусть для модели* (1) *запас прочности рынка каждого из товаров равен нулю и, по крайней мере, одна из перекрестных ценовых эластичностей равна нулю, т. е. выполняются равенства*

$$v_1 + d_1 = r_1(1 - e_1), \quad v_2 + d_2 = r_2(1 - e_2), \quad e_{12}e_{21} = 0.$$

*Тогда экономическое равновесие* $p_1 = p_1^0$, $p_2 = p_2^0$ *асимптотически устойчиво, если имеют место равенства*

1) $\dfrac{v_1}{(p_1')^2} + \dfrac{d_1}{(p_1'')^2} = \dfrac{r_1 e_1}{p_1^0}, \quad \dfrac{v_2}{(p')_2^2} + \dfrac{d_2}{(p_2'')^2} = \dfrac{r_2 e_2}{p_2^0},$

*и равновесие неустойчиво, если имеет место условие*

2) $\left| \dfrac{v_1}{(p_1')^2} + \dfrac{d_1}{(p_1'')^2} - \dfrac{r_1 e_1}{p_1^0} \right| + \left| \dfrac{v_2}{(p_2')^2} + \dfrac{d_2}{(p_2'')^2} - \dfrac{r_2 e_2}{p_2^0} \right| > 0.$

**Замечание 1.** В работе [3] установлено, что запас прочности товаров рынка играет положительную роль в устойчивом развитии торговых отношений. Исследованный критический случай двух нулевых корней относится к крайней ситуации, когда запасы прочности равны нулю. Поэтому здесь можно ожидать скорее неустойчивость вектора цен, чем его устойчивость (в теореме 1 это условие 2)).

Однако параллельно с этим выясняется, что и в ситуациях с ослабленными (нулевыми) запасами прочности экономическое равновесие может быть устойчивым и даже асимптотически (требование 1) в теореме 1). Это возможно тогда, когда перекрестная эластичность, по крайней мере, для одного из товаров равна нулю и при этом должен существовать определенный паритет между действиями продавцов, покупателей и государства для каждого из реализуемых товаров (два равенства в условии 1) теоремы 1). Естественно, что поскольку соответствующие условия имеют тип равенств, то отмеченный случай асимптотической устойчивости экономического равновесия достаточно редкий.

### 3.1. Постоянный объем продаж.

Известно, что рынки товаров повседневного спроса (например, недорогие товары первой необходимости) характеризуются постоянством объемов продаж, т. е. для таких рынков предполагается $q_j(p) = q_j^0,\ j = 1,2.$ В обозначениях переменных $y_j = p_j - p_j^0$ изучаемая модель с постоянным объемом продаж [5] описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -S_1 y_1 + H_{11} y_1^2 - H_{21} y_1^3 + o(|\, y_1 \,|^3), \\ \dot{y}_2 = -S_2 y_2 + H_{12} y_2^2 - H_{22} y_2^3 + o(|\, y_2 \,|^3), \end{cases} \qquad (17)$$

где запасы прочности имеют выражение $S_j = v_j + d_j - r_j,\ j = 1,2.$

Характеристическое уравнение соответствующей системы первого приближения для (17) задается равенством $\lambda^2 + \lambda(S_1 + S_2) + S_1 S_2 = 0.$ Следовательно, критический случай двух нулевых корней возникает при выполнении требований $S_1 = 0,\ S_2 = 0,$ т. е. когда $v_1 + d_1 = r_1,\ v_2 + d_2 = r_2.$

Заметим, что в модели (17) дифференциальные уравнения не зависят друг от друга, причем величины $H_{11}$ и $H_{12}$ строго положительны. Используя вышеизложенные методы исследования модели (2) можно показать, что в критическом случае двух нулевых корней равновесие $y_1 = 0,\ \ y_2 = 0$ модели (17) не может быть устойчивым.

**Теорема 2.** *Пусть для модели* (17) *с постоянными объемами продаж запас прочности рынка каждого из товаров равен нулю*: $v_1 + d_1 = r_1,\ \ v_2 + d_2 = r_2$. *Тогда экономическое равновесие* $p_1 = p_1^0,\ \ p_2 = p_2^0$ *модели* (17) *неустойчиво.*

**Замечание 2.** Формально модель с постоянным объемом продаж следует из модели (1), если эластичности спроса по цене $e_j$ и перекрестные ценовые эластичности $e_{ji}$ положить равными нулю. Поэтому утверждение теоремы 2 формальным образом следует из теоремы 1 в случае нулевой эластичности. Это обстоятельство позволяет сделать определенные выводы экономического характера. А именно, сравнение утверждений теорем 1 и 2 показывает, что положительные эластичности спроса по цене обоих товаров могут поддержать стабильность рыночных отношений даже в случае слабого (нулевого) запаса прочности рынка двух взаимодополняющих товаров.

**Библиографический список**

1. Балацкий, Е.В. Рыночное ценообразование и производственные циклы / Е.В. Балацкий // Экономика и математические методы. – 2005. – Т. 41, № 1. – С. 37–44.
2. Долан, Э.Дж. Рынок: микроэкономическая модель / Э.Дж. Долан, Д.Е. Линсдей. – Санкт-Петербург, 1992. – 496 с.
3. Калитин, Б.С. Математические модели экономики / Б. С. Калитин. – Минск : БГУ, 2004. – 182 с.
4. Калитин, Б.С. Устойчивость рынка двух взаимозаменяемых товаров / Б.С. Калитин, Е.В. Трухан // Вестник БГУ. – 2011. – Сер. 1, № 2. – С. 91–95.

5. Калитин, Б.С. Устойчивость рынка двух взаимодополняющих товаров / Б.С. Калитин, Е.В. Трухан // Сб. науч. тр. / Экономика, моделирование, прогнозирование. – Минск, 2011. – Вып. 5. – С. 213-225.
6. Малкин, И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – Москва : Наука, 1966. – 530 с.