Непересекающиеся окружности на поверхности сферы

Куразов Т. А.[1], Куспаева В. Н.[2]

[1]Куразов Туретай Аманжолович / Kurazov Turetai Amanjolovish - профессор, кафедра физики конденсированного состояния, физико-математический факультет, Актюбинский региональный государственный университет имени К. Жубанова;
[2]Куспаева Венера Нургалиевна / Kuspaeva Venera Nurgalievna - заведующая отделением, Актюбинский колледж нефти и газа, г. Актобе, Республика Казахстан

Аннотация: *одной из нерешенных проблемных задач по математике из «Википедии» является определение максимального количества непересекающихся окружностей единичного радиуса на поверхности сферы с радиусом R [1. от 25.08.2016]. При размещении непересекающихся окружностей на поверхности сферы применим способ размещения окружностей «независимыми гирляндами», когда все окружности данного ряда касаются дуги окружности, образованной сечением поверхности сферы параллельными плоскостями. Аналогичная задача имеется среди нерешенных задач по физике. Определение максимального числа одноименных зарядов на поверхности сферы, радиуса R.*

Ключевые слова: *экваториальная окружность, главный диаметр, проходящий через центр сферы, нижний и верхний полюса сферы, параллели, гирлянды и кольца [5, с. 85].*

При решении задач по электростатике, считая точками одноименные, одинаковые по величине электрические заряды за центр окружностей, а радиус электрического поля, приняв за единичный радиус окружностей, обе задачи сводим к решению одной постановке задачи.

Между окружностями соседних рядов образуются «резервные» зоны, которые при вынужденных смещениях центров малых окружностей в результате их наклона под определенным углом обеспечивают необходимые пространства для приема части сектора «вытесняемых» окружностей. Ввиду того, что мы имеем целое количество окружностей с постоянными диаметрами, то в конце каждой из «гирлянд» будут оставаться «мертвые зоны» - остатки поверхности данной сферы.

«Гирлянды» будут располагаться на боковых поверхностях сегментов сферы, образованных ее сечением параллельными плоскостями, расстояния между которыми изменяются по мере их отдаленности от центра сферы, но при этом расстояния между точками касания малых окружностей определяются диаметрами элементов «гирлянды». Введем понятия в виде определении, чтобы исключить «путаницы» между отдельными объектами, но имеющих одинаковые названия.

Определения:

1. Окружность, образованная на поверхности сферы сечением плоскости, проходящей через центр сферы, называется экваториальной окружностью или просто экватором сферы.
2. Главный диаметр, проходящий через центр сферы перпендикулярно экваториальной плоскости, называется осью вращения сферы, а его концы, находящиеся на поверхности сферы, называются полюсами.
3. Нижний полюс сферы называется «базисным», так как отсчет параллелей начинается именно с этого полюса.
4. Окружности, полученные сечением сферы плоскостями параллельно экваториальной плоскости, называются параллелями.
5. Элементы «гирлянд» - малые окружности с единичными радиусами, расположенные на поверхности сферы, называются «кольцами», диаметры колец равны двум единицам.

Центральный угол по центру сферы постоянен для всех параллелей, определяемых диаметрами колец, и равен β.

Нижнее опорное кольцо равное окружности с диаметром 2, является опорным, так как все окружности колец первой «гирлянды», имеющих точки касания с плоскостью опорного кольца, опираются именно на это кольцо.

Так как кольца гирлянд имеют единичные радиусы, то стороны выпуклого многоугольника, вписанного в центральную окружность, равны двум единицам, кроме последней, длина которой, $a < 2$. Когда длина остаточной стороны очень близка к двум (при $\delta a < 0{,}05$), то можно принять за целую окружность, так как в междурядьях имеется достаточное пространство для смещения центров колец в ту или другую сторону. «Остаточные» стороны всех рядов в совокупности составляют «мертвые зоны», где отсутствуют внутренние точки единичных колец, и в эти резервные площади поверхности сферы будут смещаться кольца в результате незначительных вынужденных сдвигов.

Расстояния центров каждого кольца от центра сферы постоянны и равны значению

$$d = R\cos\frac{\beta}{2}, \text{ где } = 2arc\sin\frac{1}{R} \qquad (1)$$

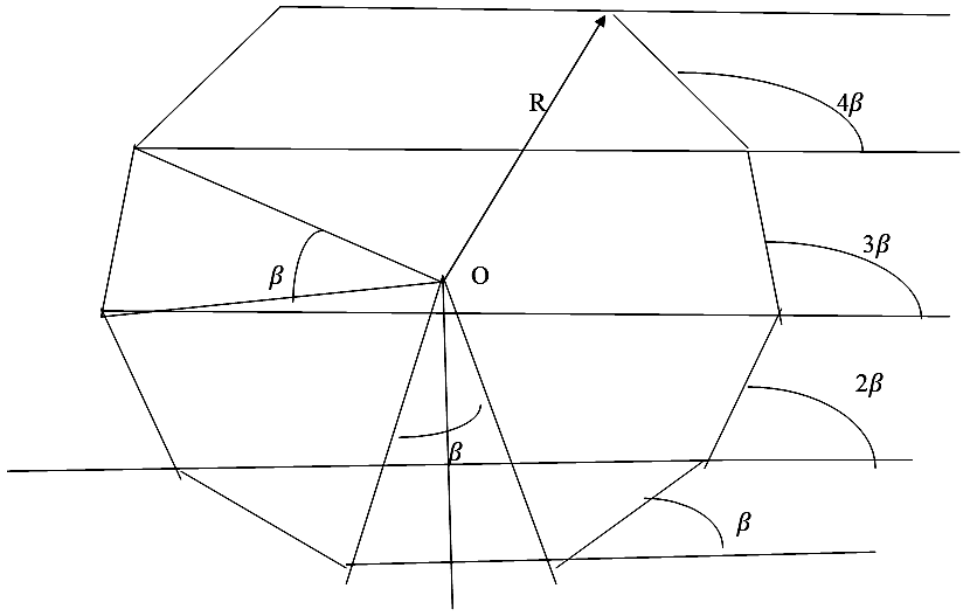


Рис. 1. Схема расположения окружностей с единичными радиусами по вертикальному сечению сферы (описанная окружность условно не показана)

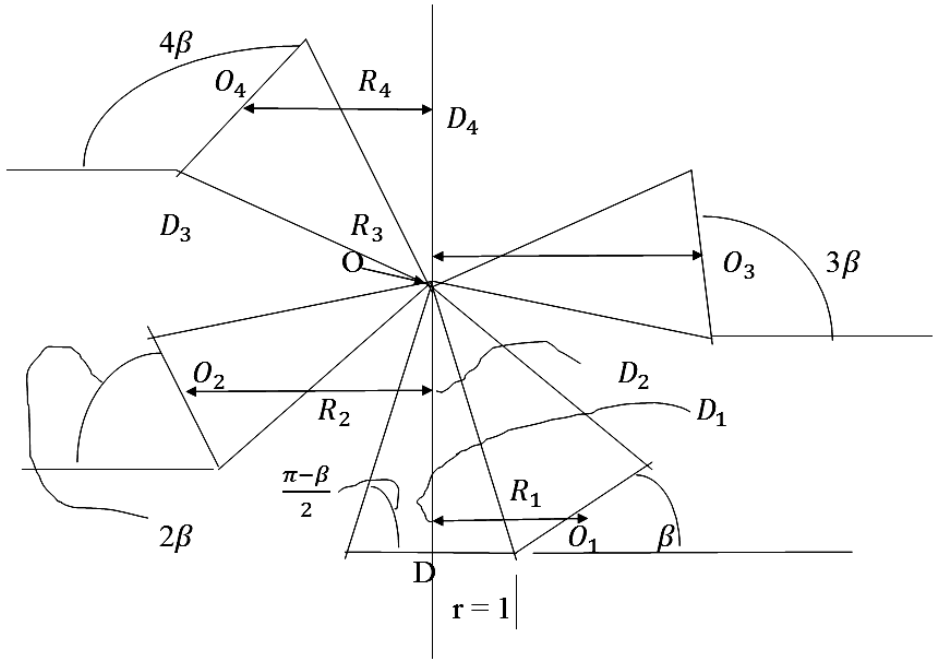


Рис. 2. Схема для определения множества окружностей единичного радиуса

Определим число сторон вписанного многоугольника в центральную окружность

$$n = \left]2\pi/\beta\right[, \qquad (2)$$

Если целая часть частного от деления четная, то существует второе «полярное кольцо» в верхнем полюсе. При незначительных недостачах необходимого пространства, то есть при $\Delta a < \varepsilon$, за счет допустимых смещений элементов гирлянд (колец) мы сможем «пристроить» дополнительное кольцо.

Количество колец в гирляндах по каждому ряду зависит от радиуса окружностей, которым принадлежат центры колец гирлянд каждого ряда, которые в свою очередь зависят от удаления от экваториальной плоскости. Кольца первого ряда опираются на опорное кольцо нижнего полюса (Рис. № 2).

Кольца гирлянды первого ряда касаются нижнего опорного кольца.

$$OD_i = OD = \sqrt{R^2 - 1} \qquad (3)$$

$$O_1D_1 = R_1 = 1 + \cos\beta \qquad (4)$$

Центральные углы, опирающиеся на диаметры колец гирлянды первого ряда:

$$\alpha_1 = 2arc\sin\frac{1}{R_1} \qquad (5)$$

А число колец, расположенных по первому ряду, определяется как целая часть частного от деления:

$$n_1 = \left]\frac{2\pi}{\alpha_1}\right[\qquad (6)$$

Отдаленность центров колец гирлянды второго ряда от оси вращения сферы:

$$O_2D_2 = R_2 = 1 + 2\cos\beta \qquad (7)$$

Число колец гирлянды второго ряда:

$$n_2 = \left]\frac{2\pi}{\alpha_2}\right[\text{ ; где } \alpha_2 = 2arc\sin\frac{1}{R_2} \qquad (8)$$

Аналогичным образом определяются радиусы окружностей, определяющих месторасположения центров колец третьего и четвертого рядов [4, с. 127].

$$\left.\begin{array}{c} R_3 = 1 + 2\cos\beta + 2\cos 2\beta + \cos 3\beta\ ; \\ R_4 = 1 + 2\cos\beta + 2\cos 2\beta + 2\cos 3\beta + \cos 4\beta \end{array}\right\} \text{ и так далее} \qquad (9)$$

В результате кругового обхода процесс будет продолжаться до получения значения $R_k \leq 1$. При значении R = 1 существует замыкающее кольцо на верхнем полюсе сферы.

Соответственно числа колец в третьем и четвертом рядах:

$$\left.\begin{array}{l} n_3 = \left]\frac{2\pi}{\alpha_3}\right[\text{ ; где } \alpha_3 = 2arc\sin\frac{1}{R_3} \\ \\ n_4 = \left]\frac{2\pi}{\alpha_4}\right[\text{ ; где } \alpha_4 = 2arc\sin\frac{1}{R_4} \end{array}\right. (10)$$

Процесс «обхвата» сферы кольцами единичных радиусов завершается по получению числового значения:

$$n_k = \left]\frac{2\pi}{\alpha_k}\right[< 1 \text{ ; где } \alpha_k = 2arc\sin\frac{1}{R_k} \qquad (11)$$

Приведем конкретный пример:

Определить максимальное число окружностей единичного радиуса, расположенных на поверхности сферы, радиус которой R = 7 ед.

Центральные углы всех колец:

$\beta = 2arc\sin\frac{1}{7} \approx 0{,}285714286$ радиан,

Число сторон вписанного в центральную окружность сферы:

$N \approx \left]\frac{2\pi}{0{,}285714286}\right[\approx \ ]21{,}9911..[= 21$

Целая часть составляет 21 единицу, но ввиду того, что между кольцами и рядами имеются «мертвые зоны» то с учетом возможно допустимых смещений центров колец можем поместить

22 кольца, одно из них будет «опорным».

Расстояния от центра заданной сферы до центров колец

$D = \sqrt{7^2 - 1} \approx 6{,}928$ единиц.

Радиус гирлянды, центров колец в плоскости сечения сферы перпендикулярно оси вращения

$R_1 \approx 1 + \cos 0{,}285714286 \approx 1{,}959$ ...

Центральные углы колец первого ряда:

$\alpha_1 = 2arc\sin\frac{1}{1{,}959} \approx 1{,}020929..$ радиан

Число колец по первому ряду:

$n_1 = \left]\frac{2\pi}{1{,}020929}\right[\approx \ ]6{,}154..[= 6$ колец.

Вычислим радиусы колец гирлянд по каждому последующему ряду в их плоскостях сечении, походящих через центры соответствующих колец перпендикулярно оси вращения сферы и затем, используя формулы $(9) - (11)$ в табличном виде определим значения α_i *и* n_i (см. таблицу № 1)

Таблица 1. Расчет количества окружностей, при $^{R}/_{r} = 7$

№ Рядов	Радиусы гирлянд R_k	Центральные углы колец α_k	$\left\lvert\frac{2\pi}{\alpha_k}\right\rvert$	Число n_k колец	Примечания
1	1,959……	1,020929…	6,154…..	6	
2	3,76…….	0,53191489…	11,81…	11	
3	5,4586468….	0,36437213…	17,244…	17	
4	6,94416…	0,2870138…	21,891…	21	
5	7,50587296…	0,265676…	23,65…	23	
6	7,50462136…	0,265719575…	23,65…	23	
7	6,945477…	0,28697148…	21,89…	21	
8	5,8737747…	0,33887225…	18,54…	18	
9	4,3764068…	0,4531099…	13,867…	13	
10	2,574778…	0,75845545…	8,284…	8	
11	$R_{11} \approx 0{,}61 < 1$			1	

Общее число колец с единичными радиусами, расположенных на поверхности сферы радиусом R = 7 и не пересекающихся между собой, равно:

N = 1 + 6 + 11 + 17 + 21 + 23 + 23 + 21 + 18 +

+ 13 + 8 + 1 = 163 (колец).

Таблица № 2 расчета количества непересекающихся окружностей с единичными радиусами, расположенных на поверхности с целочисленными радиусами от 2 до 13 единиц длины, включительно.

Таблица 2. Расчет количества окружностей на поверхности сферы

Радиус сферы R (единиц длины)	Число сторон вписанного многоугольника	Центральные углы колец (β) радиан	Число рядов гирлянд	Кол-во колец на поверхности сферы	Площадь поверхн. Сферы (единицы площади)	Площади всех кругов (ед. площади)	k
2	6	0,962…..	2	14	50,26548246	43,982..	0,874994
3	9	0,6549….	4	27	113,0973355	84,823..	0,75
4	12	0,4949…	5	49	201,0619298	153,938…	0,7656
5	15	0,39738	7	79	314,1592654	248,186…	0,79
6	18	0,33181	8	108	452,3893421	339,292…	0,75
7	22	0,28571	10	163	615,7521601	512,080…	0,8316
8	25	0,24936	12	199	804,2477193	625,177…	0,7773
9	28	0,22177	13	246	1017,876020	772,832…	0,76417
10	31	0,19967	15	296	1256,637061	914,329	0, 7276
11	34	0,18157	16	376	1520,530844	1181,239..	0,77686
12	37	0,16647	18	448	1809,557368	1407,434..	0,777778
13	40	0,15369	19	526	2123,716634	1652,48..	0,778108

Средний коэффициент площади поверхности сферы, единичного радиуса окружностями $k_{ср} \approx 0{,}78366..$.

Для сфер с достаточно большим радиусом $R \geq N$, где N достаточно большое число, мы определяем площадь поверхности сферы заданного радиуса, полученную площадь, умножив на усредненный коэффициент, разделим на площадь круга с единичным радиусом.

$$N \approx \frac{4\pi R^2 * 0{,}7803}{\pi r^2} = 4R^2 * 0{,}7803 \; ; \; (12)$$

Например:

Для R = 8 $N_8 \approx 4 * 64 * 0,7803 \approx]199,66[= 199$;

Для R = 11 $N_{10} \approx 4 * 121 * 0,7803 \approx]377,66[= 377$;

Для R = 13 $N_{13} \approx 4 * 169 * 0,7803 \approx]527,48[= 527$;

При табличных подсчетах соответствующие числа составили:

199; 376; и 526 .

Вывод: При больших значениях радиуса сферы количество непересекающихся окружностей единичного радиуса на поверхности сферы определяем по формуле (12)

$$4R^2 k_{\text{сферы}} \approx 4R^2 * 0,7803258333 \ldots \ldots$$

Проверим нашу гипотезу для варианта: R = 19;

$$4 * 19^2 * 0,7803258333 \approx 1128,7905$$

по прогнозируемым результатам число окружностей единичного радиуса на поверхности сферы с радиусом R = 19 должно равняться

$N = 1128 \pm 1$;

По вышеуказанным формулам: $(5) - (12)$ центральный угол диаметров колец по экваториальной плоскости.

$$\beta = 2arc \sin\frac{1}{19} \approx 0,1052146204 \ldots \text{радиан};$$

Число сторон вписанного многоугольника:

$$n = \left]\frac{2\pi}{0,1052146204}\right[\approx]59,7178[= 59;$$

Дальнейшие вычисления произведем в табличной форме:

Таблица. 3. Расчет количества окружностей при R= 19

R_k	α_k	$\approx n_k$	$]n_k[$	№ рядов
1,99447	0,964903	6,512	6	1
3,966881	0,498982	12,592	12	2
5,8954187	0,337640	18,609	18	3
7,758754	0,328884	19,105	19	4
9,536278	0,209343	30,014	30	5
11,20833	0,178203	35,259	35	6
12,75642	0,156624	40,116	40	7
14,163425	0,141092	44,593	44	8
15,41378	0,129664	48,457	48	9
16,493667	0,121185	51,185	51	10
17,391	0,114940	54,665	54	11
18,09625	0,110464	56,880	56	12
18,601229	0,107468	58,466	58	13
18,90048	0,105768	59,405	59	14
18,990688	0,105266	59,689	59	15
18,87086	0,105934	59,312	59	16
18,542329	0,107809	58,281	58	17
18,004189	0,111030	56,590	56	18
17,22687	0,115764	54,276	54	19
16,343	0,122000	51,502	51	20
15,23838	0,131154	47,907	47	21
13,965031	0,143100	43,908	43	22
12,537135	0,159357	30,428	30	23
10,97048	0,183056	34,324	34	24
9,28239	0,215947	20,096	20	25
7,491543	0,266180	23,605	23	26
5,61774	0,354161	17,741	17	27
3.67906	0,537137	11,698	11	28
1,69929587	1,117840	5,621	5	29

На нижнем полюсе расположено базисное кольцо, а по верхнему полюсу дополнительное кольцо не вмещается.

$$N = 1 + \sum n = 1128;$$

Прогнозируемое число также равно этому числу.

Вывод:

Непересекающиеся окружности единичного радиуса занимают 78% площади поверхности сферы радиуса $R > N$ при достаточно большом его значении.

Литература

1. Википедия. Нерешенные математические задачи тысячелетия.
2. *Куразов Т. А., Куспаева В. Н.* Построение правильных многоугольников // Научный журнал, 2016. № 10 (11). С. 4-6.
3. Справочник по элементарной математике, М., 1978.
4. *Кенжебаев К. К.* Сборник задач по математическому анализу. Актобе, 2014. 388 с.
5. *Куразов Т. А.* Сборник задач по общей физике. Алматы, 2012.