

УДК 532

**ОТРЫВНОЕ ОБТЕКАНИЕ ОСТРОЙ КРОМКИ
ПО СХЕМЕ С ВОЗВРАТНОЙ СТРУЙКОЙ***Л. А. Кожуро*

Получено решение для отрывного обтекания острой кромки несжимаемой вязкой жидкостью по схеме Эфроса в предельном случае бесконечно большой скорости на свободной линии тока. Скорость изменения импульса возвратной струйки при этом остается конечной и равна подсосывающей силе, действующей на острую кромку при безотрывном обтекании. В направлении, перпендикулярном направлению действия подсосывающей силы, на острую кромку действует сосредоточенная сила конечной величины.

Рассмотрено предельное состояние течения при обтекании пластинки под углом атаки со срывом потока на передней кромке, когда величина скорости на свободной линии тока стремится к бесконечности.

Схема отрывного обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью с возвратной струйкой, уходящей на второй лист римановой поверхности, широко используется для описания течений с развитой и частичной кавитацией [1], а также применяется в качестве модели срывного обтекания тел вязкой жидкостью [2—4]. В последнем случае возвратная струйка моделирует потери импульса потока, происходящие за счет действия сил вязкости. При стремлении давления в каверне к давлению в невозмущенном потоке эта схема имеет своим пределом течение Кирхгофа.

Локальное отрывное течение по схеме Эфроса впервые было рассмотрено в работе [5] для моделирования частичной кавитации на одной из щек клина, обтекаемого по схеме Кирхгофа. Однако исследован только случай, когда давление в каверне равно давлению в невозмущенном потоке. В работах [2, 6] схема с возвратной струйкой использована для описания течения в дискретном струйном усилителе. Срывное обтекание по схеме Эфроса передней кромки плоской пластинки под углом атаки рассмотрено в работе [7].

В данной работе рассмотрено струйное отрывное обтекание острой кромки несжимаемой вязкой жидкостью в предельном случае стремления к нулю размеров области отрыва. Принята схема течения со струйкой, обтекающей с тыльной стороны острую кромку и уходящей на второй лист римановой поверхности.

1. Рассмотрим отрывное струйное обтекание острой кромки с нулевым углом заострения при стремлении к бесконечности величины скорости на свободной поверхности тока. Локальное течение в масштабе размеров срывной области изображено на рис. 1, а в плоскости

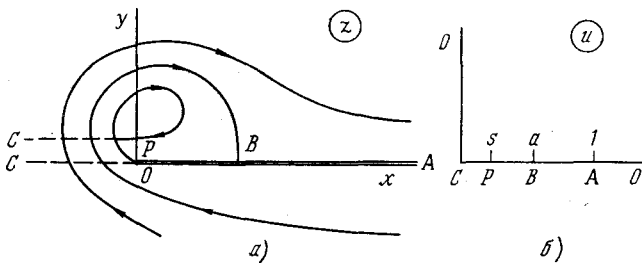


Рис. 1

комплексного переменного $z = x + iy$. Здесь OA — полубесконечная пластинка. На бесконечности скорость обращается в нуль.

В качестве области изменения параметра u выберем верхний правый квадрант. Положение точек O, A, B, C на границе квадранта показано на рис. 1, б. Функция dW/dz (W — комплексный потенциал течения) имеет нули первого порядка в точках A и B и поэтому представляется в виде

$$\frac{dW}{dz} = -v_0 \frac{(u-a)(u-1)}{(u+a)(u+1)}, \quad (1)$$

где v_0 — скорость на свободной поверхности тока.

Функция dW/du имеет один нуль первого порядка в точке B и два полюса: первого порядка в точке C и второго — в точке A . Поэтому

$$\frac{dW}{du} = M \frac{u^2 - a^2}{u(u^2 - 1)^2}; \quad (2)$$

M — действительная постоянная.

Для определения неизвестных параметров a и M используем условие однозначности функции $z(u)$ и найдем толщину возвратной струйки на бесконечности δ :

$$\oint_A \frac{dz}{du} du = 0, \quad i\delta = \frac{1}{4} \oint_C \frac{dz}{du} du.$$

После нахождения вычетов функции

$$\frac{dz}{du} = -\frac{M}{v_0} \frac{(u+a)^2}{u(u+1)(u-1)^2}$$

в точках A и B получаем

$$M = \frac{2\delta v_0}{\pi a^2}, \quad a = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}.$$

Определим форму свободной линии тока

$$z(u) = \int_{\infty}^u \frac{dz}{du} du = \frac{2\delta}{\pi a^2} \left[\frac{(a+1)^2}{4(u-1)^2} + \frac{a^2}{u-1} - a^2 \ln \frac{u+1}{u} \right]. \quad (3)$$

Полагая $u=i/t$, получаем параметрическое представление формы каверны:

$$x(t) = \frac{\delta}{\pi} \left[\ln \frac{1}{1+t^2} + \frac{2(1+a)}{a} - \frac{2(5a+3)}{a(1+t^2)} + \frac{(1+a)^2}{a^2(1+t^2)^2} \right],$$

$$y(t) = \frac{2\delta}{\pi} \operatorname{arctg} t + \frac{(1+a)\delta t}{2\pi a^2(1+t^2)} \left[1 + 5a - \frac{2(1+a)}{1+t^2} \right],$$

$$0 \leq t \leq \infty.$$

Форма свободной линии тока показана на рис. 2. Здесь принято $\delta=1$.

Применяя теорему об изменении количества движения к массе жидкости, заключенной между окружностью L достаточно большого радиуса с центром в точке O (рис. 1, a), свободной поверхностью, поверхностью пластинки и прямолинейным сечением, проведенным в бесконечности поперек струйки, получим

$$\oint_L (p - p_\infty) \mathbf{n} dl + \rho \oint_L \mathbf{v}_n \mathbf{v} dl = i \rho \delta v_0^2 + j \left[N - \int_{-\infty}^0 (p - p_0) dx \right],$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к контуру L , ρ — плотность жидкости, p_0 — давление на свободной линии тока, N — сила, действующая в направлении оси y на часть пластинки, заключенную в контуре L , а i и j — единичные векторы в направлении осей x и y соответственно.

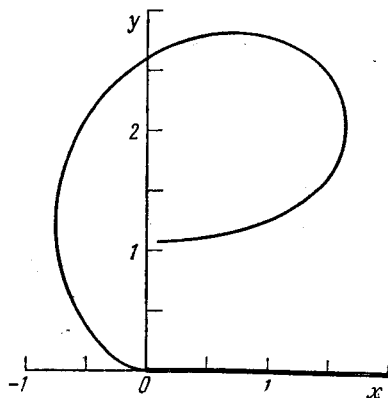


Рис. 2

Левая часть этого равенства может быть представлена следующим образом:

$$i \frac{\rho}{2} \oint_L \frac{d\overline{W}}{dz} dW + \rho \oint_L \frac{d\overline{W}}{dz} d\psi = \frac{i\rho}{2} \oint_L \frac{d\overline{W}}{dz} dW.$$

Устремляя радиус окружности L к бесконечности и вычисляя последний интеграл в плоскости переменного u , получим

$$\frac{i\rho}{2} \oint_L \frac{d\overline{W}}{dz} dW = + \frac{i\rho}{4} \oint_A \frac{d\overline{W}}{dz} \frac{d\overline{W}}{du} du = \rho \delta v_0^2.$$

Следовательно, сила, действующая на поверхность $OABPC$ (см. рис. 1), равна нулю, а сила, поворачивающая поток при обтекании острой кромки и совпадающая по величине с подсасывающей силой при безотрывном обтекании, равна изменению импульса возвратной струйки в единицу времени.

Определим силу, действующую на полубесконечную пластинку $OABP$ (рис. 1):

$$N = \int_{-\infty}^0 (p - p_0) dx = \frac{\rho}{2} \int_0^s \left(v_0^2 - \frac{dW}{dz} \frac{d\bar{W}}{dz} \right) \frac{dz}{du} du =$$

$$= \frac{\rho \delta v_0^2 (1+a)}{\pi a^2} \left[\frac{s(1+a)}{(1-s^2)^2} + \frac{s(3a-1)}{2(1-s^2)} + \frac{3a-1}{4} \ln \frac{1+s}{1-s} \right].$$

Неизвестную величину s находим из условия $z(s)=0$, используя выражение (3). Приближенно получаем $s \approx 0,00744$, $N \approx 0,046 \rho \delta v_0^2$.

Таким образом, при стремлении величины скорости на свободной поверхности к бесконечности (размер срывной области и толщина возвратной струйки при этом стремятся к нулю) изменение импульса возвратной струйки в единицу времени $\rho \delta v_0^2$ остается конечным и в пределе равно величине подсасывающей силы, действующей на острую кромку при ее безотрывном обтекании; при этом на острую кромку действует сосредоточенная «сила сопротивления», перпендикулярная направлению подсасывающей силы.

В качестве примера, подтверждающего эти результаты, рассмотрим обтекание пластинки под произвольным углом атаки α со срывом потока на передней кромке. На задней кромке выполняется условие Чаплыгина—Жуковского о конечности скорости. Эта задача рассмотрена в

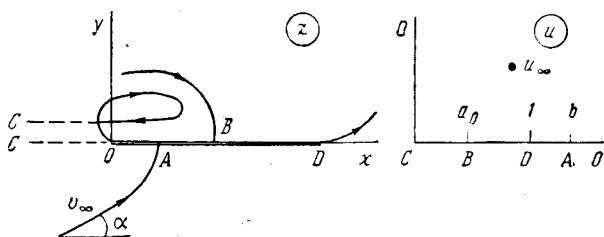


Рис. 3

работе [7]. Плоскости комплексных переменных z и u показаны на рис. 3. В этом случае имеем

$$\frac{dW}{dz} = - \frac{(u - a_0)(u - b)}{(u + a_0)(u + b)}, \quad (4)$$

$$\frac{dW}{du} = M_0 \frac{(u^2 - a_0^2)(u^2 - b^2)(u^2 - 1)}{u(u^2 - u_\infty^2)(u^2 - \bar{u}_\infty^2)}. \quad (5)$$

Здесь $u_\infty = c + id$ — точка на плоскости параметрического переменного u , соответствующая бесконечно удаленной точке плоскости z . Скорость на свободной линии тока принята равной единице.

Для определения трех из четырех неизвестных параметров a_0 , b , c , d в работе [7] получена система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{d}{c+a_0} + \operatorname{arctg} \frac{d}{c+b} - \operatorname{arctg} \frac{d}{c-a_0} - \operatorname{arctg} \frac{d}{c-b}, \\ \frac{c+a_0}{(c+a_0)^2+d^2} + \frac{c+b}{(c+b)^2+d^2} + \frac{c(c^2+d^2-1)}{(c^2-d^2-1)^2+4c^2d^2} - \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{1}{2c} &= 0, \\ \frac{1}{(c+a_0)^2+d^2} + \frac{1}{(c+b)^2+d^2} + \frac{c^2+d^2+1}{(c^2-d^2-1)^2+4c^2d^2} - \frac{1}{c^2+d^2} - \frac{1}{2d^2} &= 0. \end{aligned} \right\} (6)$$

Заметим, что выражения (4), (5) переходят соответственно в (1), (2) при $u_\infty=1$ и $b=1$. Поэтому можно предположить, что при стремлении размеров срывной зоны к нулю значения параметров c и b приближаются к единице, а величина параметра d стремится к нулю. Действительно, при $d \rightarrow 0$ система уравнений (6) имеет следующее решение:

$$c = 1 - \frac{1-3a}{2(1+a)} d^2 + O(d^3), \quad b = 1 + \frac{d}{\operatorname{tg} \alpha} + O(d^2),$$

$$a_0 = \frac{2\sqrt{2}-1}{7} + O(d) = a + O(d).$$

Определяя величину постоянной M_0 из условия равенства единице длины пластинки, находим

$$\frac{1}{M_0} = \int_1^\infty \frac{(t+a_0)^2(t+b)^2(t^2-1)}{t[(t^2-c^2+d^2)^2+4c^2d^2]^2} dt = \frac{(1+a)^2}{4d^2} + O\left(\frac{1}{d}\right).$$

Используя результаты работы [7], коэффициент нормальной силы, действующей на поверхность $OADBC$, можно представить в виде:

$$c_N = \frac{\pi M_0}{v_\infty} (n \cos \alpha + m \sin \alpha).$$

Здесь

$$v_\infty = \sqrt{\frac{[(c-a_0)^2+d^2][(c-b)^2+d^2]}{[(c+a_0)^2+d^2][(c+b)^2+d^2]}} = \frac{1-a}{2(1+a)\sin \alpha} d + O(d^2),$$

$$m + in = \frac{2(a_0+b)(\bar{u}_\infty^2-1)(\bar{u}_\infty^2-a_0b)}{\bar{u}_\infty^3(u_\infty^2-\bar{u}_\infty^2)^2} = i \frac{(1-a)^2}{4d} + O(1).$$

Итак, получаем

$$c_N = 2\pi \sin \alpha \cos \alpha + O(d),$$

что при $d=0$ совпадает со значением коэффициента нормальной силы при безотрывном обтекании передней кромки.

Толщина возвратной струйки на бесконечности

$$\delta = -\frac{i}{4} \oint_C \frac{dz}{d\zeta} d\bar{u}^* = \frac{2\pi a^2}{(1+a)^2} d^2 + O(d^3).$$

Отношение импульса возвратной струйки к величине подсосывающей силы при безотрывном обтекании равно

$$\frac{\rho d v_0^2}{\pi \rho v_\infty^2 \sin^2 \alpha} = \frac{8a^2}{(1-a)^2} + O(d) = 1 + O(d).$$

2. В рассматриваемом ниже случае, как и при моделировании с помощью течений со свободными границами отрывного обтекания с размерами области отрыва порядка размеров тела, имеется некоторый произвол, связанный с характером особенности при замыкании срывной зоны. Для устранения этой неопределенности необходимы дополнительные условия. В качестве такого условия в случае отрывного обтекания острой кромки по схеме с возвратной струйкой естественно принять условие непрерывности давления на поверхности тела при переходе через острую кромку. Этому условию удовлетворяет схема течения, представленная на рис. 4, а. Здесь возвратная струйка, уходящая на второй лист римановой поверхности, обтекает острую кромку с тыльной стороны.

С другой стороны, как известно [1], в случае глобального отрыва схемы течения с различными особенностями в области замыкания зоны отрыва дают очень близкие результаты. Аналогичная ситуация, оказывается, имеет место и при моделировании локального отрыва: рассмотренный ниже случай течения в основной области практически не отличается от изученного в п. 1.

Течение в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ представлено на рис. 4, а. Отобразим течение на первый квадрант плоскости

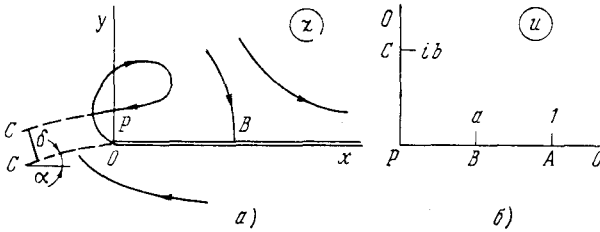


Рис. 4

вспомогательного переменного u . Соответствие точек показано на рис. 4, б. Анализ особенностей производной комплексного потенциала W по переменной u и комплексно-сопряженной скорости dW/dz позволяет представить эти функции в плоскости переменного u в следующем виде:

$$\frac{dW}{dz} = - \frac{(u-a)(u-1)}{(u+a)(u+1)}; \quad \frac{dW}{du} = M \frac{u(u^2-a^2)}{(u^2+b^2)(u^2-1)^2}.$$

Здесь a , b и M — действительные постоянные, а скорость на свободных линиях тока принята равной единице.

Для определения неизвестных параметров имеем следующие условия:

— однозначности функции $z(u)$

$$\oint_A \frac{dz}{du} du = 0, \quad (7)$$

— соответствия точки схода свободной линии тока P острой кромке пластинки

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dz}{du} du = 0; \quad (8)$$

— условие равенства единице толщины возвратной струйки

$$|\delta| = \left| \frac{1}{2} \oint_c \frac{dz}{du} du \right| = 1. \quad (9)$$

Угол наклона струйки α (рис. 4, a) можно определить двояким путем:

$$\alpha = \arg \delta - \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \arg \left(\frac{dW}{dz} \Big|_{u=ib} \right) - \pi.$$

Функцию dz/du удобно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{M} \frac{dz}{du} &= \frac{u(u+a)^2}{(u^2+b^2)(u+1)(u-1)^3} = -\frac{p+iq}{u-ib} - \frac{p-iq}{u+ib} + \\ &+ \frac{1}{2(1+b^2)} \left[\frac{2(a-b^2)^2 - 2b^2(1+a)^2}{(1+b^2)^2} - \frac{(1-a)^2}{4} \right] \frac{1}{u-1} + \\ &+ \frac{1}{1+b^2} \left[1 + 2a + \frac{(1-a)^2}{4} - \frac{(1+a)^2}{1+b^2} \right] \frac{1}{(u-1)^2} + \\ &+ \frac{(1+a)^2}{2(1+b^2)} \frac{1}{(u-1)^3} + \frac{(1+a)^2}{8(1+b^2)} \frac{1}{u+1}; \\ p &= \frac{(a-b^2)^2 - b^2(1+a)^2}{2(1+b^2)^3}; \quad q = \frac{b(1+a)(a-b^2)}{(1+b^2)^3}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Определив вычет этой функции в точке $u=ib$ из условия (9), находим

$$M = \frac{2(1+b^2)^2}{\pi(a^2+b^2)}.$$

Интегралы в соотношениях (7), (8) легко вычисляются с помощью выражения (10) и приводят к системе уравнений для определения параметров a и b :

$$\left. \begin{aligned} 8(a-b^2)^2 - 8b^2(1+a)^2 - (1-a)^2(1+b^2)^2 &= 0; \\ (1+a) \left(1 - \frac{1+a}{1+b^2} \right) \left(1 - \frac{\pi b}{1+b^2} \right) - \frac{(1-a)^2}{8} \ln b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Эта система уравнений имеет два решения: $a=0,26147$; $b=0,00912$ и $a=0,76065$; $b=0,35596$. Анализ картины течения показывает, что физический смысл имеет только первое решение. Ему соответствует угол наклона струи

$$\alpha = \arctg \frac{2b(1+a)(a-b^2)}{(a-b^2)^2 - b^2(1+a)^2} = 5,04^\circ.$$

Для определения формы свободных линий тока вычислим интеграл $\int_{-\infty}^u (dz/du) du$ и положим $u=i/t$, где $t \in [0, \infty]$. Получим параметрическое представление

$$x(t) = \frac{2(1+b^2)}{\pi(a^2+b^2)} \left[\frac{(1+a)^2}{4} \frac{t^2(t^2-1)}{(1+t^2)^2} - \frac{kt^2}{1+t^2} - \frac{(1-a)^2}{16} \ln \left| \frac{1+t^2}{1-b^2t^2} \right| - n(t) \right];$$

$$y(t) = \frac{2(1+b^2)}{\pi(a^2+b^2)} \left[\frac{(1+a)^2}{2} \frac{t^3}{(1+t^2)^2} - \frac{kt}{1+t^2} - \frac{b(1+a)(a-b^2)}{(1+b^2)^2} \ln \left| \frac{1+tb}{1-tb} \right| + m(t) \right];$$

$$n(t) = \begin{cases} \frac{\pi b(1+a)(a-b^2)}{(1+b^2)^2}, & t > \frac{1}{b}; \\ 0, & t < \frac{1}{b}; \end{cases}$$

$$m(t) = \begin{cases} -\frac{(1-a)^2}{16} \operatorname{arctg} \frac{2t}{t^2-1}, & t > \frac{1}{b}; \\ -\frac{(1-a)^2}{16} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{2t} \right); & t < \frac{1}{b}; \end{cases}$$

$$k = 1 + 2a + \frac{(1-a)^2}{4} - \frac{(1+a)^2}{1+b^2}.$$

Форма свободных линий тока показана на рис. 5. Пунктирной линией представлена полученная в п. 1 линия тока, которая соответствует

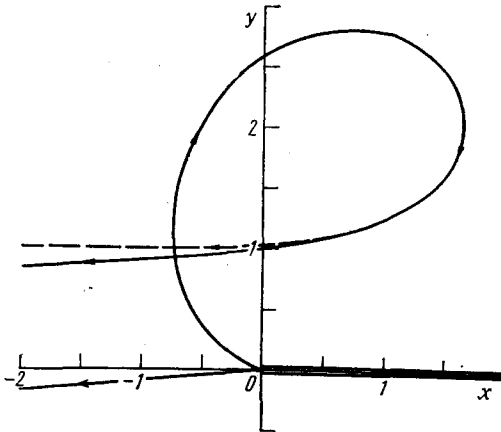


Рис. 5

струйке, уходящей на второй лист римановой поверхности вдоль тыльной поверхности пластинки. Как видно, эти кривые практически совпадают. Это объясняется тем фактом, что величина $b^2 \approx 8 \cdot 10^{-5}$ мала по сравнению с единицей и с величиной параметра $a \approx 0,26$, а рассмотренная схема течения переходит в схему течения, принятую в п. 1 при $b \rightarrow 0$. Отметим, что значениям параметра $0 < b < 0,00912$ соответствуют случаи течения с положением точки P (рис. 4) схода возвратной струйки на отрицательной части оси x .

С помощью теоремы количества движения нетрудно убедиться, что в данном случае на пластинку действует нормальная сила, равная

8,8% от величины потока импульса возвратной струйки, а величина под-сасывающей силы при безотрывном обтекании острой кромки составляет 99,6% от величины потока импульса возвратной струйки.

Автор выражает благодарность Г. И. Таганову, по инициативе которого выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.
2. Tu Yih-O, Cohen H. A theoretical model for separation in the fluid jet amplifier. — Journal of Research and Development. IBM. 1963, vol. 7, N 4.
3. Таганов Г. И. К теории стационарных срывных зон. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
4. Таганов Г. И. Модель происхождения циркуляции у крыла бесконечного размаха с острой задней кромкой при больших числах Рейнольдса. — АН СССР. Сектор механики неоднородных сред. Препринт № 5, 1980.
5. Cox A. D., Clayden W. A. Cavitating flow about a wedge at incidence. — Journal of Fluid Mechanics, 1958, vol. 3, pt. 6.
6. Cohen H. Hydrodynamic models for the fluid jet amplifier. — В кн.: Приложение теории функций в механике сплошной среды. Труды Международ. симпозиума в Тбилиси 17—23 сентября 1963 г., т. 2. — М.: Наука, 1965.
7. Кузнецов А. В., Терентьев А. Г. Об одной схеме обтекания пластинки с частичной кавитацией. Изв. вузов, Математика, № 11, 1967.

*Рукопись поступила 15/Х 1982 г.
Переработанный вариант поступил 16/VII 1984 г.*

8,8% от величины потока импульса возвратной струйки, а величина под-
сасывающей силы при безотрывном обтекании острой кромки состав-
ляет 99,6% от величины потока импульса возвратной струйки.

Автор выражает благодарность Г. И. Таганову, по инициативе ко-
торого выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.
2. Tu Yih-O, Cohen H. A theoretical model for separation in the fluid jet amplifier. — Journal of Research and Development. IBM. 1963, vol. 7, N 4.
3. Таганов Г. И. К теории стационарных срывных зон. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
4. Таганов Г. И. Модель происхождения циркуляции у крыла бесконечного размаха с острой задней кромкой при больших числах Рейнольдса. — АН СССР. Сектор механики неоднородных сред. Препринт № 5, 1980.
5. Cox A. D., Clayden W. A. Cavitating flow about a wedge at incidence. — Journal of Fluid Mechanics, 1958, vol. 3, pt. 6.
6. Cohen H. Hydrodynamic models for the fluid jet amplifier. — В кн.: Приложение теории функций в механике сплошной среды. Труды Международ. симпозиума в Тбилиси 17—23 сентября 1963 г., т. 2. — М.: Наука, 1965.
7. Кузнецов А. В., Терентьев А. Г. Об одной схеме обтекания пластинки с частичной кавитацией. Изв. вузов, Математика, № 11, 1967.

*Рукопись поступила 15/X 1982 г.
Переработанный вариант поступил 16/VII 1984 г.*