УДК 528.221(571.1)
DOI: 10.33764/2411-1759-2019-24-2-19-34

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ НА ТЕРРИТОРИИ ЗАПАДНОЙ СИБИРИ ПО ДАННЫМ СОВРЕМЕННЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕОПОТЕНЦИАЛА

Денис Николаевич Голдобин
Сибирский государственный университет геосистем и технологий, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, инженер кафедры космической и физической геодезии, тел. (913)455-92-66, e-mail: phis.geo.sggs@gmail.com

Работа посвящена определению компонентов тензора силы тяжести как дифференциальных характеристик геометрической структуры гравитационного поля Земли. Получены формулы для вычисления компонент тензора силы тяжести и радиусов кривизны уровенной поверхности. Приведены результаты вычисления компонент тензора силы тяжести, а также гауссовой и средней кривизны внешних эквипотенциальных поверхностей по гармоническим коэффициентам глобальной модели геопотенциала (на примере модели EIGEN-6C4) на территории Западной Сибири.

Ключевые слова: кривизна уровенной поверхности, градиенты силы тяжести, сферические функции, потенциал силы тяжести, тензор-матрица, средняя кривизна, гауссова кривизна.

Введение

Фигура уровенной поверхности потенциала силы тяжести определяется уравнением

$$W(\vec{r}) = C, \tag{1}$$

где $\vec{r}$ – геоцентрический радиус-вектор положения точки во внешнем пространстве.

Различным значениям постоянной C соответствуют разные уровенные поверхности, которые заполняют внешнее пространство, нигде не пересекаясь. Одна из таких поверхностей, которая при некотором значении C наиболее близка к среднему уровню Мирового океана и проходит через нуль футштока, названа геоидом.

Введем локальную декартову систему координат (xyz) с началом в точке $P(x_0, y_0, z_0)$, где плоскость xy – касательная плоскость к уровенной поверхности в начальной точке, проходящая через эту точку, а ось z направлена по отвесной линии, тогда в окрестности точки $P(x_0, y_0, z_0)$ потенциал силы тяжести $W(P)$ можно разложить в ряд Тейлора по степеням x, y и z, который при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ имеет вид

$$W(x,y,z)=W(x_0,y_0,z_0)+(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot\begin{pmatrix}W_x\\W_y\\W_z\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{(x-x_0,y-y_0,z-z_0)}{2}\begin{pmatrix}W_{xx}&W_{xy}&W_{xz}\\W_{yx}&W_{yy}&W_{yz}\\W_{zx}&W_{zy}&W_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}. \quad (2)$$

В формуле (2) W_x, W_y, W_z – частные производные первого порядка; W_{xx}, W_{yy}, W_{zz}, W_{xy}, W_{xz}, W_{yx}, W_{yz}, W_{zx}, W_{zy} – частные производные второго порядка от потенциала силы тяжести по соответствующим координатам. Эти производные применяются при решении задач геологоразведки, высшей и прикладной геодезии, космической геодезии и инерциальной навигации. Они устанавливают связь поля силы тяжести и геометрии пространства, находящей свое отражение в свойствах матрицы-тензора

$$\begin{pmatrix}W_{xx}&W_{xy}&W_{xz}\\W_{yx}&W_{yy}&W_{yz}\\W_{zx}&W_{zy}&W_{zz}\end{pmatrix}. \quad (3)$$

Каждый из элементов матрицы (3) характеризует особенности геометрии уровенных поверхностей и силовых линий гравитационного поля и содержит необходимые детальные сведения о структуре внешнего гравитационного поля [1]. Определение элементов матрицы (3) позволяет получить истинную фигуру Земли.

В данной работе единицей измерения первых производных потенциала силы тяжести принята величина 10^{-5} м·с$^{-2}$, а для вторых – величина 10^{-9} с^2 = = 1 этвеш = 1 Э.

Теоретические основы

Отбрасывая в уравнении (2) квадратичную форму, получим уравнение касательной плоскости в точке $P(x_0,y_0,z_0)$ в виде

$$(x-x_0)W_x+(y-y_0)W_y+(z-z_0)W_z=W_P(x,y,z)-W(x_0,y_0,z_0)=C_0. \quad (4)$$

Выбирая направление местной системы (xyz) так, чтобы ось P_x была направлена на север, ось P_y – на восток, а ось P_z совпала бы с вектором силы тя-

жести g, будем иметь $W_x = W_y = W_z = g$. В этом случае уравнение (4) можно представить в виде

$$C_0 = g(z - z_0). \tag{5}$$

Благодаря выбору координатных осей имеем: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ и, учитывая, что $W_{xy} = W_{yx}$, $W_{xz} = W_{zx}$, $W_{yz} = W_{zy}$, выражение (2) можно записать в следующем виде:

$$g_z = -\frac{1}{2}\left(W_{xx}x^2 + W_{xy}xy + W_{yy}y^2\right) + \left(W_{xz}xz + W_{yz}zy\right) + \frac{1}{2}W_{zz}z^2 + \ldots \tag{6}$$

Решая это уравнение относительно z, получим уравнение уровенной поверхности в точке $P(x_0, y_0, z_0)$

$$z = -\frac{1}{2g}\left(W_{xx}x^2 + 2W_{xy}xy + W_{yy}y^2\right) + \ldots \tag{7}$$

Вторые производные W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}, в (7) являются градиентами кривизны уровенной поверхности и определяют форму этой поверхности в данной точке $P(x_0, y_0, z_0)$. Уровенные поверхности поля силы тяжести имеют сложную форму, а их кривизна различна в разных точках одной и той же поверхности и в каждой точке поверхности кривизна различна в разных направлениях так, что в трехмерном пространстве через данную точку можно провести бесконечное число сечений и каждое со своей кривизной. Причем, максимальная и минимальная кривизна всегда принадлежит перпендикулярным сечениям [2].

Кривизна нормального сечения уровенной поверхности в точке $P(x_0, y_0, z_0)$, плоскость которого составляет с плоскостью xy угол A, имеет следующий вид [3]:

$$\frac{1}{K_A} = -\frac{1}{g}\left(W_{xx}\cos^2 A + W_{xy}\sin 2A + W_{yy}\sin^2 A\right). \tag{8}$$

Для определения главных нормальных сечений, у которых кривизна $\frac{1}{K_A}$ является максимальной или минимальной, решается следующее уравнение:

$$\frac{\partial(R_A)^{-1}}{\partial A} = 0. \tag{9}$$

В результате находим

$$-W_{xx}\sin 2A_0 + 2W_{xy}\cos 2A_0 + W_{yy}\sin 2A_0 = 0.$$

Отсюда получим выражение для вычисления углов A_0 и $A_0 + \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg} 2A_0 = -\frac{2W_{xy}}{-W_{xx} + W_{yy}}. \tag{10}$$

Значение кривизны, вычисленное с помощью выражения (8) при подстановке угла A_0, имеет вид

$$\frac{1}{K_1} = -\frac{1}{g}\left(W_{xx}\cos^2 A_0 + W_{xy}\sin 2A_0 + W_{yy}\sin^2 A_0\right), \tag{11}$$

а при подстановке угла $A_0 + \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\frac{1}{K_2} = -\frac{1}{g}\left(W_{xx}\sin^2 A_0 - W_{xy}\sin 2A_0 + W_{yy}\cos^2 A_0\right). \tag{12}$$

Суммируя выражения (11) и (12), получим формулу для средней кривизны

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right) = -\frac{1}{2g}\left(W_{xx} + W_{yy}\right). \tag{13}$$

Радиус K средней кривизны уровенной поверхности в данной точке находим по формуле

$$K = -\frac{2g}{W_{xx} + W_{yy}}. \tag{14}$$

Так как для вторых производных потенциала силы тяжести имеет место следующее равенство:

$$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 2\omega^2, \tag{15}$$

то знаменатель в формуле (14) можно получить из равенства

$$\left(W_{xx} + W_{yy}\right) = 2\omega^2 - W_{zz}, \tag{16}$$

где W_{zz} – вертикальный градиент силы тяжести; ω – угловая скорость вращения Земли.

После подстановки выражения (16) в формулу (14) получим

$$K = -\frac{2g}{2\omega^2 - W_{zz}}. \tag{17}$$

Плоскость (4) представляет собой горизонтальную плоскость, касательную к уровенной поверхности в точке $P(x_0, y_0, z_0)$ и вторые производные W_{xz} и W_{yz} характеризуют изменения силы тяжести в этой плоскости по направлениям: оси P_x на север (в плоскости географического меридиана) и оси P_y – на восток (в плоскости первого вертикала). Модуль вектора полного горизонтального градиента G, который совпадает с направлением максимального изменения силы тяжести в плоскости горизонта, равен

$$G = \sqrt{W_{xz}^2 + W_{yz}^2}. \tag{18}$$

Радиусы кривизны проекции силовой линии R_x и R_y *на* плоскости *xz* и *yz* соответственно можно получить по следующим формулам:

$$R_x = \frac{g}{W_{xz}}; \quad R_y = \frac{g}{W_{yz}}. \tag{19}$$

Если в формуле (8) принять $A = 0^\circ$ и $A = 90^\circ$, то получим формулы для вычисления радиуса кривизны сечения эквипотенциальной поверхности в плоскостях географического меридиана K_M и первого вертикала K_N соответственно

$$K_M = -\frac{g}{W_{xx}}; \quad K_N = -\frac{g}{W_{yy}}. \tag{20}$$

Из курса дифференциальной геометрии [4] известно, что из комбинации минимальной и максимальной кривизны $\frac{1}{K_A}$ уровенной поверхности определяется средняя кривизна $\frac{1}{K}$ по формуле (13) и полная (гауссова) кривизна как

$$\frac{1}{K_G} = \frac{1}{K_1 K_2} = \frac{1}{g^2}\left(W_{xx}W_{yy} - W_{xy}^2\right). \tag{21}$$

Гауссова кривизна показывает, какую форму имеет уровенная поверхность в точке $P(x_0, y_0, z_0)$, является ли она локально эллиптической, гиперболической или параболической (т. е. гауссова кривизна положительна, отрицательна или

равна нулю). Если гауссова кривизна равна нулю, то уровенная поверхность может быть развернута в плоскость [5, 6].

Для измерения вторых производных гравитационного потенциала служат гравитационные вариометры и градиентометры. Основным чувствительным элементом вариометров и градиентометров служат крутильные весы, представляющие собой коромысло с равными грузами на концах, подвешенное на упругой нити. С помощью вариометров можно получать значения вторых производных $W_{xx} - W_{yy}$, W_{xy}, W_{xz}, W_{yz} с погрешностью 1–3 Э в равнинных районах и с погрешностью более 10 Э из-за неточного учета влияния топографических масс. Однако эти приборы имеют крупные размеры и требуют значительного времени для подготовки к наблюдениям (около 6 часов) и обработки измерений. С появлением в последнее десятилетие высокоточных гравиметров и сверхпроводящего гравитационного градиентометра полевое использование вариометров перестало быть актуальным.

В работе [7] приведены результаты измерений горизонтального градиента силы тяжести $W_{sz} = \dfrac{\delta g}{\Delta s}$ на пунктах Государственной фундаментальной гравиметрической сети и пунктах первого класса с помощью гравиметров ГНУ-КВ. Измерения приращения силы тяжести δg на каждой станции выполнялись между диаметрально разнесенными в горизонтальных направлениях двумя точками на постаменте на расстояние Δs в пределах от 0,435 до 0,570 м. Количество серий измерений разности δg и Δs на каждом постаменте равно четырем. Среднеквадратические значения ошибок измерения δg в среднем составили 10^{-8} м $\cdot$ с$^{-2}$.

Приведенные в табл. 1 значения горизонтальных градиентов силы тяжести, измеренные на различных станциях у поверхности Земли, отличаются от их нормальных значений. Причиной может быть сильное влияние притяжения близрасположенных аномальных масс (влияние постамента гравиметрического пункта, стен вокруг этого пункта и т. д.). Вторые производные потенциала силы тяжести обратно пропорциональны кубу расстояния от притягивающих масс, причем это влияние обычно быстро убывает с увеличением расстояния. Если увеличивать расстояние Δs между точками на каком-либо участке местности при условии, что гравитационное поле имеет спокойный характер, отсутствуют топографические массы и что отклонение от среднего градиента на этом участке не превышает 1–2 Э, то можно повысить точность определения горизонтального градиента. Но в этом случае перечисленные условия соответствуют эффекту сглаживания реального гравитационного поля, при котором ослабляется интенсивность приповерхностных аномальных масс. Аналогичный эффект возникает в случае описания гравитационного поля частичной суммой гармоник потенциала силы тяжести в виде ряда Фурье по системе сферических функций

координат – геоцентрического радиуса вектора r, широты φ и долготы λ, ограниченной степенью N:

$$W(\varphi,\lambda,r)=\frac{fM}{r}\left[1+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\left(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda+\bar{S}_{nm}\sin m\lambda\right)\bar{P}_{nm}(\sin\varphi)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\omega^2 r^2\cos^2\varphi, \qquad (22)$$

где fM – геоцентрическая гравитационная постоянная;

a_e – экваториальный радиус Земли;

ω – угловая скорость вращения Земли;

$\bar{C}_{nm}$ и $\bar{S}_{nm}$ – безразмерные нормированные гармонические коэффициенты геопотенциала;

$\bar{P}_{nm}(\sin\varphi)$ – нормированные присоединенные функции Лежандра.

Таблица 1

Результаты измерений горизонтального градиента силы тяжести

Название станции	W_{sz} 10^{-9} с$^{-2}$	Погрешность измерения W_{sz} 10^{-9} с$^{-2}$	Нормальное значение $U_{sz}=8{,}1\sin 2\varphi$ 10^{-9} с$^{-2}$	Аномальное значение $W_{sz}-U_{sz}$ 10^{-9} с$^{-2}$
Иркутск	15,0	3,4	7,8	7,2
Боровое, НСО	9,7	5,0	7,6	1,9
Якутск	4,2	2,0	6,7	-2,5
Ключи	13,4	2,8	7,6	5,8
Елизово	9,2	2,6	7,8	1,4

Количество гармоник ряда (22) характеризует разрешение модели гравитационного поля. При ограничении этого ряда степенью N его разрешающая способность будет равна $\frac{180^\circ}{N}$. Так, например, для максимальной степени $N=2\,190$ современной глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 разрешение, рассчитанное по формуле $L=\frac{\pi R}{N}$, где $R=6\,371$ – радиус Земли в километрах, будет равно 9,139 км. В работе [8] выполнены исследования точности высокостепенной глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 по независимым

наземным данным на территории Западной Сибири, в результате которых получено стандартное отклонение ускорения силы тяжести, равное 3 мГал. Таким образом, погрешность определения градиентов силы тяжести на интервале 9,139 км равна 3 000 мкГал/9,139 км = 328,3 Э. Следовательно, для повышения точности определения градиентов с помощью глобальных моделей геопотенциала необходимо увеличить интервал L, но для этого требуется уменьшить количество сферических гармоник в разложении (22), что приведет к уменьшению разрешающей способности и сглаживанию восстанавливаемого гравитационного поля. В работе [8] на графиках показана динамика изменения погрешности аппроксимации ускорения силы тяжести с изменением степени N. Так, например, ошибка ускорения силы тяжести 4 мГал достигается при степени 200, что соответствует разрешающей способности 100,1 км. Отсюда погрешность определения градиентов силы тяжести на интервале 100,1 км равна 4 000 мкГал/100,1 км = 40 Э. Выбирая степень N разложения ряда (22) и соответствующую ей погрешность аппроксимации ускорения силы тяжести, можно определить градиенты силы тяжести с погрешностью от 20–40 Э, что соответствует погрешности определения градиентов силы тяжести в горных районах и на подвижном основании [9].

В данной работе выполнено определение вторых производных потенциала силы тяжести, которые являются компонентами матрицы-тензора (3), с помощью разложения в ряд по сферическим функциям. Для этого, дифференцируя дважды ряд (22) по сферическим координатам – (r, φ, λ), получены следующие формулы:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = \frac{fM}{r^3}\left[\sum_{n=0}^{N}(n+1)(n+2)\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}\left(\bar{\mathrm{C}}_{nm}\cos m\lambda + \bar{\mathrm{S}}_{nm}\sin m\lambda\right)\bar{\mathrm{P}}_{nm}(\sin\varphi)\right] -$$

$$-\omega^2\cos^2\varphi; \qquad (23)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = \frac{fM}{r^3}\left[\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}\left(\bar{\mathrm{C}}_{nm}\cos m\lambda + \bar{\mathrm{S}}_{nm}\sin m\lambda\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{d^2\bar{\mathrm{P}}_{nm}(\sin\varphi)}{d\varphi^2} - (n+1)\bar{\mathrm{P}}_{nm}(\sin\varphi)\right)\right] - r^2\omega^2\cos^2\varphi; \qquad (24)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda^2} = \frac{fM}{r^3\cos^2\varphi}\left[\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} m^2\left(-\bar{\mathrm{C}}_{nm}\cos m\lambda - \bar{\mathrm{S}}_{nm}\sin m\lambda\right)\bar{\mathrm{P}}_{nm}(\sin\varphi)\right]; \qquad (25)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \varphi} = -\frac{fM}{r^3}\left[\sum_{n=0}^{N}(n+1)\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}\left(\overline{\mathrm{C}}_{nm}\cos m\lambda + \overline{\mathrm{S}}_{nm}\sin m\lambda\right)\left(\frac{d\overline{\mathrm{P}}_{nm}(\sin\varphi)}{d\varphi}\right)\right] -$$

$$-2r\omega^2\cos\varphi\sin\varphi; \qquad (26)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \lambda} = -\frac{fM}{r^3}\left[\sum_{n=0}^{N}(n+1)\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} m\left(-\overline{\mathrm{C}}_{nm}\sin m\lambda + \overline{\mathrm{S}}_{nm}\cos m\lambda\right)\overline{\mathrm{P}}_{nm}(\sin\varphi)\right]; \qquad (27)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \lambda} = -\frac{fM}{r^3\cos\varphi}\left[\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} m\left(-\overline{\mathrm{C}}_{nm}\cos m\lambda + \overline{\mathrm{S}}_{nm}\sin m\lambda\right)\overline{\mathrm{P}}_{nm}(\sin\varphi)\right]. \qquad (28)$$

Эксперимент

Вычисление вторых производных потенциала силы тяжести (градиентов гравитационного поля Земли) по полученным алгоритмам и составленным по ним вычислительных программам [10–13] было реализовано на тестовом участке территории Западной Сибири, которая ограничена:

– по широте от 45 до 75° северной широты;

– по долготе от 60 до 100°восточной долготы.

Расчеты для построения цифровых карт производились в узлах регулярной сетки 5 × 5′ относительно эллипсоида WGS-84.

Для вычисления использованы гармонические коэффициенты глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 до 2190 степени [14–15].

Результаты вычисления по формулам (23)–(28) компонент тензора градиентов силы тяжести на территории Западной Сибири представлены на рис. 1–3 в виде картосхем векторов горизонтальной составляющей градиентов G и разности радиусов кривизны эллипсоида и радиусов гауссовой и средней кривизны уровенной поверхности соответственно. Модуль вектора горизонтального градиента силы тяжести G определяется по аномальным значениям вторых производных силы тяжести, вычисленным по формулам (26) и (27)

$$G = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \varphi} - 8{,}11\cdot 10^{-9}\cdot\sin 2\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \lambda}\right)^2}. \qquad (29)$$

Направление этого вектора определяется как

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{\partial^2 W}{\partial r \partial \lambda}}{\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial r \partial \varphi} - 8{,}11\cdot 10^{-9}\cdot\sin 2\varphi\right)}. \qquad (30)$$

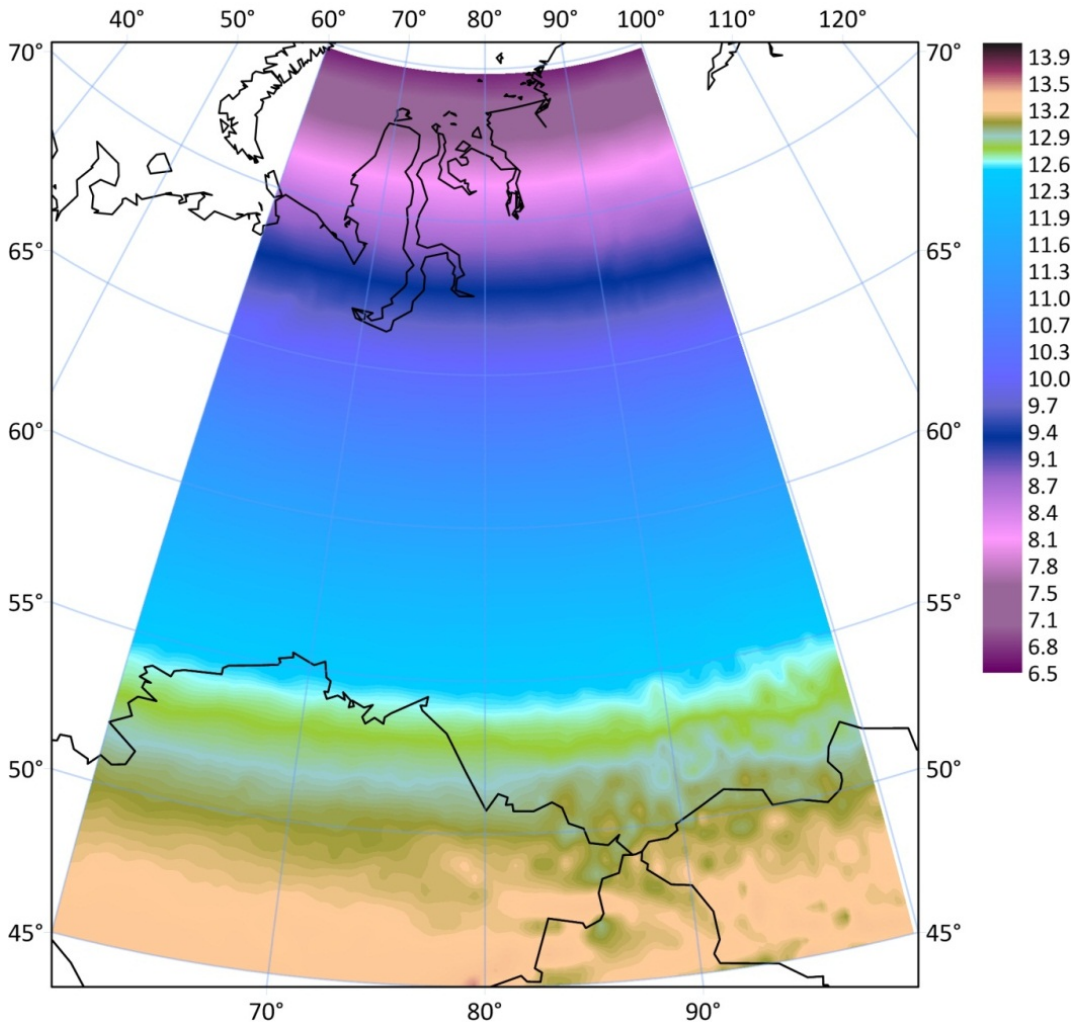


Рис. 1. Модуль вектора (в этвеш) горизонтального градиента силы тяжести

Подставляя в формулу (21) вторые производные, вычисленные по формулам (24), (25), (28), получим выражение для вычисления разности радиусов гауссовой кривизны уровенной поверхности потенциала силы тяжести W и эллипсоида WGS-84 в следующем виде:

$$\Delta K_G = \sqrt{\frac{g^2}{\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \lambda}\right)^2}} - \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2 B}, \qquad (31)$$

где a – большая полуось эллипсоида; e – первый эксцентрисет эллипсоида; B – геодезическая широта; g – сглаженное значение силы тяжести для трапеции размером $5 \times 5'$.

Результаты вычислений значений ΔK_G по формуле (31) для территории Западной Сибири представлены на рис. 2.

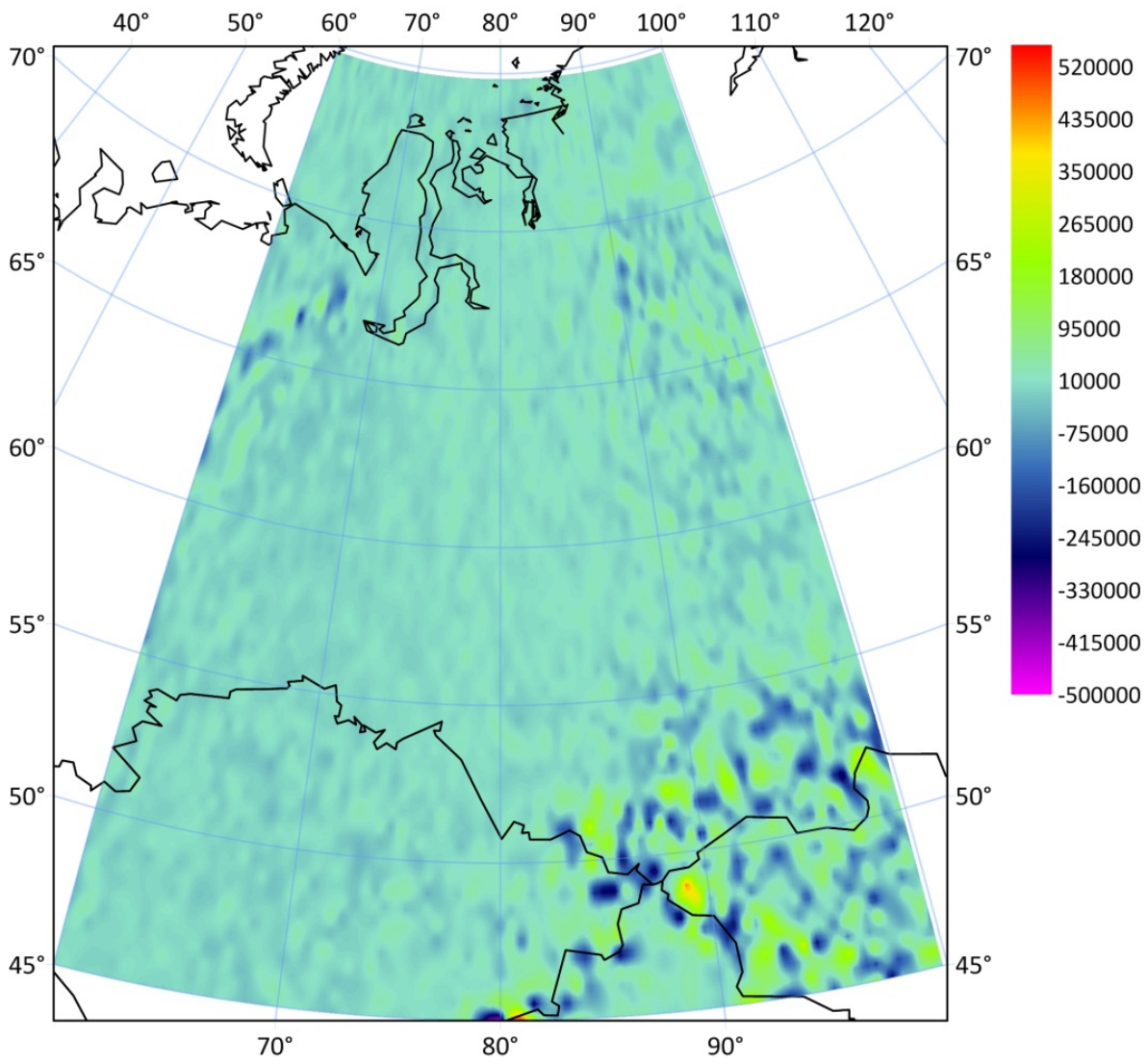


Рис. 2. Разности радиусов гауссовой кривизны (в метрах) уровенной поверхности потенциала силы тяжести и эллипсоида WGS-84

Подставляя в уравнение (17) результаты вычисления второй производной потенциала силы тяжести по формуле (23), получим выражение для вычисления разности радиусов средней кривизны уровенной поверхности потенциала силы тяжести W и эллипсоида WGS-84 в виде

$$\Delta K = -\frac{2g}{\omega^2 - \dfrac{\partial^2 W}{\partial r^2}} - \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2 B}. \qquad (32)$$

Результаты вычислений значений ΔK по формуле (32) для территории Западной Сибири представлены на рис. 3. На этом рисунке, кроме ΔK, приведе-

ны высоты геоида, вычисленного по данным глобальной модели геопотенциала EIGEN-6C4 с учетом гармоник до степени 2190 [16].

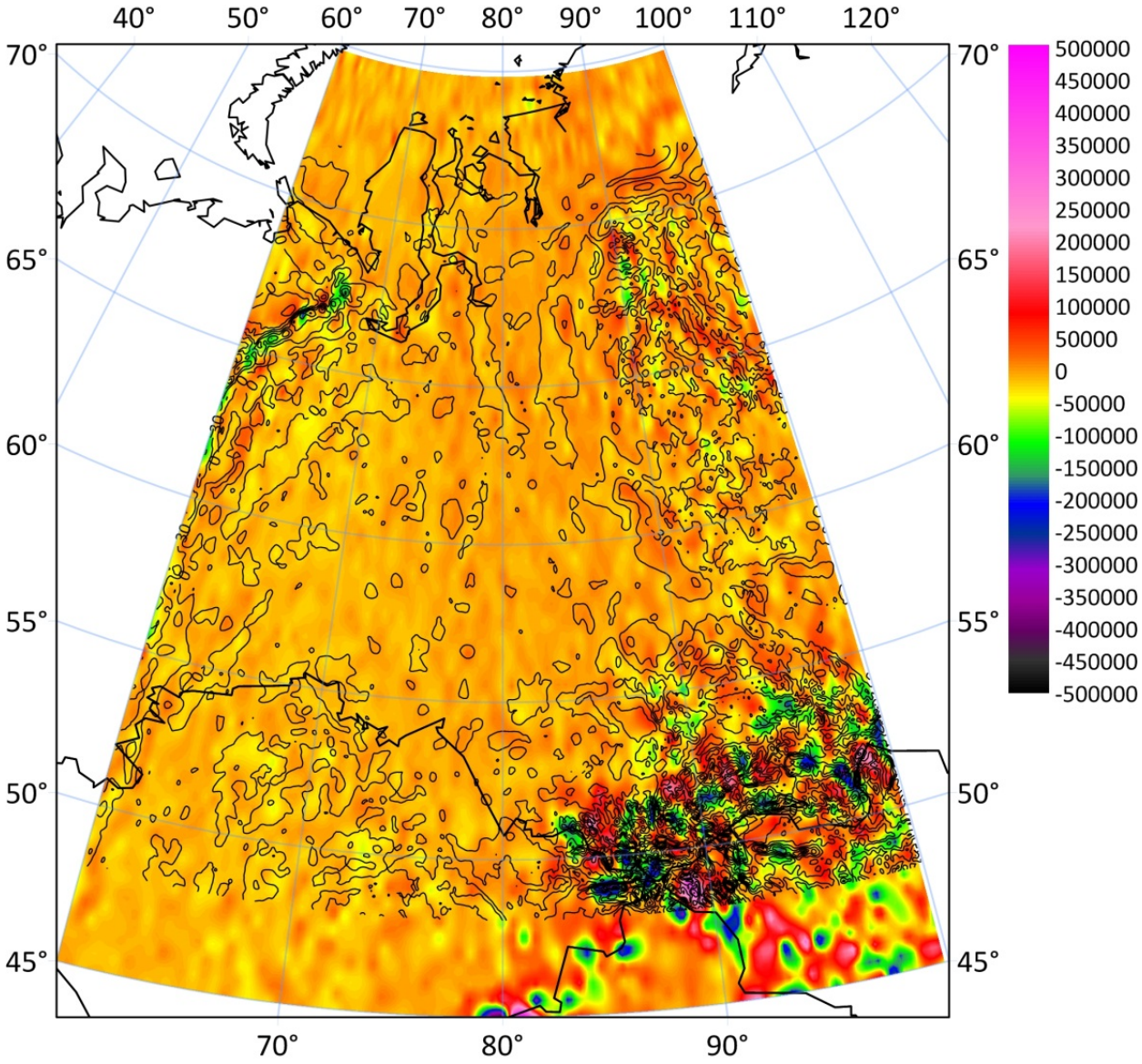


Рис. 3. Разности радиусов средней кривизны (в метрах) уровенной поверхности потенциала силы тяжести W и эллипсоида WGS-84 на территории Западной Сибири и высоты геоида (в горизонталях)

Приведенные на рис. 3 разности ΔK имеют максимальные значения там, где ондуляции уровенной поверхности минимальны и наоборот. Характер изолиний сильно отличается от ондуляций уровенной поверхности. Найденные значения ΔK имеют прямое приложение при решении локальных задач прикладной геодезии, когда за отсчетную поверхность для обработки местных геодезических сетей выбрана плоскость или эллипсоид. На рис. 4 приведена гистограмма распределения разности ΔK.

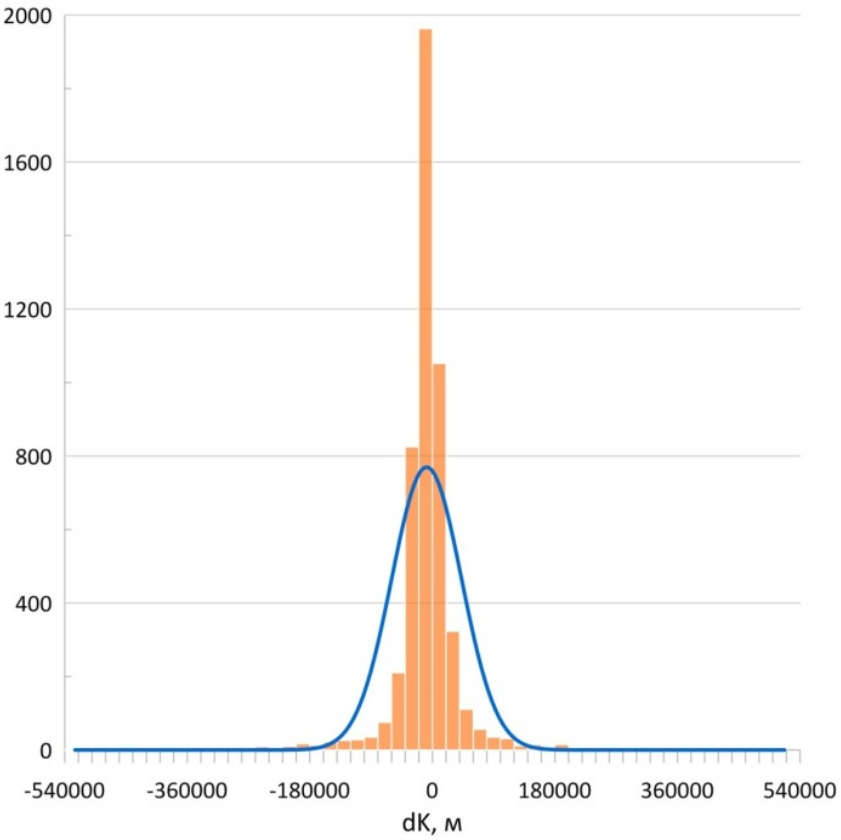


Рис. 4. Гистограмма распределения разности ΔK

Статистические характеристики распределения вычисленных по формуле (32) значений разности радиусов средней кривизны уровенной поверхности потенциала силы тяжести W и эллипсоида WGS-84 на территории Западной Сибири приведены в табл. 2

Таблица 2

Статистические характеристики распределения вычисленных по формуле (32) значений разности радиусов средней кривизны уровенной поверхности потенциала силы тяжести W и эллипсоида WGS-84 на территории Западной Сибири

Параметр	Значение, м
Минимум	–525 012
Максимум	517 238
Диапазон	1 042 251
Среднее	–8 504
Стандартное отклонение	51 183
Асимметрия	–0,495
Эксцесс	21,014

Заключение

В ходе проведения исследований для различных компонентов тензора поля силы тяжести на поверхности Земли получены уравнения в виде рядов Фурье по системе сферических функций. По данным современной глобальной модели гравитационного поля Земли EIGEN-6C4 с помощью этих уравнений определены компоненты тензора на территории Западной Сибири, которые использовались для вычисления радиусов средней и гауссовой кривизны уровенной поверхности потенциала силы тяжести.

В геодезии, при геометрических построениях на сфере или эллипсоиде важным является знание гауссовой и средней кривизны на данном участке геоида. В работе вычислены отклонения радиусов кривизны геоида от кривизны общеземного эллипсоида WGS-84. Построены картосхемы и выполнен статистический анализ распределения отклонений радиуса средней кривизны. Максимальные отклонения наблюдаются в горных районах и могут достигать 535 км, минимальные − на равнинах при среднем отклонении на территории Западной Сибири 8 км.

Компоненты тензора силы тяжести, полученные в данной работе с помощью глобальных моделей гравитационного поля Земли, могут быть использованы для решения задач спутниковой гравиметрии с целью изучения специфических деталей внутреннего строения и эволюции недр.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кащеев Р. А. Современные методы спутниковой гравиметрии. – Казань : Казан. ун-т, 2015. – 45 с.

2. Выгодский М. Я. Дифференциальная геометрия. – М., Л. : ГИТТЛ, 1949. – 512 с.

3. Гравиразведка: Справочник геофизика / Под ред. Е. А. Мудрецовой, К. Е. Веселова. – 2-е изд. – М. : Недра, 1990. – 607 с.

4. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. – М., Л. : ГИТТЛ, 2004. – 428 с.

5. Dill J. C., Rogers D. F. Color Graphics and Ship Hull Surface Curvature // Proc. of the Fourth International Conference on Computer Applications in the Automation of Shipyard Operation and Ship Design (ICCAS 82). – North Holland, 1982. – P. 197–205.

6. Кононюк А. Е. Дискретная математика (Поверхности). – В 12-и кн. Кн. 6. ч. 1. – Киев : Освіта України, 2013. – 564 с.

7. Кузьмин В. И., Голушко А. В. Результаты измерения градиентов ускорения силы тяжести на пунктах государственной гравиметрической сети // Вестник СГГА. – 1996. – Вып. 1. – С. 21–26 с.

8. Исследование современных глобальных моделей гравитационного поля Земли : монография / В. Ф. Канушин, А. П. Карпик, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин, А. М. Косарева, Н. С. Косарев. – Новосибирск : СГУГиТ, 2015. – 270 с.

9. Торге В. Гравиметрия / Пер. с англ. – М. : Мир, 1999. – 429 с.

10. Голдобин Д. Н., Канушин В. Ф., Ганагина И. Г. «GeoPot» : свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2015660860 от 12.10.2015 в реестре программ для ЭВМ.

11. Голдобин Д. Н. «Geo_PlaneGraviGrad» : свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2018665784 от 11.12.2018 в реестре программ для ЭВМ.

12. Голдобин Д. Н., Канушин В. Ф. «Geo_VAGRD» : свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2017614543 от 19.04.2017 в реестре программ для ЭВМ.

13. GeoUnd / Д. Н. Голдобин, В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Н. С. Косарев : свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2015661197 от 20.10.2015 в реестре программ для ЭВМ.

14. ICGEM – International Center for Global Gravity Field Models [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://icgem.gfzpotsdam.de/ICGEM/ICGEM.html.

15. EIGEN-6C4: The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse [Электронный ресурс] / C. Förste et al. – Режим доступа : http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/documents/Foerste-et-al-EIGEN-6C4.pdf.

16. Сравнение спутниковых моделей проекта GOCE с различными наборами независимых наземных гравиметрических данных / В. Ф. Канушин, И. Г. Ганагина, Д. Н. Голдобин, Е. М. Мазурова, А. М. Косарева, Н. С. Косарев // Вестник СГГА. – 2014. – № 3 (27). – С. 21–35.

Получено 23.04.2019

© *Д. Н. Голдобин, 2019*

DETERMINATION OF GEOMETRIC STRUCTURE OF GRAVITAION FIELD ON THE TERRITORY OF WESTERN SIBERIA ON THE DATA OF MODERN GLOBAL GEOPOTENTIAL MODELS

Denis N. Goldobin
Siberian State University of Geosystems and Technologies, 10, Plakhotnogo St., Novosibirsk, 630108, Russia, Engineer, Department of Space and Physical Geodesy, phone: (913)455-92-66, e-mail: phis.geo.sggs@gmail.com

The work is dedicated to determination gravitation tensor components as differential characteristics of the Earth's gravitation field geometric structure. There were obtained the formulae for calculation of gravitation tensor components and initial level curvature radii. There were driven the calculation results of gravitation tensor components, and also Gaussian and average curvature of the external equipotential surfaces on harmonic coefficients of geopotential global model (on the example model EIGEN-6C4) on the territory of Western Siberia.

Key words: initial level curvature, gravitation gradients, spherical functions, gravitation potential, tensor matrix, average curvature, Gaussian curvature.

REFERENCES

1. Kascheev, R. A. (2015). *Sovremennye metody sputnikovoj gravimetrii [Modern methods of satellite gravimetry Lecture notes]*. – Kazan: Kazan University Publ, 45 p. [in Russian].

2. Vygodsky, M. Ya. (1949). *Differencial'naya geometriya [Differential geometry]*. Moscow, Leningrad: Hittl Publ., 512 p. [in Russian].

3. Mudretsova, E. A., &, Veselova K. E. (Eds.). (1990). *Gravirazvedka: Spravochnik geofizika [Gravity survey: Handbook of geophysics]* (2nd ed.). Moscow: Nedra Publ., 607 p. [in Russian].

4. Rashevsky, P. K. (2004). *Kurs differencial'noj geometrii [Course differential geometry]*. Moscow, Leningrad: GITTL Publ., 428 p. [in Russian].

5. Dill, J. C., & Rogers, D. F. (1982). Color Graphics and Ship Hull Surface Curvature. *Proceedings of Optiration and Ship Design, ICCAS 82* (pp. 197–205). North Holland.

6. Kononyuk, A. E. (2013). *Diskretnaya matematika: Kn. 6, ch. 1, Poverhnosti [Discrete mathematics: Book 6, Part 1, Surfaces]*. Kiev: Osvita Ukraïni Publ., 564 p. [in Russian].

7. Kuzmin, V. I., & Golushko, A. V. (1996). The results of measurement of the gradients of the acceleration of gravity force on the points of the state gravimetric network. *Vestnik SGGA [Vestnik SSGA]*, Issue 1, 146 p. [in Russian].

8. Kanusin, V. F., Karpik, A. P., Ganagina, I. G., Goldobin, D. N., Kosareva, A. M., & Kosarev, N. S. (2015). *Issledovanie sovremennyh global'nyh modelej gravitacionnogo polya Zemli [The study of modern global models of the gravitational field of the Earth]*. Novosibirsk: SSUGT Publ., 270 p. [in Russian].

9. Torge, V. (1999). *Gravimetriya [Gravimetry]*. Moscow: Mir Publ., 429 p. [in Russian].

10. Goldobin, D. N., Kanushin, V. F., & Ganagina, I. G. "GeoPot". Certificate of state registration of computer programs No. 2015660860 of October 12, 2015 in the register of computer programs [in Russian].

11. Goldobin, D. N. "Geo_PlaneGraviGrad". Certificate of state registration of computer programs No. 2018665784 of December 11, 2018 in the registry of computer programs [in Russian].

12. Goldobin, D. N., & Kanushin, V. F. "Geo_VAGRD". Certificate of state registration of computer programs No. 2017614543 of April 04, 2017 in the register of computer programs [in Russian].

13. Goldobin, D. N., Kanushin, V. F., Ganagina, I. G. & Kosarev, N. S. "GeoUnd". Certificate of state registration of computer programs No. 2015661197 of October 10, 2015 in the register of computer programs [in Russian].

14. ICGEM – International Center for Global Gravity Field Models. (n. d.). Retrieved from http://icgem.gfzpotsdam.de/ICGEM/ICGEM.html.

15. Förste, C. et al. (n. d.). EIGEN-6C4: The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. Retrieved from http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/documents/Foerste-et-al-EIGEN-6C4.pdf.

16. Kanushin, V. F., Ganagina, I. G., Goldobin, D. N., Mazurova, E. M., Kosareva, A. M., & Kosarev, N. S. (2014). Comparison of satellite models of the GOCE project with various sets of independent ground-based gravimetric data. *Vestnik SGGA [Vestnik SSGA]*, 3(27), 21–35 [in Russian].

Received 23.04.2019

© D. N. Goldobin, 2019