DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.3
УДК 517.53:517.977
ББК 22.161.5

МЕТОД ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В РЕШЕНИИ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Александр Сергеевич Игнатенко

Старший преподаватель кафедры теории функций,
Кубанский государственный университет
alexandr.ignatenko@gmail.com
ул. Ставропольская, 149, 350040 г. Краснодар, Российская Федерация

Борис Ефимович Левицкий

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций,
Кубанский государственный университет
bel@kubsu.ru
ул. Ставропольская, 149, 350040 г. Краснодар, Российская Федерация

Аннотация. В работе приводится полное решение вариационной задачи об отыскании поверхности вращения минимальной площади в специальной метрике, возникшей при изучении поведения модуля семейства поверхностей, огибающих препятствия в сферическом кольце. Установлены свойства одного класса гиперэллиптических интегралов, определяющих оптимальные траектории вариационной задачи.

Ключевые слова: минимальные поверхности, поверхности вращения, метод оптимальных управлений, оптимальные траектории, гиперэллиптический интеграл.

1. Введение. Постановка вариационной задачи

В работе приводится доказательство анонсированных в [1] результатов решения вариационной задачи, возникшей при изучении p-модуля семейства поверхностей, отделяющих граничные компоненты кольца при переходе к его подсемейству, состоящему из поверхностей, огибающих принадлежащее кольцу препятствие (континуум).

Рассмотрим семейство плоских кусочно-гладких кривых γ, заданных параметрическим уравнением $z(t) = e^{\rho(t)+i\varphi(t)}$, $t \in [t_0, t_1]$, лежащих в замкнутом множестве $\overline{B_r} = \{z : r \leq |z| \leq r(1+\delta), \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]\}$, $(0 < \varphi_0 < \varphi_1 \leq \pi)$ и соединяющих точку $z(t_0) = r(1+\delta)e^{i\varphi_0}$ с точкой $z(t_1) = r(1+\delta_1)e^{i\varphi_1}$, $0 \leq \delta_1 \leq \delta$.

Площадь поверхности в n-мерном евклидовом пространстве R^n, образованной вращением кривой γ вокруг полярной оси, вычисленная в метрике $\frac{1}{|x|^{n-1}}$, $x \in R^n$, $n \geq 3$, выражается формулой

$$S(\gamma) = (n-1)\omega_{n-1} \int_{t_0}^{t_1} \sin^{n-2} \varphi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\rho'(t))^2} dt, \tag{1}$$

где ω_n — объем n-мерного шара единичного радиуса.

Задача состоит в отыскании точной нижней грани функционала $S(\gamma)$ на описанном классе кривых при естественном условии, что рассматриваются лишь кривые, для которых в точках дифференцируемости $\varphi^{'}(t) \geq 0$ и $\rho^{'}(t) \leq 0$.

2. Формулировка задачи на языке оптимальных уравнений

Используя терминологию и обозначения, применяемые в [2], сформулируем эквивалентную задачу оптимального управления при ограниченных фазовых координатах.

Пусть в замкнутом подмножестве

$$\overline{B_r} = \{x = (x^1, x^2) : \varphi_0 \leq x^1 \leq \varphi_1, \ln r \leq x^2 \leq \ln r(1+\delta)\} \tag{2}$$

двумерного евклидова пространства X заданы точки $x_0 = (\varphi_0, \ln r(1+\delta))$ и $x_1 = (\varphi_1, \ln r(1+\delta_1))$, $0 < \varphi_0 < \varphi_1 \leq \pi$. Граница прямоугольника $\overline{B_r}$ состоит из отрезков: $P_\nu = \{x \in X : x^1 = \varphi_\nu, \ln r \leq x^2 \ln r(1+\delta)\}$, $\nu = 0, 1$, $P_2 = \{x \in X : \varphi_0 \leq x^1 \leq \varphi_1, x^2 = \ln r\}$ и $P_3 = \{x \in X : \varphi_0 \leq x^1 \leq \varphi_1, x^2 = \ln r(1+\delta)\}$.

Зададим кусочно-непрерывную функцию

$$g(x) = \begin{cases} \varphi_0 - x^1 & \text{в окрестности } P_0; \\ x^1 - \varphi_1, & \text{в окрестности } P_1; \\ \ln r - x^2, & \text{в окрестности } P_2; \\ x^2 - \ln r(1+\delta), & \text{в окрестности } P_3. \end{cases} \tag{3}$$

Заметим, что в окрестности границы множество $\overline{B_r}$ может быть задано неравенством $g(x) \leq 0$.

В области управления U, состоящей из кусочно-непрерывных, кусочно-гладких вектор-функций $u = (u^1, u^2)$, определенных на отрезке $[t_0, t_1]$ и таких, что $q_r(u) \leq 0$, где

$$q_r(u) = \begin{cases} -u^1, & \text{в окрестности } u^1 = 0, \\ u^2, & \text{в окрестности } u_2 = 0, \end{cases} \tag{4}$$

требуется найти (оптимальное) управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1 вдоль (оптимальной) траектории, лежащей в $\overline{B_r}$ и определенной системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = u^1 \\ \dfrac{dx^2}{dt} = u^2 \end{cases} \tag{5}$$

так, что функционал

$$x^0 = \int_{t_0}^{t^1} f^0(x,u)dt, \tag{6}$$

где $f^0(x,u) = \sin^{n-2} x^1 \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}$ принимает наименьшее значение.

Условимся о следующих обозначениях. Область возможных значений (φ_0, φ_1) разобьем на четыре подмножества:
$D_1 = \{(\varphi_0, \varphi_1) : 0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, \varphi_0 < \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}\}$,
$D_2 = \{(\varphi_0, \varphi_1) : 0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \varphi_1 \leq \pi - \varphi_0\}$,
$D_3 = \{(\varphi_0, \varphi_1) : 0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}, \pi - \varphi_0 < \varphi_1 \leq \pi\}$,
$D_4 = \{(\varphi_0, \varphi_1) : \frac{\pi}{2} \leq \varphi_0 < \pi, \varphi_0 < \varphi_1 \leq \pi\}$.

Положим

$$H(t,a) = \frac{a}{\sqrt{\sin^{2(n-2)} t - a^2}}, \tag{7}$$

$$h_\nu(\varphi_0, \varphi_1) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sin^{n-2} \varphi_\nu}{\sqrt{\sin^{2(n-2)} t - \sin^{2(n-2)} \varphi_\nu}} dt, \nu = 0, 1, \tag{8}$$

$$h(\varphi_0, \varphi_1) = \begin{cases} h_0(\varphi_0, \varphi_1), & \text{если } (\varphi_0, \varphi_1) \in D_1 \cup D_2; \\ h_1(\varphi_0, \varphi_1), & \text{если } (\varphi_0, \varphi_1) \in D_3 \text{ или } (\varphi_0, \varphi_1) \in D_4, \end{cases} \tag{9}$$

$$h(a, \varphi_0, \varphi_1) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{a}{\sqrt{\sin^{2(n-2)} t - a^2}} dt, \tag{10}$$

$$h(\varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n-2} \varphi_0}{\sqrt{\sin^{2(n-2)} t - \sin^{2(n-2)} \varphi_0}} dt. \tag{11}$$

Функции $h_\nu(\varphi_0, \varphi_1)$, $\nu = 0, 1$ рассматриваются в областях, определенных в (9), так как подкоренное выражение $\sin^{2(n-2)} t - \sin^{2(n-2)} \varphi_\nu$ в них принимает неотрицательные значения, и несобственные интегралы сходятся.

Отметим некоторые полезные в дальнейшем свойства специальных функций, определенных равенствами (8)–(11).

Лемма 1. *Имеют место следующие соотношения и свойства:*

1. Для любого $\varphi_0 \in (0, \pi)$

$$h_1(\varphi_0, \varphi_1) = \begin{cases} 2h(\pi - \varphi_1) - h_0(\pi - \varphi_1, \varphi_0), & \text{если } \varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ h_0(\pi - \varphi_1, \pi - \varphi_0), & \text{если } \varphi_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases} \tag{12}$$

2. Если $0 < \varphi_0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, то

$$\lim_{\varphi_0 \to 0+} h_0(\varphi_0, \varphi_1) = \lim_{\varphi_0 \to \varphi_1 - 0} h_0(\varphi_0, \varphi_1) = 0 \tag{13}$$

и

$$h^*(\varphi_1) = \sup_{\varphi_0} h_0(\varphi_0, \varphi_1) = h_0(\varphi_0^*, \varphi_1), \tag{14}$$

где $\varphi_0^* = \varphi_0^*(\varphi_1)$ является корнем уравнения

$$\int_{\varphi_0^*}^{\varphi_1} \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{\sin^{2(n-2)} t - \sin^{2(n-2)} \varphi_0^*}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\sqrt{\sin^{2(n-2)} \varphi_1 - \sin^{2(n-2)} \varphi_0^*}}. \tag{15}$$

3. $h(\varphi_0)$ возрастает на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ и

$$h^*(\frac{\pi}{2}) = \sup_{\varphi_0} h(\varphi_0) = \Delta_n = \frac{\pi}{2\sqrt{n-2}}. \tag{16}$$

4. $h_1(\varphi_0, \varphi_1)$ убывает как функция φ_1 на интервале $\varphi_1 \in (\pi - \varphi_0, \pi)$ при фиксированном $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, причем

$$\tilde{h}(\varphi_0) = \sup_{\varphi_1} h_1(\varphi_0, \varphi_1) = \begin{cases} 2h(\varphi_0), & \text{если } \varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ h^*(\pi - \varphi_0), & \text{если } \varphi_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases} \tag{17}$$

5. Функция $h(a, \varphi_0, \varphi_1)$ монотонно возрастает по переменной a на промежутке $(0, \min(\sin^{n-2}\varphi_0, \sin^{n-2}\varphi_1))$, причем $\sup\limits_a h(a) = h(\varphi_0, \varphi_1)$.

Доказательство. Первое свойство следует из симметричности значений функции $H(t, \sin^{n-2}\alpha)$ для $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Для изучения поведения функции $h_0(\varphi_0, \varphi_1)$ осуществим в интеграле (8) замену переменной по формуле $y = \frac{\sin t}{\sin \varphi_0}$. Полагая $b = b(\varphi_0) = \frac{1}{\sin \varphi_0}$, получаем

$$h_0(\varphi_0, \varphi_1) = \tilde{h}(b, \varphi_1) = \int_1^{b \sin \varphi_1} \frac{dy}{\sqrt{(y^{2(n-2)} - 1)(b^2 - y^2)}}. \tag{18}$$

В частности, $h(\varphi_0) = \tilde{h}(b, \frac{\pi}{2}) = \tilde{h}(b)$.

Еще одна замена переменной $y = 1 + (b \sin \varphi_1 - 1)\sin^2 \varphi$ позволяет представить эту функцию в виде собственного интеграла от непрерывно дифференцируемой по параметру b функции

$$\tilde{H}(\psi, b, \varphi_1) = \frac{2\sqrt{b \sin \varphi_1 - 1}\cos \psi \left(\sum\limits_{k=1}^{2(n-2)} C_{2(n-2)}^k (b \sin \varphi_1 - 1)^{k-1} \sin^{2(k-1)} \psi \right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\cos^2 \psi \left((b^2 - 1) + (b-1)\sin^2 \psi + 1 - \sin \varphi_1\right) + \cos^2 \varphi_1\right)^{\frac{1}{2}}} .$$

Поскольку $\lim\limits_{\varphi_0 \to 0+} h_0(\varphi_0, \varphi_1) = 0$ и

$$\lim_{\varphi_0 \to \varphi_1 - 0} h_0(\varphi_0, \varphi_1) = \lim_{b \to \frac{1}{\sin \varphi_1}} \tilde{h}(b, \varphi_1) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{b \to \frac{1}{\sin \varphi_1}} \tilde{H}(\psi, b, \varphi_1) d\psi = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_1 < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{n-2}}, & \text{если } \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

то при $\varphi_1 < \frac{\pi}{2}$ непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{h}(b, \varphi_1)$ достигает своего максимума в точке $b^* = b^*(\varphi_1) \in (0, \varphi_1)$, для которой $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial b}(b^*, \varphi_1) = 0$, то есть b^* — корень уравнения

$$\int_1^{b \sin \varphi_1} \frac{b^2 dy}{\sqrt{y^{2(n-2)} - 1}\,(b^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{tg \varphi_1}{\sqrt{(b \sin \varphi_1)^{2(n-2)} - 1}} . \tag{19}$$

Отсюда следует, что $\sup\limits_{\varphi_0} h_0(\varphi_0,\varphi_1) = h_0(\varphi_0^*,\varphi_1) = h^*(\varphi_1)$, где φ_0^* является корнем уравнения (15). Далее, так как $\tilde{h}'(b) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial b}(\psi, b, \frac{\pi}{2}) d\psi < 0$, то $\tilde{h}(b)$ убывает, а значит $h(\varphi_0)$ возрастает на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$. Для $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\varphi_1 \in (\pi - \varphi_0, \pi)$, учитывая $2\int\limits_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} H(t, \sin^{n-2}\varphi_1)dt \equiv 2h(\sin^{n-2}\varphi_1, \varphi_0, \frac{\pi}{2})$, имеем

$$h_1(\varphi_0,\varphi_1) = 2\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} H(t, \sin^{n-2}\varphi_1)dt + h_0(\pi - \varphi_1, \varphi_0) = 2h(\pi - \varphi_1) - h_0(\pi - \varphi_1, \varphi_0).$$

Из того, что $\frac{\partial h_1}{\partial \varphi_1}(\varphi_0,\varphi_1) < 0$ и $\lim\limits_{\varphi_1 \to \pi - \varphi_0} h_1(\varphi_0,\varphi_1) = 2h(\varphi_0)$ вытекают свойства 3 и 4. Свойство 5 доказывается аналогично.

Замечание 4. Функция $h_0(\varphi_0,\varphi_1) = \tilde{h}(b,\varphi_1) = \int_1^{b\sin\varphi_1} \frac{dy}{\sqrt{(y^{2(n-2)}-1)(b^2-y^2)}}$ представляет собой класс гиперэллиптических интегралов, определяющих оптимальные траектории вариационной задачи.

3. Решение вариационной задачи

Дадим полное описание оптимальных траекторий рассматриваемой задачи. Определим
$\Delta_1(\delta,\varphi_0,\varphi_1) = (1+\delta)e^{-h(\varphi_0,\varphi_1)} - 1$;
$\Delta_1(\delta,\varphi_0) = (1+\delta)e^{-\tilde{h}(\varphi_0)} - 1$;
$\Delta(\varphi_0,\varphi_1) = e^{h(\varphi_0,\varphi_1)} - 1$;
$\Delta(\varphi_0) = e^{\tilde{h}(\varphi_0)} - 1$.

Теорема 1. *В задаче оптимального управления (2)–(6) оптимальными могут быть лишь следующие траектории:*

1. Граничная траектория γ_0, состоящая из отрезков
$\{(x^1,x^2) : \varphi_0 \le x^1 \le \varphi_1; x^2 = \ln r(1+\delta)\}$ *и*
$\{(x^1,x^2) : x^1 = \varphi_1; \ln r(1+\delta_1) \le x^2 \le \ln r(1+\delta)\}$.

2. При $\delta_1 \in [0, \Delta_1(\delta,\varphi_0,\varphi_1))$ имеем:

2.1 в случае $(\varphi_0,\varphi_1) \in D_1 \cup D_2$ оптимальной «внутренней» может быть лишь траектория γ_1, состоящая из кривой $\gamma_1(\varphi_0,\varphi_1)$:

$$\begin{cases} x^2(t) = \int_t^{\varphi_1} H(t, \sin^{n-2}\varphi_0)dt + \ln r(1+\delta_1), \\ x^1(t) = t \in [\varphi_0, \varphi_1] \end{cases} \tag{20}$$

и отрезка

$$\{(x^1,x^2) : x^1 = \varphi_0; \ln r(1+\delta_1) + h_0(\varphi_0,\varphi_1) \le x^2 \le \ln r(1+\delta)\}; \tag{21}$$

2.2 в частности, если $\varphi_1 = \pi - \varphi_0$, то оптимальной может быть любая траектория $\tilde{\gamma}_1$, состоящая из кривой $\tilde{\gamma}_1(\varphi_0, \delta', \delta_1')$:

$$\begin{cases} x^2(t) = \int_t^{\pi-\varphi_0} H(t, \sin^{n-2}\varphi_0)dt + \ln r(1+\delta_1'), \\ x^1(t) = t \in [\varphi_0, \pi - \varphi_0] \end{cases} \tag{22}$$

и двух отрезков

$$\begin{gathered}\{(x^1,x^2): x^1=\varphi_0; \ln r(1+\delta')\le x^2\le \ln r(1+\delta)\},\\ \{(x^1,x^2): x^1=\pi-\varphi_0; \ln r(1+\delta_1)\le x^2\le \ln r(1+\delta_1')\},\end{gathered} \tag{23}$$

где $\delta_1\le\delta_1'<\delta'\le\delta$ *связаны соотношением*

$$\ln\frac{1+\delta'}{1+\delta_1'}=2h(\varphi_0); \tag{24}$$

2.3 в случае $(\varphi_0,\varphi_1)\in D_3$ *или* $(\varphi_0,\varphi_1)\in D_4$ *оптимальной «внутренней» может быть лишь траектория* γ_2*, состоящая из кривой* $\gamma_2(\varphi_0,\varphi_1)$*:*

$$\begin{cases} x^2(t)=\int_t^{\varphi_1} H(t,\sin^{n-2}\varphi_1)dt+\ln r(1+\Delta_1(\delta,\varphi_0,\varphi_1)),\\ x^1(t)=t\in[\varphi_0,\varphi_1]\end{cases} \tag{25}$$

и отрезка

$$\{(x^1,x^2): x^1=\varphi_1; \ln r(1+\delta_1)\le x^2\le \ln r(1+\Delta_1(\delta,\varphi_0,\varphi_1))\}. \tag{26}$$

3. При $\delta_1\ge\max(0,\Delta_1(\delta,\varphi_0,\varphi_1))$ *имеем:*

3.1 в случае $\delta_1>0$ *оптимальной «внутренней» может быть лишь траектория* $\gamma_3(\varphi_0,\varphi_1)$*:*

$$\begin{cases} x^2(t)=\int_t^{\varphi_1} H(t,a)dt+\ln r(1+\delta_1),\\ x^1(t)=t\in[\varphi_0,\varphi_1],\end{cases} \tag{27}$$

где a *является единственным корнем уравнения*

$$\ln\frac{1+\delta}{1+\delta_1}=h(a,\varphi_0,\varphi_1); \tag{28}$$

3.2 в случае $\delta_1=0$ *оптимальной «внутренней» может быть лишь траектория* $\tilde\gamma_3$*, состоящая из кривой* $\tilde\gamma_3(\varphi_0)$*:*

$$\begin{cases} x^2(t)=\int_t^{\varphi_1'} H(t,\sin^{n-2}\varphi_1')dt+\ln r,\\ x^1(t)=t\in[\varphi_0,\varphi_1'],\end{cases} \tag{29}$$

где φ_1' *является принадлежащим промежутку* (φ_0,φ_1) *корнем уравнения*

$$\ln(1+\delta)=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1'} H(t,\sin^{n-2}\varphi_1')dt, \tag{30}$$

и отрезка $\{(x^1,x^2): \varphi_1'\le x^1\le\varphi_1; x^2=\ln r\}$.

Доказательство. В силу принципа максимума Л.С. Понтрягина для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ на участке $t\in[\tau_0,\tau_1]$ целиком, кроме концов $x_0'=(\varphi_0,\ln r(1+\delta'))$, $x_1'=(\varphi_1',\ln r(1+\delta_1'))$, лежащем в открытом множестве B_r, необходимо существование ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t))$, такой что

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1}{dt}=\frac{\partial f_0}{\partial x^1}=(n-2)\sin^{n-3}x^1\cos x^1\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}\\ \frac{\partial\psi_2}{dt}=0\end{cases} \tag{31}$$

и функция

$$K(\psi, x, u) = -f^0(x, u) + \psi_1 u^1 + \psi_2 u^2 \qquad (32)$$

достигает в точке $u(t)$ максимума, причем

$$K(\psi(t), x(t), u(t)) = 0. \qquad (33)$$

Таким образом, если $u(t)$ — оптимальное управление, то

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial u^1} = -\frac{u^1 \sin^{n-2} x^1}{\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}} + \psi_1 = 0, \\ \frac{\partial K}{\partial u^2} = -\frac{u^2 \sin^{n-2} x^1}{\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}} + \psi_2 = 0, \end{cases} \qquad (34)$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{u^1 \sin^{n-2} x^1}{\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}}, \\ \psi_2 = \frac{u^2 \sin^{n-2} x^1}{\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2}} = c, \end{cases} \qquad (35)$$

причем $\operatorname{sign}(c) = \operatorname{sign}(u^2)$.

Замечая, что

$$\psi_1 = \begin{cases} \frac{u^1}{u^2} c, & \text{если } c \neq 0, \\ \operatorname{sign}(u^1) \sin^{n-2} x^1, & \text{если } c = 0, \end{cases}$$

в силу (35) находим, что либо $u^2 = 0$ (если $c = 0$), либо (если $c \neq 0$) $u^2 \neq 0$ и

$$\frac{|u^1|}{u^2} = \frac{1}{c}\sqrt{\sin^{2(n-2)} x^1 - c^2}. \qquad (36)$$

В первом случае $x^2 = \mathrm{const}$, то есть для $t \in [\tau_0, \tau_1]$ $x^2(t) = \ln r(1+\delta') = \ln r(1+\delta'_1)$ и $\delta' = \delta'_1$.

Во втором случае либо $u^1 = 0$ и тогда $-c = \sin^{n-2} \varphi_0 \equiv \sin^{n-2} x^1$, $\varphi'_1 = \varphi_0$, либо (если $u^1 \neq 0$) $c = -a < 0$ и

$$\frac{dx^2}{dx^1} = H(x^1, a). \qquad (37)$$

Это означает, что оптимальная траектория может быть задана в явном виде $x^2 = x^2(x^1)$ при любом допустимом управлении u^1, то есть в этом случае можно полагать $u^1 = 1$ и $x^1(t) = t$, где $t \in [\tau_0, \tau_1]$, $\tau_0 = \varphi_0 < \tau_1 = \varphi'_1 \leq \pi$. Тогда на этом участке (оптимальная) траектория, соответствующая управлению $u = (1, -H(t, a))$, имеет вид

$$\begin{cases} x^2(t) = \int_t^{\varphi'_1} H(t, a) dt + \ln r(1 + \delta'_1), \\ x^1(t) = t \in [\varphi_0, \varphi'_1], \end{cases} \qquad (38)$$

где значение a определяется из условия

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi'_1} H(t, a) dt = \ln \frac{1 + \delta'}{1 + \delta'_1}. \qquad (39)$$

Из (38) и (39) следует, что ни один из кусков оптимальных траекторий, лежащих внутри B_r, не может начинаться и заканчиваться на одном и том же отрезке границы.

Для проверки условий скачка в точке стыка $t = \tau_0 = \varphi_0$ заметим, что $\mathrm{grad}(g(x)) = (-1,0)$ в окрестности отрезка P_0, $\mathrm{grad}(q_r(u)) = (-1,0)$ в окрестности управления $u^1 = 0$ и $p(x,u) = (\mathrm{grad}(g(x)), u) = -u^1$ в окрестности отрезка P_0, причем $p(x,u) \equiv 0$ на P_0.

В соответствии с граничным принципом максимума [2] существует непрерывная вектор-функция $\psi = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ и кусочно-непрерывная кусочно-гладкая функция $\lambda(t)$ $(\tau_0 \le t \le t_0)$ такие, что для $f^0(x,u) = -\sin^{n-2}\varphi_0 \cdot u^2$ имеем

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial x^1} + \lambda(t)\frac{\partial p(x,u)}{\partial x^1} = 0, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = 0, \end{cases}$$

и функция (32) достигает в точке $u = (0, u^2)$ условного максимума. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} \psi_1 = -\lambda - \nu, \\ \sin^{n-2}\varphi_0 + \psi_2 = 0, \end{cases}$$

причем $\sin^{n-2}\varphi_0 \cdot u^2(t) + \psi_2(t) \cdot u^2(t) = 0$.

Таким образом, $\psi_2(t) = -\sin^{n-2}\varphi_0$.

Поскольку вектор $\psi(\tau_0) \neq 0$ и касается границы P_0 в точке $x(\tau_0)$, то

$$(\psi(\tau_0), \mathrm{grad}(g(x(\tau_0)))) = -(\lambda + \nu) = 0,$$

а значит $\psi_1 = 0$. Так как оптимальная траектория на P_0 определяется однозначно и представляет собой отрезок $\{(x^1, x^2) : x^1 = \varphi_0, \ln r(1+\delta') \le x^2 \le \ln r(1+\delta)\}$, то оптимальным является любое управление, соответствующее его допустимой параметризации, например, $u^2(t) = -1$, $x^2(t) = -t + c_0$, где $c_0 = \varphi_0 + \ln r(1+\delta')$ и $t_0 = \varphi_0 - \ln\frac{1+\delta}{1+\delta'}$.

Условия скачка в точке стыка $t = \varphi_0$ состоят в выполнении одного из равенств [2]:

$$\psi^+(\varphi_0) = \psi^-(\varphi_0) \tag{40}$$

или

$$\psi^-(\varphi_0) + \mu\,\mathrm{grad}(g(x(\varphi_0))) = 0, \mu \neq 0. \tag{41}$$

Если на участке $[\tau_0, \tau_1] = [\varphi_0, \varphi_1']$ оптимальное управление $u(t) = (1,0)$, то из (35) следует, что $\psi_1^+(\varphi_0) = \sin^{n-2}\varphi_0$, $\psi_2^+(\varphi_0) = 0$, и условие (40) имеет вид $\sin^{n-2}\varphi_0 = 0$, то есть не выполняется, если $0 < \varphi_0 < \pi$.

Условие (41) записывается в виде

$$\begin{cases} 0 + \mu \cdot 1 = 0, \\ -\sin^{n-2}\varphi_0 + \mu \cdot 0 = 0, \end{cases}$$

то есть не выполняется для внутренних точек P_0.

Таким образом, оптимальной на участке $[\tau_0, \tau_1]$ может быть либо граничная траектория

$$\{(x^1, x^2) : \varphi_0 \le x^1 \le \varphi_1', x^2 = \ln r(1+\delta)\} \subset P_3, \tag{42}$$

либо траектория (38), соответствующая (оптимальному) управлению $u(t) = (1, -H(t,a))$, где a определяется из соотношения (39). В этом случае $\psi_1^+(\varphi_0) = \sqrt{\sin^{2(n-2)}\varphi_0 - a^2}$, $\psi_2^+(\varphi_0) = -a$, и уравнения (40) имеют вид $\sqrt{\sin^{2(n-2)}\varphi_0 - a^2} = 0$, $-a = -\sin^{n-2}\varphi_0$, то есть выполняются только если $a = \sin^{n-2}\varphi_0$. Уравнения (41) не могут быть выполнены. Если $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, то из (38) следует, что оптимальная траектория может иметь точку стыка на отрезке P_0, только если $\varphi_1' \le \pi - \varphi_0$.

Рассмотрим случай, когда $\tau_0 = t_0 = \varphi_0$, $\tau_1 = \varphi_1'$, $\delta' = \delta_1' = \delta$ и (оптимальная) траектория начинается с отрезка (42). Предположим, что при $t \in [\tau_1, \tau_2]$ участок оптимальной траектории лежит внутри B_r и соединяет точки $(\varphi_1', \ln r(1+\delta))$ и $(\varphi_1'', \ln r(1+\delta_1''))$. Из приведенных выше рассуждений следует, что либо $\varphi_1'' = \varphi_1'$ и траектория, соответствующая (оптимальному) управлению $u(t) = (0, u^2)$, представляет собой отрезок

$$\{(x^1, x^2) : x^1 = \varphi_1', \ln r(1+\delta_1'') \le x^2 \le \ln r(1+\delta)\},$$

либо $\varphi_1'' \ne \varphi_1'$ и управление $u = (1, -H(t,a))$ определяет (оптимальную) траекторию

$$\begin{cases} x^2(t) = \int_t^{\varphi_1''} H(t,a)dt + \ln r(1+\delta_1''), \\ x^1(t) = t \in [\varphi_1', \tau_2 = \varphi_1''], \end{cases}$$

причем значение a удовлетворяет уравнению

$$\int_{\varphi_1'}^{\varphi_1''} H(t,a)dt = \ln\frac{1+\delta}{1+\delta_1''}.$$

Непосредственная проверка условий (40) и (41) в точке стыка $\tau_1 = \varphi_1'$ в обоих случаях показывает, что эти условия не могут быть выполнены, то есть граничная траектория, лежащая в P_3, не может иметь точки стыка с траекторией, принадлежащей B_r.

Таким образом, точка $\tau_1 = \varphi_1'$ может быть точкой стыка оптимальной траектории, только если $\varphi_1' = \varphi_1$, то есть отрезок P_3 стыкуется с отрезком P_1, и получаем граничную траекторию γ_0.

Предположим теперь, что $\varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Пусть $\varphi_1' \le \pi - \varphi_0$ и оптимальная траектория имеет точку стыка на P_0, то есть ее часть, лежащая в B_r, задается уравнением

$$\begin{cases} x^2(t) = \int_t^{\varphi_1'} H(t, \sin^{n-2}\varphi_0)dt + \ln r(1+\delta_1'), \\ x^1(t) = t \in (\varphi_0, \varphi_1'), \end{cases}$$

причем

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1'} H(t, \sin^{n-2}\varphi_0)dt = \ln\frac{1+\delta'}{1+\delta_1'}.$$

Поскольку оптимальная траектория не может иметь изломов внутри области B_r (не выполняются условия Вейерштрасса — Эрдмана, эквивалентные соотношениям (40)), то либо $\varphi_1' = \varphi_1$ и $\delta_1' \in [\delta_1, \delta')$, либо $\delta_1' = 0$, то есть либо конец траектории принадлежит отрезку P_1, либо отрезку P_2.

Проверка условий скачка в точке $\tau_1 = \varphi_1' = \varphi_1$ показывает, что условие (40) выполняется, только если $\sin^{n-2}\varphi_1 = \sin^{n-2}\varphi_0$, то есть $\varphi_1 = \pi - \varphi_0$. При этом δ' и δ_1' связаны соотношением (24), которое может быть выполнено только если $\delta_1 \in$ $\in [0, \Delta_1(\delta', \varphi_0)]$. В этом случае δ' должно быть не меньше, чем $\Delta(\varphi_0)$. При выполнении этих условий оптимальной может быть любая траектория $\tilde{\gamma}_1$, заданная уравнениями (22), (23) и соотношением (24).

В случае $\delta_1' = 0$ проверка выполнения условий скачка показывает, что условие (40) не выполняется, а (41) может быть выполнено, только если $\varphi_1' = \pi - \varphi_0$.

Таким образом, при $\delta_1 \in [0, \Delta_1(\delta', \varphi_0)]$ $(\delta' \geq \Delta(\varphi_0))$ точкой стыка на P_2 может быть только точка $(\pi - \varphi_0, \ln r)$, что соответствует значениям $\delta_1 = 0$ и $\delta' = \Delta(\varphi_0)$. Утверждение 2.2 теоремы установлено.

Заметим, что оптимальная траектория может иметь две точки стыка на отрезках P_0 и P_1, только если $\varphi_1 = \pi - \varphi_0$ и $\delta_1 \in (0, \Delta_1(\delta, \varphi_0))$. Следовательно, при $\delta \leq \Delta(\varphi_0)$ точки стыка на P_0 не может быть.

Рассмотрим случай $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\varphi_1 < \pi - \varphi_0$. Предположим, что оптимальная траектория имеет точку стыка на P_0, но не имеет точки стыка на P_1. Тогда ее часть, лежащая в B_r, задается уравнениями

$$\begin{cases} x^2(t) = \int_t^{\varphi_1} H(t, \sin^{n-2}\varphi_0)dt + \ln r(1 + \delta_1), \\ x^1(t) = t \in [\varphi_0, \varphi_1], \end{cases}$$

причем

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} H(t, \sin^{n-2}\varphi_0)dt = \ln \frac{1 + \delta'}{1 + \delta_1},$$

откуда следует, что $\delta' = (1 + \delta_1)e^{h_0(\varphi_0, \varphi_1)} - 1$ и оптимальной является траектория γ_1. Это возможно, только если $0 \leq \delta_1 \leq \delta' < \delta$, то есть для $\delta_1 \in [0, \Delta_1(\delta, \varphi_0, \varphi_1))$. Таким образом, установлено утверждение 1.1.

Если $(\varphi_0, \varphi_1) \in D_3$ или $(\varphi_0, \varphi_1) \in D_4$, то точки стыка на P_0 не может быть. Выясним, при каких условиях оптимальная траектория может иметь точку стыка на P_1. Из (38) и (39) следует, что оптимальная траектория имеет вид

$$\begin{cases} x^2(t) = \int_t^{\varphi_1} H(t, a)dt + \ln r(1 + \delta_1'), \\ x^1(t) = t \in [\varphi_0, \varphi_1], \end{cases}$$

где значение a определяется из условия

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} H(t, a)dt = \ln \frac{1 + \delta}{1 + \delta_1'}.$$

Проверка условий скачка в точке стыка $t = \varphi_1$ показывает, что уравнения (40) могут быть выполнены, только если $a = \sin^{n-2}\varphi_1$, а уравнения (41) не выполняются. Таким образом, оптимальной траекторией, имеющей точку стыка на P_2, может быть лишь траектория γ_2. При этом $\delta_1' = \Delta_1(\delta, \varphi_0, \varphi_1)$, что возможно только если $\delta_1' \in$ $\in [0, \Delta_1(\delta, \varphi_0, \varphi_1))$.

Остается рассмотреть случай $\delta_1 \geq \max(0, \Delta_1(\delta, \varphi_0, \varphi_1))$. При таком условии точек стыка на P_0 и P_1 не может быть.

Если $\delta_1 > 0$, то оптимальной траекторией может быть лишь траектория $\gamma_3 =$ $= \gamma_3(\varphi_0, \varphi_1)$. В силу свойства 5 из леммы 1 уравнение (28) имеет единственное решение при любом таком δ_1.

Если $\delta_1 = 0$, то оптимальная траектория может иметь точку стыка $x_1' = (\varphi_1', \ln r) \in$ $\in P_2$. В этом случае она состоит из кривой

$$\begin{cases} x^2(t) = \int_t^{\varphi_1'} H(t,a)dt, \\ x^1(t) = t \in [\varphi_0, \varphi_1'] \end{cases}$$

и отрезка

$$\{(x^1, x^2) : \varphi_1' \leq x^1 \leq \varphi_1, x^2 = \ln r\} \in P_2.$$

Проверяя условия скачка в точке $t = \varphi_1'$, находим, что условие (40) выполняется, только если $a = \sin^{n-2}\varphi_1'$. Поскольку

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1'} H(t, \sin^{n-2}\varphi_1')dt = \ln(1+\delta),$$

то значение φ_1' является принадлежащим промежутку (φ_0, φ_1) корнем уравнения. Теорема доказана.

4. Сравнение и оценки площадей минимальных поверхностей, образованных вращением оптимальных траекторий

Вычислим значения функционала $S(\gamma)$ для кривых, являющихся оптимальными траекториями рассматриваемой вариационной задачи.

Лемма 2. *В условиях и обозначениях теоремы 1:*

1. $S(\gamma_0) = (n-1)\omega_{n-1}\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^{n-2} t dt + \sin^{n-2}\varphi_1 \cdot \ln\frac{1+\delta}{1+\delta_1}\right]$;

2. $S(\gamma_1) = (n-1)\omega_{n-1}\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\sin^{2(n-2)} t - \sin^{2(n-2)}\varphi_0}dt + \sin^{n-2}\varphi_0 \cdot \ln\frac{1+\delta}{1+\delta_1}\right]$;

3. $S(\tilde\gamma_1) = (n-1)\omega_{n-1}\left[2\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^{2(n-2)} t - \sin^{2(n-2)}\varphi_0}dt + \sin^{n-2}\varphi_0 \cdot \ln\frac{1+\delta}{1+\delta_1}\right]$;

4. $S(\gamma_2) = (n-1)\omega_{n-1}\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\sin^{2(n-2)} t - \sin^{2(n-2)}\varphi_1}dt + \sin^{n-2}\varphi_1 \cdot \ln\frac{1+\delta}{1+\delta_1}\right]$;

5. $S(\gamma_3) = (n-1)\omega_{n-1}\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\sin^{2(n-2)} t - a^2}dt + a \cdot \ln\frac{1+\delta}{1+\delta_1}\right]$;

6. $S(\gamma_2) =$

$= (n-1)\omega_{n-1}\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi_1'} \sqrt{\sin^{2(n-2)} t - \sin^{2(n-2)}\varphi_1'}dt + \sin^{n-2}\varphi_1' \cdot \ln(1+\delta) + \int_{\varphi_1'}^{\varphi_1} \sin^{n-2} t dt\right]$.

Сравнение значений площадей оптимальных траекторий показывает, что для $\varphi_1 < \pi$ граничная траектория γ_0 не может быть оптимальной.

Теорема 2. *В задаче оптимального управления (2)–(6) в случае* $\varphi_1 < \pi$ *оптимальными при соответствующих (см. теорему 1) значениях* φ_0, φ_1 *и* δ_1 *являются траектории* γ_1, $\tilde\gamma_1$, γ_2, γ_3 *и* $\tilde\gamma_3$.

Доказательство следует из проверки достаточных признаков экстремальности для указанных траекторий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатенко, А. С. Метод оптимальных управлений в решении вариационной задачи для модулей семейств поверхностей, огибающих препятствие в сферическом кольце / А. С. Игнатенко, Б. Е. Левицкий // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. — 2002. — Т. 13. — С. 64–70.

2. Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский. — М. : Наука, 1983. — 393 с.

REFERENCES

1. Ignatenko A.S., Levitskiy B.E. Metod optimalnykh upravleniy v reshenii variatsionnoy zadachi dlya moduley semeystv poverkhnostey, ogibayushchikh prepyatstvie v sfericheskom koltse [Method of Optimal Control in the Solution of the Variational Problem for the Modules of Families of the Surfaces That Bend Around Obstacles in a Spherical Ring]. *Tr. mat. tsentra im. N.I. Lobachevskogo*, 2002, vol. 13, pp. 64-70.
2. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G. *Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 393 p.

METHOD OF THE OPTIMAL CONTROL IN THE SOLUTION OF A VARIATIONAL PROBLEM

Alexander Sergeevich Ignatenko

Senior Lecturer, Department of Function Theory,
Kuban State University
alexandr.ignatenko@gmail.com
Stavropolskaya St., 149, 350040 Krasnodar, Russian Federation

Boris Efimovich Levitskii

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Function Theory,
Kuban State University
bel@kubsu.ru
Stavropolskaya St., 149, 350040 Krasnodar, Russian Federation

Abstract. The paper provides a complete solution for the variational problem of finding a revolution surface of minimum area in the metric $|x|^{-n+1}$, corresponding extreme metric for p-module of family of surfaces that separate boundary components of a spherical ring.

The surface area in the n-dimensional Euclidean space R^n, defined by the rotation of the curve γ around the polar axis, calculated in the metric $\frac{1}{|x|^{n-1}}$, $x \in R^n$, $n \geq 3$, expressed by the formula

$$S(\gamma) = (n-1)\omega_{n-1} \int_{t_0}^{t_1} \sin^{n-2} \varphi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\rho'(t))^2} dt,$$

where ω_n is a volume of n-dimensional sphere of radius 1, γ is the curve of the family of planar piecewise-smooth curves, given by the parametric equation $z(t) = e^{\rho(t)+i\varphi(t)}$, $t \in [t_0, t_1]$, is lying in the closed set $\overline{B_r} = \{z : r \leq |z| \leq$ $\leq r(1+\delta), \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]\}$, $(0 < \varphi_0 < \varphi_1 \leq \pi)$ and is connecting the point $z(t_0) = r(1+\delta)e^{i\varphi_0}$ and the point $z(t_1) = r(1+\delta_1)e^{i\varphi_1}$, $0 \leq \delta_1 \leq \delta$.

The problem is to find the infimum of the functional $S(\gamma)$ in the described class of curves with natural condition that we consider only curves for which in the points of differentiability $\varphi^{'}(t) \geq 0$ and $\rho^{'}(t) \leq 0$. The method of optimal controls by L. Pontryagin [2] is applied for search for optimal trajectories. The properties of the hyperelliptic integral of a special type, arising in the solution of the variational problem, were investigated.

Key words: minimal surfaces, surface of revolution, method of the optimal control, optimal trajectories, hyperelliptic integral.