РАДІОФІЗИКА

РАДИОФИЗИКА

RADIOPHYSICS

УДК 621.391.8

Вовк С. М.[1], Борулько В. Ф.[2]

[1]Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры автоматизированных систем обработки информации, Днепропетровский национальный университет, Украина
[2]Канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник кафедры прикладной и компьютерной радиофизики, Днепропетровский национальный университет, Украина

ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТОД МИНИМУМА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ ДЛЯ РОБАСТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИПОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрена задача робастного оценивания параметров дипольных источников излучения по результатам измерений ближнего поля, когда данные измерений искажены аддитивным гауссовским шумом и выбросами. Предложен подход к обработке данных, который основан на принципе достижения минимума пространственной протяженности получаемого решения, а также минимума пространственной протяженности невязки решения. Использована модель источников излучения в виде одномерной решетки идеальных диполей Герца, которые расположены вдоль прямой линии, параллельной линии измерений электрического поля, а электрические моменты диполей перпендикулярны к плоскости измерений. Предложен алгоритм обработки данных и представлены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: электрический диполь, пространственная протяженность, робастное оценивание, регуляризация.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач теории антенн является задача оценивания пространственного положения и амплитуд источников излучения по результатам измерений ближнего поля [1–3]. Эта задача относится к классу обратных задач и является некорректной. В [4–5] мы предложили подход к решению такой задачи в скалярном случае, считая, что источники излучения являются точечными источниками однородных сферических волн. В [6] мы рассмотрели векторный случай, предполагая, что источники излучения являются диполями, а данные измерений искажены аддитивным гауссовским шумом. В данной работе мы предполагаем, что данные измерений искажены как аддитивным гауссовским шумом, так и выбросами, которые появляются из-за сбоев измерительной аппаратуры.

Так как поле системы диполей является суперпозицией индивидуальных полей диполей, то можно сформулировать задачу оценивания параметров дипольных источников излучения как задачу решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В общем случае матрица такой СЛАУ является прямоугольной; ее горизонтальный размер определяется числом «точек решения» (т.е. точек, в которых источники излучения могут быть расположены), а вертикальный размер определяется числом «точек измерений» (т. е. точек, в которых измерения были проведены). Такой тип матрицы приводит к необходимости поиска псевдорешения [7–8]. Однако, если матрица СЛАУ является плохо обусловленной, то псевдорешение не дает хорошего решения тогда, когда данные измерений искажены шумом. В этом случае можно использовать метод регуляризации Тихонова [9], который основан на требовании получить решение с минимальной энергией и/или минимальной энергией его производных. Однако данный метод обычно дает гладкое решение и тогда, когда решение не является гладким. Для устранения этого недостатка вместо требования минимума энергии решения мы использовали требование минимума пространственной протяженности решения, а также предполагали, что источники излучения расположены редко в неизвестных узлах заданной дискретной сетки. Кроме того, из-за наличия выбросов в данных мы получали СЛАУ, в которой часть уравнений содержала грубые ошибки. Для устранения этого недостатка мы также требовали минимума пространственной протяженности невязки решения. В целом, комбинация этих двух требова-

© Вовк С. М., Борулько В. Ф., 2014

 DOI 10.15588/1607-3274-2014-2-1

ний позволила построить метод робастного оценивания [10], который требовался для оценивания параметров дипольных источников излучения при наличии аддитивного шума и выбросов в данных.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Существует много способов описания источников излучения с помощью набора электрических диполей. Дальше мы рассмотрим пример, где одному источнику излучения отвечает один электрический диполь. При этом мы также используем концепцию идеального колеблющегося электрического диполя Герца и исследуем случай среды без потерь. Тогда электромагнитное поле, которое излучает идеальный электрический диполь Герца, описывается следующими выражениями [11]:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon}[\vec{\mathbf{r_0}}\frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{r}+ik\right)\cos\theta + \vec{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{0}}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{ik}{r}-k^2\right)\sin\theta]e^{-ikr}, \quad (1)$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\varphi_\mathbf{0}}\frac{p\omega}{4\pi}\left(\frac{i}{r^2}-\frac{k}{r}\right)\sin\theta\, e^{-ikr}, \quad (2)$$

где $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{H}}$ – комплексные амплитуды электрического (1) и магнитного (2) полей, соответственно; $\vec{\mathbf{r_0}}$, $\vec{\boldsymbol{\theta}_\mathbf{0}}$ и $\vec{\varphi_\mathbf{0}}$ – орты сферической системы координат; $i=\sqrt{-1}$; $k=2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны; ε – диэлектрическая проницаемость; r – расстояние от диполя до точки наблюдения; ω – угловая частота; $\vec{\mathbf{p}} = p\vec{\mathbf{z_0}}$ – электрический дипольный момент, где единичный вектор $\vec{\mathbf{z_0}}$ указывает ориентацию диполя в пространстве. Пусть электрические диполи расположены вдоль прямой линии (линии источников S) и имеют одинаковую ориентацию своих дипольных моментов. Пусть линия измерений M является параллельной к S в некоторой плоскости и электрические моменты диполей являются перпендикулярными к этой плоскости (рис. 1). Тогда электрическое поле диполя имеет только компоненту

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{ik}{r}-k^2\right)e^{-ikr}. \quad (3)$$

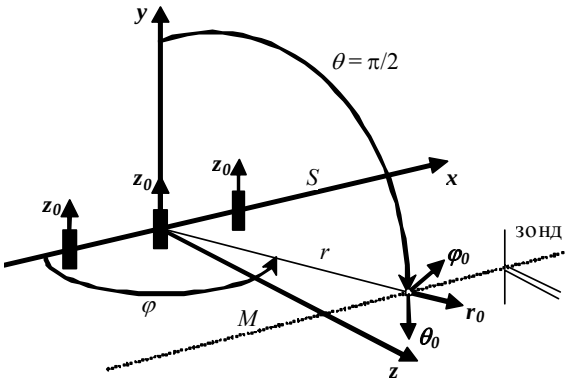


Рисунок 1 – Геометрия задачи

Используем дополнительную систему декартовых координат, в которой ось x совпадает с S, ось z перпендикулярна S и M, а ось y является параллельной вектору $\vec{\mathbf{z_0}}$ электрического дипольного момента. Тогда мы имеем $E_y = -E_\theta$. Пренебрегая влиянием измерительного зонда, на основе (3) можно записать СЛАУ:

$$b_j = \sum_{n=1}^{N} u_n\left[k^2 - \frac{ik}{r_{nj}} - \frac{1}{{r_{nj}}^2}\right]\frac{e^{-ikr_{nj}}}{r_{nj}} + \eta_j;$$

$${r_{nj}}^2 = {x_{nj}}^2 + z^2;\ x_{nj} = x_n^{(s)} - x_j^{(m)};\ j = 1,...,J, \quad (4)$$

где b_j – значения E_y в «точках измерений»; u_n – искомые значения поля в «точках решения»; η_j – выборки шума, к которым мы относим как выборки аддитивного шума, так и выбросы, которые характеризуем вероятностью появления и законом распределения их значений; z – расстояние между S и M; $x_n^{(s)}$ и $x_j^{(m)}$ обозначают x-координаты «точек решения» и «точек измерений», соответственно; N – число «точек решения»; J – число «точек измерений». Далее мы предполагаем, что диполи располагаются в некоторых «точках решения» и число диполей намного меньше, чем N.

В матричной записи СЛАУ (4) имеет вид: $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$, где $\boldsymbol{A}$ является комплекснозначной матрицей, элементы которой формируются на основе пространственной модели для заданной системы диполей, $\mathbf{b}$ является комплекснозначным вектором-столбцом, который содержит данные измерений; $\mathbf{u}$ является комплекснозначным вектором-столбцом, который содержит искомые значения амплитуд источников. Задача оценивания параметров источников излучения заключается в решении СЛАУ (4).

Необходимо отметить, что непосредственное решение СЛАУ (4) в виде: $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ является возможным только для случая квадратной матрицы $\mathbf{A}$, когда число «точек решения» N равно числу «точек измерений» J. Но такое решение имеет тот недостаток, что при плохой обусловленности матрицы $\mathbf{A}$ оно является неустойчивым. Кроме того, если $\mathbf{A}$ является прямоугольной матрицей, то непосредственное решение в указанном виде является невозможным. В этом случае можно использовать псевдорешение [7–8], например, решение по методу наименьших квадратов $\mathbf{u} = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{b}$, получаемое как аналитическое решение задачи оптимизации: $\|\mathbf{Au}-\mathbf{b}\|^2 \to \min_{\mathbf{u}}$, где $\mathbf{A}^H$ обозначает сопряженное (эрмитово) транспонирование комплекснозначной матрицы $\mathbf{A}$ и где $\|...\|^2$ обозначает квадрат евклидовой нормы. Но это решение имеет тот же самый недостаток, который проявляется при плохой обусловленности соответствующей матрицы СЛАУ. Здесь отметим, что в обоих указанных случаях число обусловленности матрицы СЛАУ возрастает при уменьшении расстояния между

точками измерений и при увеличении расстояния между точками измерений и точками решений. Более того, решение $\mathbf{u} = (\mathbf{A}^H\mathbf{A} + \rho^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{b}$, получаемое аналитически при применении к методу наименьших квадратов стандартной техники квадратичной регуляризации Тихонова: $\| \mathbf{Au} - \mathbf{b} \|^2 + \rho^2 \| \mathbf{u} \|^2 \to \min\limits_{\mathbf{u}}$, где ρ^2 является параметром регуляризации Тихонова [9], также имеет недостатки. Этими недостатками являются следующие: 1) решение получается слишком гладким и в тех случаях, когда истинное решение гладким не является; 2) если отдельные элементы данных разрушены выбросами, то получаемое решение может существенно отличаться от истинного решения и приводить к неверным результатам оценивания.

Мы предлагаем решать СЛАУ (4) на основе принципа минимума длительности [12]. Однако здесь мы меняем понятие «длительность» на понятие «пространственная протяженность» [13] и используем это понятие дважды, а именно в исходном пространстве (которым является пространство решения, или источников) и в сопряженном пространстве (которым является пространство невязки решения, или измерений). Поэтому мы назвали предлагаемый подход «двойственный метод минимума пространственной протяженности (ДММПП)» и сформулировали его как задачу оптимизации:

$$f(\mathbf{u}) = D_1[\mathbf{Au} - \mathbf{b}] + \gamma^2 D_2[\mathbf{u}] \to \min_{\mathbf{u}}, \qquad (5)$$

где $f(\mathbf{u})$ является целевой функцией; член $D_1[\mathbf{Au} - \mathbf{b}]$ обозначает меру «пространственной протяженности» вектора невязки $\mathbf{Au} - \mathbf{b}$; член $D_2[\mathbf{u}]$ обозначает меру «пространственной протяженности» вектора решения $\mathbf{u}$; γ^2 является параметром внешней регуляризации [4–6].

2 МАТЕРИАЛИ И МЕТОДЫ

Согласно (5), основная идея ДММПП заключается в требовании одновременно минимизировать как пространственную протяженность невязки решения, так и пространственную протяженность самого решения. Поэтому ключевым вопросом имплементации ДММПП является вопрос формализации понятия «пространственная протяженность».

Понятие «пространственная протяженность» мы применяем для обозначения некоторой меры носителя пространственно-зависимой функции и, следовательно, как обобщение понятий длина, площадь и объем. При выполнении формализации этого понятия необходимо рассматривать как случай отсутствия, так и случай наличия шума в данных [14].

Для случая отсутствия шума в данных мы используем понятие «строгая пространственная протяженность», которое формализуем в трехмерном пространстве в виде функционала

$$D = \iiint \kappa[s(x,y,z)]dxdydz, \qquad (6)$$

где $s(x,y,z)$ – некоторая функция пространственных независимых переменных x, y, z, которая описывает объект исследования, $\kappa[s(x,y,z)] = \begin{cases} 1, & s(x,y,z) \neq 0; \\ 0, & s(x,y,z) = 0 \end{cases}$ – идеальная функция стоимости каждого значения функции $s(x,y,z)$.

Для случая наличия шума в данных вместо (6) мы используем понятие «нестрогая пространственная протяженность» (или «квазипротяженность»)

$$D_{\alpha,\beta,\ldots} = \iiint \psi[s(x,y,z);\alpha,\beta,\ldots]dxdydz, \qquad (7)$$

где $\psi[s(x,y,z);\alpha,\beta,\ldots]$ – такая функция стоимости, которая позволяет получить конечные значения $D_{\alpha,\beta,\ldots}$ при искажении значений $s(x,y,z)$ шумом и которая при отсутствии шума обеспечивает предельный переход $D_{\alpha,\beta,\ldots} \to D$ при устремлении параметров $\alpha,\beta,\ldots$ к своим граничным (предельным) значениям.

Дальше мы будем рассматривать только случай одномерной пространственной зависимости, т. е. случай одномерной функции $s(x)$. Это, во-первых, упрощает дальнейшее изложение материала, и, во-вторых, отвечает постановке задачи, согласно которой дипольные источники излучения расположены вдоль прямой линии, параллельной линии измерений электрического поля. Учитывая это, для дальнейшей формализации мы предлагаем использовать в качестве функции стоимости следующую функцию:

$$\psi_{BV}[s(x);\alpha,\beta,q] = c[(1+|s(x)/\alpha|^q)^{\beta/q} - 1], \qquad (8)$$

где $0 < \alpha < \infty$, $-\infty < \beta \le 1$, $0 < q < \infty$, $c = 1/[(1+1/|\alpha|^q)^{\beta/q} - 1]$ – коэффициент нормировки, который обеспечивает равенство: $\psi_{BV}[1;\alpha,\beta,q] = 1$. Тогда, в частности, из (8) при q=2 имеем:

$$\psi_{BV}[s(x);\alpha,\beta,2] = c[(1+|s(x)/\alpha|^2)^{\beta/2} - 1]. \qquad (9)$$

Отметим, что для конечных значений α функция (9) при $\beta = 1$ отвечает функции стоимости для функционала квазипротяженности (7) медианного типа [14]; при $\beta = 0$ – функции стоимости мириадного типа [15], при $\beta = -2$ – функции стоимости Демиденко [16–17], а при $\beta \to -\infty$ мы получаем в пределе идеальную функцию стоимости. Так как мы априорно предполагаем, что данные измерений искажены шумом и выбросами, то дальнейшее рассмотрение может быть связано только с понятием квазипротяженности и выяснением условий его применимости путем поиска рабочего диапазона параметров $\alpha,\beta,\ldots$.

Дальше мы используем формализацию понятия «квазипротяженность» на основе функции (9). Тогда из (5) для дискретного случая мы имеем задачу оптимизации:

$$f(u_1,...,u_N)=c_1\sum_{j=1}^{J}[(1+|\sum_{n=1}^{N}a_{jn}u_n-b_j|^2/\alpha_1^2)^{\beta_1/2}-1]+$$

$$+\gamma^2c_2\sum_{n=1}^{N}[(1+|u_n|^2/\alpha_2^2)^{\beta_2/2}-1]\to\min_{u_1,...,u_N}, \quad (10)$$

где $-\infty<\beta_1\le 1$; $c_1=1/[(1+1/\alpha_1^2)^{\beta_1/2}-1]$; $-\infty<\beta_2\le 1$; $c_2=1/[(1+1/\alpha_2^2)^{\beta_2/2}-1]$; a_{jn} есть элемент матрицы $\mathbf{A}$; α_1 и α_2 являются параметрами «внутренней регуляризации». Из (10) можно легко получить задачи, основанные на функционалах квазипротяженности медианного типа с квадратичным сглаживанием (полагая $\beta_1=\beta_2=1$), мириадного типа (устремляя β_1 и β_2 к 0) и демиденковского типа (полагая $\beta_1=\beta_2=-2$).

Отметим также, что если $\alpha_1^2>>|\sum_{n=1}^{N}a_{jn}u_n-b_j|^2$ для всех j, то первый член (10) близок к квадратичному члену, и тогда мы имеем задачу [6], которая для $\alpha_1^2>>1$ может быть записана в виде:

$$f(u_1,...,u_N)=\sum_{j=1}^{J}|\sum_{n=1}^{N}a_{jn}u_n-b_j|^2+$$

$$+\gamma^2c_2\sum_{n=1}^{N}[(1+|u_n|^2/\alpha_2^2)^{\beta_2/2}-1]\to\min_{u_1,...,u_N}. \quad (11)$$

Это есть задача наименьших квадратов с неквадратичным регуляризирующим членом.

С другой стороны, если $\alpha_2^2>>|u_n|^2$ для всех n, то второй член (10) стремится к квадратичному члену, который соответствует квадратичной регуляризации (сглаживанию) Тихонова [9], что для $\alpha_2^2>>1$ может быть записано в виде:

$$f(u_1,...,u_N)=c_1\sum_{j=1}^{J}[(1+|\sum_{n=1}^{N}a_{jn}u_n-b_j|^2/\alpha_1^2)^{\beta_1/2}-1]+$$

$$+\gamma^2\sum_{n=1}^{N}|u_n|^2\to\min_{u_1,...,u_N}. \quad (12)$$

Это есть нелинейная (неквадратичная) задача минимизации с квадратичным регуляризирующим членом.

Наконец, если $\alpha_1^2>>|\sum_{n=1}^{N}a_{jn}u_n-b_j|^2$ для всех j и если $\alpha_2^2>>|u_n|^2$ для всех n, то и первый, и второй члены целевой функции (10) стремятся к квадратичным членам одновременно. В этом случае приближенно мы имеем метод наименьших квадратов с квадратичной регуляризацией Тихонова [9], который (при $\alpha_1^2>>1$ и $\alpha_2^2>>1$) может быть записан для дискретного случая как решение задачи оптимизации:

$$f(u_1,...,u_N)=\sum_{j=1}^{J}|\sum_{n=1}^{N}a_{jn}u_n-b_j|^2+\gamma^2\sum_{n=1}^{N}|u_n|^2\to\min_{u_1,...,u_N}. \quad (13)$$

Метод, получаемый из (13), может быть также назван «двойственный метод наименьших квадратов», так как он устанавливает, что взвешенная (с помощью γ^2) сумма квадратов значений невязки решения и сумма квадратов значений решения должна быть минимальна.

Для решения задачи (10) мы использовали численный метод, основанный на методе сопряженных градиентов и заданный с помощью следующей вычислительной схемы:

$$\mathbf{u}^{(t+1)}=\mathbf{u}^{(t)}+h^{(t)}\mathbf{p}^{(t)},\ t\ge 0;$$

$$\mathbf{p}^{(0)}=-\mathbf{g}^{(0)};\ t=0;\ \mathbf{p}^{(t)}=-\mathbf{g}^{(t)}+d^{(t-1)}\mathbf{p}^{(t-1)};\ t\ge 1;$$

$$d^{(t-1)}=\|\mathbf{g}^{(t)}\|^2/\|\mathbf{g}^{(t-1)}\|^2;$$

$$h^{(t)}=\arg(\min_h f(\mathbf{u}^{(t)}+h\mathbf{p}^{(t)})), \quad (14)$$

где t – номер итерации, $\mathbf{u}^{(t)}$ – вектор решения на t-й итерации, $h^{(t)}$ – шаг вдоль направления спуска $\mathbf{p}^{(t)}$ на t-й итерации; $\mathbf{g}^{(t)}$ – вектор градиента функционала f на t-й итерации. Для применения (14) желательно упростить вычисления, обусловленные комплекснозначностью СЛАУ (4). Кроме этого, необходимо построить алгоритм вычисления вектора градиента функционала (10) и алгоритм решения одномерной задачи минимизации для выбора величины шага вдоль направления спуска.

Для упрощения вычислений легко преобразовать комплекснозначную СЛАУ (4) в вещественнозначную СЛАУ. Для этого перепишем (4) в виде: $\mathbf{A}_0\mathbf{u}_0=\mathbf{b}_0$, где $\mathbf{A}_0=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{\mathbf{R}} & -\mathbf{A}^{\mathbf{I}}\\ \mathbf{A}^{\mathbf{I}} & \mathbf{A}^{\mathbf{R}}\end{bmatrix}$ является чисто вещественнозначной блочной матрицей, $\mathbf{A}^{\mathbf{R}}$ и $\mathbf{A}^{\mathbf{I}}$ являются вещественной и мнимой частями комплекснозначной матрицы $\mathbf{A}$; $\mathbf{b}_0=[\mathbf{b}^{\mathbf{R}}\ \ \mathbf{b}^{\mathbf{I}}]^T$ является чисто вещественнозначным вектором измеренных значений, который состоит из вещественной $\mathbf{b}^{\mathbf{R}}$ и мнимой $\mathbf{b}^{\mathbf{I}}$ частей известных комплекснозначных данных; $\mathbf{u}_0=[\mathbf{u}^{\mathbf{R}}\ \ \mathbf{u}^{\mathbf{I}}]^T$ является чисто

вещественнозначным вектором решения, который состоит из вещественной $\mathbf{u}^{\mathbf{R}}$ и мнимой $\mathbf{u}^{\mathbf{I}}$ частей комплекснозначного вектора решения.

Далее рассмотрим вопросы вычисления вектора градиента и решения одномерной задачи минимизации для частного случая дипольных источников с вещественнозначными амплитудами.

Если решение $\mathbf{u}$ является вещественнозначным вектором, то мы имеем вещественнозначную СЛАУ: $\mathbf{A}_1\mathbf{u} = \mathbf{b}_0$, где $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathbf{R}} \\ \mathbf{A}^{\mathbf{I}} \end{bmatrix}$; $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathbf{R}}$; $\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{\mathbf{R}} \\ \mathbf{b}^{\mathbf{I}} \end{bmatrix}$. Из необходимого условия оптимальности задачи (10), для этого частного случая мы имеем систему из N нелинейных уравнений:

$$\frac{c_1\beta_1}{(\alpha_1)^{\beta_1}} \sum_{j=1}^{J} \frac{\nu_j}{(\nu_j^2 + \alpha_1^2)^{1-\beta_1/2}} a_{jk} + \gamma^2 \frac{c_2\beta_2}{(\alpha_2)^{\beta_2}} \frac{u_k}{(u_k^2 + \alpha_2^2)^{1-\beta_2/2}} = 0;$$

$$\nu_j = \sum_{n=1}^{N} a_{jn} u_n - b_j,\ k = 1,...,N, \qquad (15)$$

где a_{jn} – элементы матрицы $\mathbf{A}_1$, b_j – элементы вектора $\mathbf{b}_0$, u_k – элементы вещественнозначного вектора $\mathbf{u}$. Отметим, что левая часть (15) представляет компоненты вектора градиента функционала (10) для этого частного случая.

Если мы будем запускать на выполнение итерационный процесс (14) с $\mathbf{u}^{(0)} = 0$ (т. е. с нулевыми начальными значениями $u_k^{(0)} = 0$ для всех k), то согласно (15) мы будем иметь начальный вектор градиента в виде:

$$\mathbf{g}^{(0)} = -(\mathbf{A}_1)^T \mathbf{w}, \qquad (16)$$

где вектор $\boldsymbol{w}$ состоит из элементов:

$$w_j = \frac{c_1\beta_1}{(\alpha_1)^{\beta_1}} \frac{b_j}{(b_j^2 + \alpha_1^2)^{1-\beta_1/2}},\ j = 1,...,J, \qquad (17)$$

где b_j – элемент вектора $\mathbf{b}_0$. Если $\alpha_1^2 >> b_j^2$ и $\alpha_1^2 >> 1$, то из (16)–(17) мы имеем:

$$\mathbf{g}^{(0)} \approx -(\mathbf{A}_1)^T \mathbf{b}_0, \qquad (18)$$

где правая часть (18) является вектором градиента для метода наименьших квадратов.

Таким образом, алгоритм вычисления на t-й итерации вектора градиента функционала (10) состоит из следующих шагов: 1) вычислить компоненты вектора невязки $\mathbf{v}^{(t)}$ по формуле: $\nu_j^{(t)} = \sum_{n=1}^{N} a_{jn} u_n^{(t)} - b_j;\ \ j = 1,...,J;$ 2) вычислить компоненты вспомогательного вектора $\mathbf{w}^{(t)}$ по формуле: $w_j^{(t)} = \frac{c_1\beta_1}{(\alpha_1)^{\beta_1}} \frac{\nu_j^{(t)}}{([\nu_j^{(t)}]^2 + \alpha_1^2)^{1-\beta_1/2}};$ $j = 1,...,J$; 3) вычислить компоненты вектора градиента $\mathbf{g}^{(t)}$ по формуле:

$$g_k^{(t)} = \sum_{j=1}^{J} a_{kj}^T w_j^{(t)} + \gamma^2 \frac{c_2\beta_2}{(\alpha_2)^{\beta_2}} \frac{u_k^{(t)}}{([u_k^{(t)}]^2 + \alpha_2^2)^{1-\beta_2/2}},$$

$$k = 1,...,N.$$

Одномерная задача минимизации: $h^{(t)} = \arg(\min_h f(\mathbf{u}^{(t)} + h\mathbf{p}^{(t)}))$ заключается в выборе величины шага h вдоль направления спуска $\boldsymbol{p}^{(t)}$. Мы предлагаем решать эту задачу путем использования набора «пробных шагов». Этот набор включает шаги, которые мы условно назвали так: «шаги, которые обнуляют невязку решения», «шаги, которые обнуляют решение», и «шаг, который отвечает методу Ньютона».

Шаги, которые обнуляют невязку решения, используются для обнуления некоторого отсчета невязки и определяются формулой:

$$h_j^{discrepancy} = -\Big(\sum_{n=1}^{N} a_{jn} u_n^{(t)} - b_j\Big) \Big/ \Big(\sum_{n=1}^{N} a_{jn} p_n^{(t)}\Big),$$

$$j = 1,...,J. \qquad (19)$$

Всего существует J таких шагов на t-ой итерации.

Шаги, которые обнуляют решение, используются для обнуления некоторого отсчета решения. Эти шаги определяются формулой:

$$h_n^{solution} = -u_n^{(t)} \Big/ p_n^{(t)},\ n = 1,...,N. \qquad (20)$$

Всего существует N таких шагов на t-й итерации.

Шаги (19) и (20) уменьшают f в соответствии с (10).

Шаг, который отвечает методу Ньютона, используется для минимизации (10) при условии, что решение находится в окрестности некоторого локального минимума функционала (10). Этот шаг определяется формулой:

$$h^{Newton} = -(\mathbf{g}^{(t)}, \mathbf{p}^{(t)}) \Big/ ([\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_1\mathbf{A} + \gamma^2\mathbf{Q}_2]\mathbf{p}^{(t)}, \mathbf{p}^{(t)}), \qquad (21)$$

где $\mathbf{Q}_1 = diag(..., \frac{c_1(\beta_1/2)}{(\alpha_1)^{\beta_1}} \frac{(\alpha_1^2 - (1-\beta_1)[\nu_j^{(t)}]^2)}{(\alpha_1^2 + [\nu_j^{(t)}]^2)^{2-\beta_1/2}}, ...)$ является $\mathbf{J} \times \mathbf{J}$ диагональной матрицей, зависящей от α_1^2 и от значений вектора невязки $\mathbf{v}^{(t)}$ на t-й итерации, и где $\mathbf{Q}_2 = diag(..., \frac{c_2(\beta_2/2)}{(\alpha_2)^{\beta_2}} \frac{(\alpha_2^2 - (1-\beta_2)[u_n^{(t)}]^2)}{(\alpha_2^2 + [u_n^{(t)}]^2)^{2-\beta_2/2}}, ...)$ являет-

ся $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ диагональной матрицей, зависящей от α_2^2 и от значений текущего вектора решения $\mathbf{u}^{(t)}$ на t-й итерации. Всего существует только один такой шаг на t-й итерации.

Алгоритм использования «пробных шагов» следующий. Мы подставляем каждый из этих шагов, рассчитанных с помощью (19)–(21), в одномерную задачу минимизации и выбираем в качестве $h^{(t)}$ такое значение шага, для которого функционал (10) принимает минимальное значение. Если наилучшее значение имеет один из шагов $h_j^{discrepancy}$ или $h_n^{solution}$, то мы обновляем направление спуска по формуле: $\mathbf{p}^{(t)}=-\mathbf{g}^{(t)}$. Если шаг h^{Newton}, который отвечает методу Ньютона, принимает наилучшее значение N раз подряд, то мы также обновляем направление спуска. Если наилучшее значение шага равно нулю, то мы останавливаем итерационный процесс.

3 ЭКСПЕРИМЕНТЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Рис. 2 и рис. 3 представляют результаты численного моделирования прямой и обратной задач для случая одномерной решетки электрических диполей, когда диполи расположены вдоль прямой линии, которая параллельна линии измерений электрического поля, и когда их электрические моменты перпендикулярны к плоскости измерений (рис.1). Приведенные на рис. 2 и рис. 3 графики (кроме графика на рис.2а) отображают исходные данные и полученные результаты для одной из 100 реализаций смеси полезного сигнала (которым является реальная и мнимая части электрической компоненты ближнего поля), аддитивного шума и выбросов.

Для моделирования прямой задачи мы использовали (4) со следующими значениями: N=J=200; $\Delta x^{(s)}=\Delta x^{(m)}=\Delta x$; $\Delta x/\lambda$=0,1; z/ λ=1, амплитуды u_n=1 для n=40, 70, 100, 130, 160 и u_n=0 для других n (рис. 2а). Значения b_j были искажены аддитивным гауссовским шумом и выбросами в виде случайных импульсов. Стандартное отклонение гауссовского шума приблизительно составляло 5 % от максимума абсолютного значения для вещественной (рис. 2б) и для мнимой (рис. 2в) частей электрической компоненты поля, соответственно. Амплитуды выбросов были равномерно распределены в интервале [–1,1], а вероятность их появления была равна 0,1. Это означало, что почти 10 % дискретных отсчетов данных были полностью разрушены, и мы априорно не знали, какие именно дискретные отсчеты данных являлись некорректными.

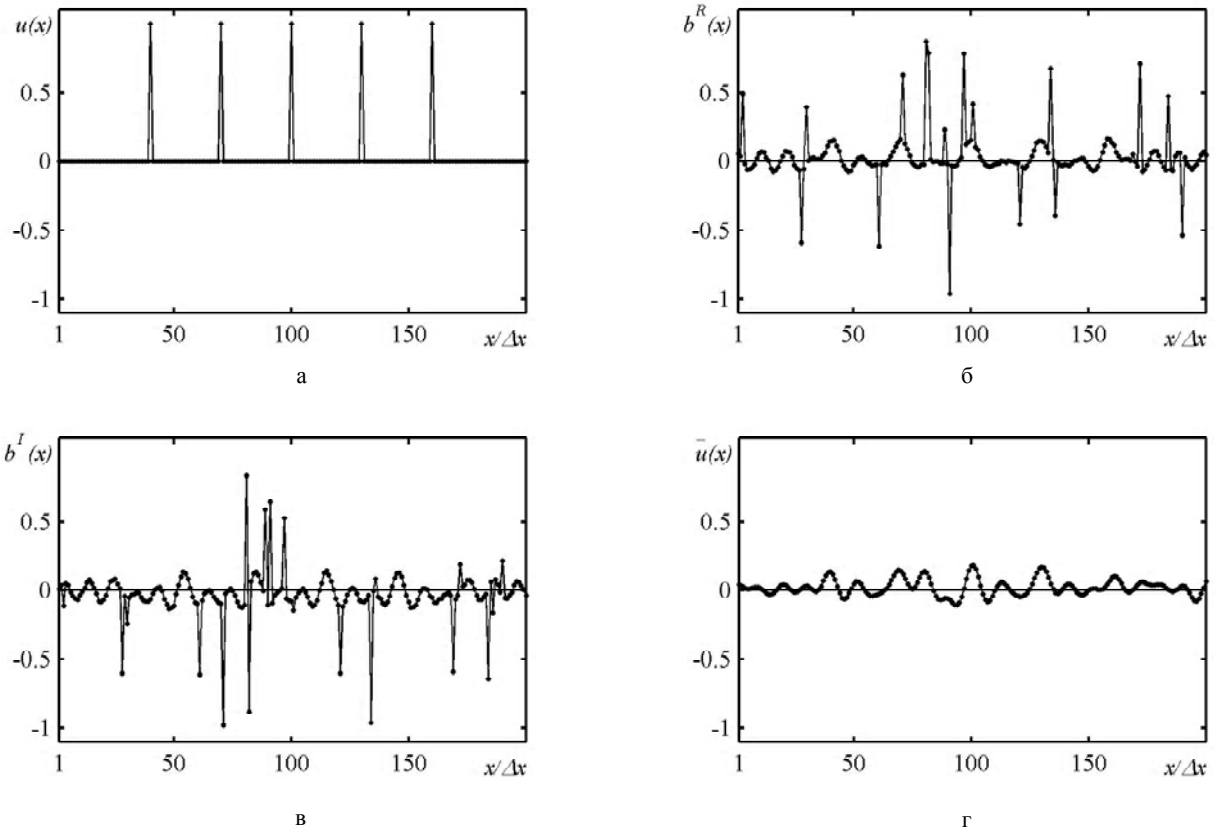


Рисунок 2 – Пространственное распределение электрического поля: а – истинное вещественнозначное пространственное распределение; б – вещественная и в – мнимая части электрического поля, искаженные аддитивным шумом и выбросами; г – решение обратной задачи после использования регуляризации Тихонова с оптимальным значением $\gamma^2=1$

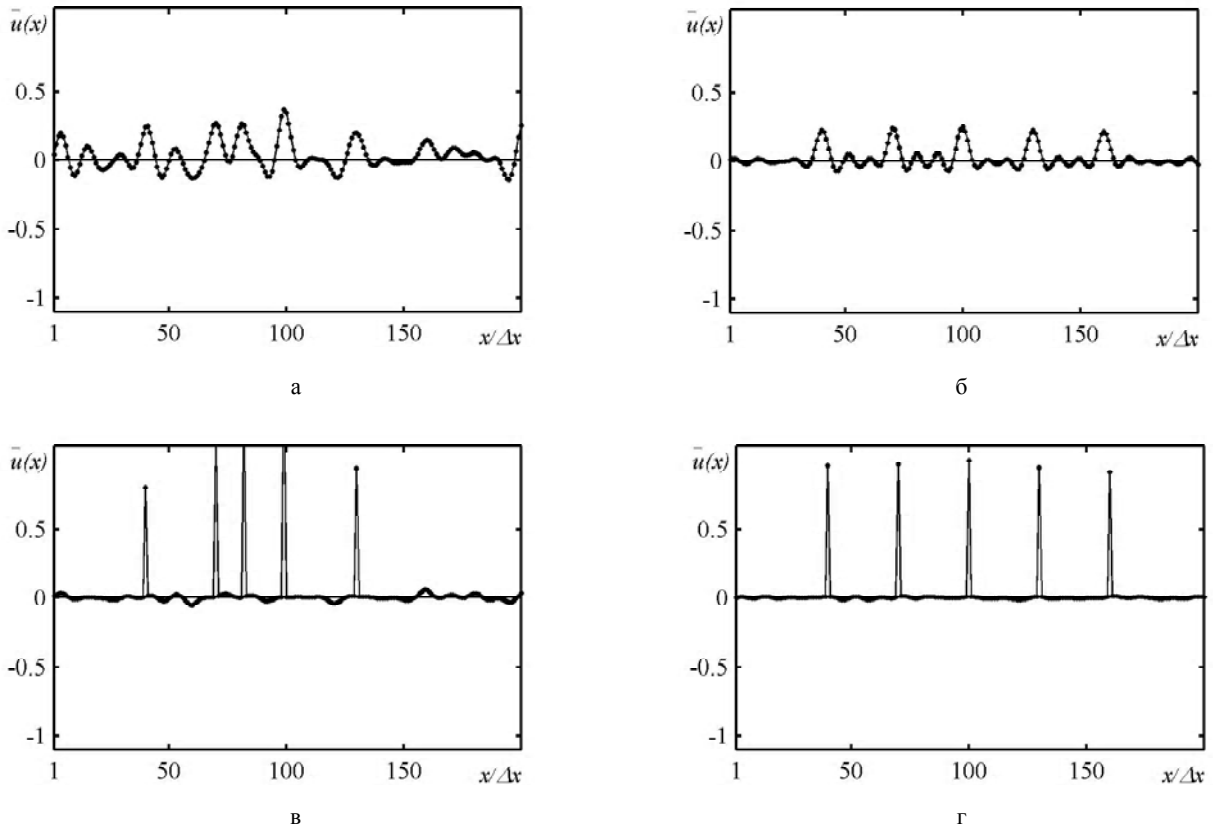


Рисунок 3 – Пространственное распределение после использования ДММПП: а – при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\gamma^2 = 0{,}1$, когда α_1 и α_2 являются очень большими; б – при $\alpha_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 1$, $\gamma^2 = 0{,}1$, когда α_2 является очень большим; в – при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0{,}1$, $\gamma^2 = 0{,}1$, когда α_1 является очень большим; г – при $\alpha_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 0{,}1$, $\gamma^2 = 0{,}1$, которые близки к оптимальным значениям

Решение обратной задачи с помощью метода регуляризации Тихонова (13) для оптимального значения $\gamma^2 = 1$ представлено на рис. 2г. Видно, что это решение не позволяет корректно оценить местоположение и амплитуды источников излучения.

Решение обратной задачи с помощью ДММПП на основе мириадного функционала (т.е. предельного случая функционала (10) при $\beta_1 \to 0$ и $\beta_2 \to 0$) при выборе $\mathbf{u}^{(0)} = 0$ для различных значений параметров регуляризации представлено на рис. 3.

Рис. 3а показывает решение, полученное при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\gamma^2 = 0{,}1$, когда α_1 и α_2 имеют большие значения, для которых первый и второй члены функционала (10) являются близкими к квадратичным членам. Видно, что это решение похоже на Тихоновское решение (13), отображенное на рис. 2г, и оно не позволяет корректно оценить местоположение и амплитуды источников излучения.

Рис. 3б показывает решение, полученное при $\alpha_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 1$, $\gamma^2 = 0{,}1$, когда α_2 имеет большое значение, для которого второй член функционала (10) является близким к квадратичному члену, и, поэтому, когда мы приближенно имеем задачу (12). Здесь мы видим, что это решение не имеет недостатков, обусловленных наличием выбросов, но оно не удовлетворяет требованию минимальной пространственной протяженности решения, что затрудняет получение оценок значений искомых параметров.

Рис. 3в показывает решение, полученное при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0{,}1$, $\gamma^2 = 0{,}1$, когда α_1 имеет большое значение, для которого первый член функционала (10) является близким к квадратичному члену, и, поэтому, когда мы приближенно имеем задачу (11). Как и ожидалось, выбросы значений разрушают решение, приводя к неверным результатам оценивания.

Наконец, решение с помощью ДММПП для квазиоптимальных значений параметров $\alpha_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 0{,}1$, $\gamma^2 = 0{,}1$, полученное после 144 итераций, представлено на рис. 3г. В этом случае графики полученного (рис. 3г) и истинного (рис. 2а) решений были почти идентичны. Отметим, что полученное решение позволяет корректно оценить местоположение и амплитуды источников излучения путем использования дискретных отсчетов, для которых абсолютное значение амплитуды больше α_2.

Мы также исследовали поведение максимального значения относительной среднеквадратической ошибки (ОСКО) решения от параметров метода. Табл.1 содержит результаты моделирования, полученные по 100 реализациям смеси полезного сигнала, гауссовского аддитивного шума и выбросов для различных значений внутренних и внешнего параметров регуляризации при применении мириадного функционала. Значения ОСКО были рассчитаны по формуле: $\delta = [\sum_{n=1}^{N}(\bar{u}_n - u_n)^2 / \sum_{n=1}^{N} u_n^2]^{1/2} \times 100\%$, где $\bar{u}_n$ обозначает дискретный отсчет полученного решения, а u_n обозначает дискретный отсчет истинного решения. Максимальное значение ОСКО рассчитывалось на основе значений ОСКО, полученных для 100 различных реализаций смеси полезного сигнала, аддитивного шума и выбросов для заданных значений параметров регуляризации, и оно указывало на наихудший (из 100 полученных результатов) результат. Табл. 1 показывает, что для случая на рис. 3г максимальное значение ОСКО было равно 12,68 %. Она также показывает, что существуют такие значения параметров регуляризации, для которых достигается еще меньшее значение максимума ОСКО. Здесь можно видеть, что минимум максимальных значений ОСКО приблизительно равен проценту содержания гауссовского шума во входных данных (около 5 %). Таким образом, табл. 1 показывает степень устойчивости решения и указывает на существование оптимальных значений параметров регуляризации для случая «мириадной» обработки.

Отметим, что большие значения ОСКО были обусловлены различными причинами. Большие значения ОСКО для больших значений α_1, α_2 были получены из-за сдвига глобального минимума относительно истинного решения. Но большие значения ОСКО для малых значений α_1, α_2 были получены из-за нарушения сходимости алгоритма. Это обусловлено тем, что для малых значений α_1, α_2 местоположение глобального минимума является близким к истинному значению, но существует много локальных минимумов. Количество локальных минимумов становится тем больше, чем меньше значения α_1, α_2. Поэтому процесс сходимости к глобальному минимуму нарушается, а сходимость к локальному минимуму дает неверные результаты.

Таблица 1 – Максимальное значение ОСКО (%) по 100 реализациям при применении мириадного функционала

$\alpha_1^2 = \alpha_2^2$	$\log_{10}(\gamma^2)$				
	–2	–1,5	–1	–0,5	0
0,1	328,56	189,13	100,44	91,17	94,77
0,01	123,69	16,30	12,68	12,27	101,46
0,001	95,05	7,46	5,05	4,50	78,41
0,0001	145,00	117,10	57,47	56,98	141,18

Табл. 2 показывает зависимости $\delta_{\max}$, δ_{cp}, $t_{\max}$, δ и t от параметров β_1, β_2 для случая использования квазиоптимальных значений $\alpha_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 0{,}1$, $\gamma^2 = 0{,}1$ при выборе q=2, где $\delta_{\max}$ и δ_{cp} – максимальное и среднее значения ОСКО, вычисленные по 100 реализациям смеси полезного сигнала, аддитивного шума и выбросов; $t_{\max}$ – максимальное число выполненных при этом итераций; δ – значение ОСКО при отсутствии шума и выбросов, полученное за t итераций. Из табл. 2 видно, что существует диапазон значений параметров β_1, β_2, внутри которого достигаются малые значения как максимального (≈12,7 %), так и среднего (7,5 %) значений ОСКО. Этот диапазон сосредоточен приблизительно вокруг значений $\beta_1 = \beta_2 = 0$, которые отвечают использованию мириадных функционалов в задаче (5). Полученные небольшие по величине значения $t_{\max}$ указывают на возможность использования предложенного алгоритма для обработки данных в реальном масштабе времени.

Правая часть табл. 2 дает представление об ошибке метода для случая отсутствия шума и выбросов при выборе не оптимальных (которые в данном случае должны быть близкими к нулю), а указанных выше квазиоптимальных значений параметров внутренней регуляризации. Видно, что ОСКО δ уменьшается при переходе от квазимедианного функционала через мириадный функционал к функционалу Демиденко, что обусловлено ослаблением зависимости соответствующих им функций стоимости от параметров внутренней регуляризации. Однако ни квазимедианный функционал, ни функционал Демиденко для данного случая «не работают» в отличие от мириадного, корневого и квазидемиденковского функционалов. Этот результат был связан с преждев-

Таблица 2 – ОСКО δ и число итераций t при применении мириадного функционала

$\beta_1 = \beta_2$	Данные с шумом и выбросами (100 реализаций)			Данные без шума и выбросов	
	$\delta_{\max}$,%	δ_{cp},%	$t_{\max}$	δ,%	t
–2	71,31	28,11	207	69,88	26
–1	71,65	12,65	228	1,01	243
–1/2	12,60	6,76	233	1,69	298
–1/4	12,61	7,05	214	3,62	350
–1/8	12,63	7,29	193	3,72	532
–1/16	12,65	7,41	154	4,05	343
–1/32	12,66	7,48	144	4,36	310
0	12,68	7,58	187	4,64	118
1/32	12,72	7,66	155	4,77	146
1/16	12,77	7,78	152	5,30	386
1/8	12,80	8,17	227	6,08	281
1/4	73,17	11,66	296	7,83	140
1/2	77,26	70,98	251	74,55	51
1	86,62	85,02	63	85,08	18

ременным остановом вычислений из-за невозможности формирования удачного направления спуска, на что указывает соответствующее малое значение числа итераций t. Это указывает на возможность и необходимость дальнейшего совершенствования техники решения предложенной задачи оптимизации.

ВЫВОДЫ

ДММПП является развитием и обобщением традиционного метода наименьших квадратов, который использует регуляризацию Тихонова. ДММПП является устойчивым к аддитивному шуму и выбросам и одновременно позволяет решать задачу оценивания в условиях, когда местоположения источников априорно неизвестны. Показано, что существуют оптимальные значения параметров регуляризации, для которых полученное решение практически совпадает с искомым решением. Численное моделирование подтвердило преимущество предложенного метода по сравнению с методом наименьших квадратов, который использует регуляризацию Тихонова. Предложенная реализация метода, основанная на методе сопряженных градиентов, и оригинальный метод решения одномерной задачи оптимизации на основе техники «пробных шагов» позволяют достичь высокой скорости обработки с возможностью ее выполнения в реальном масштабе времени. Наши дальнейшие исследования направлены на построение адаптивного подхода к выбору параметров регуляризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yaghjian A. D. An Overview of Near-Field Antenna Measurements // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1986. – Vol. 34, Jan. – P. 30–44.
2. Cano F. Applications of sources reconstruction techniques: Theory and practical results / [F. Cano, M. Sierra-Castaner, S. Burgos, J. L. Besada] // Antennas and Propagation : 4th European Conference EuCAP-2010, Barcelona, 12–16 April 2010 : proceedings. – IEEE, 2010. – P. 1–5.
3. Martini E. Reduction of Truncation Errors in Planar Near-Field Aperture Antenna Measurements Using the Gerchberg-Papoulis Algorithm / E. Martini, O. Breinbjerg, S. Maci // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2008. – Vol. 56, Nov. – P. 3485–3493.
4. Vovk S. M. Using the method of minimum extension to extrapolation of antenna measurements / S. M. Vovk, V. F. Borulko // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory : 10th International Conference MMET-2004, Dniepropetrovsk, 14–17 September 2004 : proceedings. – IEEE, 2004. – P. 159–161. DOI: 10.1109/MMET.2004.1396962
5. Vovk S. M. Restoration of point sources located along a perpendicular to a plane of measurements by the extension minimum method / S. M. Vovk, V. F. Borulko // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory : 11th International Conference MMET-2006, Kharkiv, 26–29 June 2006 : proceedings. – IEEE, 2006. – P. 147–149. DOI: 10.1109/MMET.2006.1689728
6. Borulko V. F. Determining sources in the array of electric dipoles / V. F. Borulko, S. M. Vovk // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory : International Conference MMET-2010, Kyiv, 6–8 September 2010 : proceedings. – IEEE, 2010. – P. 1–4. DOI: 10.1109/MMET.2010.5611347
7. Forsythe G. E. Computer Methods for Mathematical Computations / G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, C. B. Moler. – New York, Prentice-Hall, 1977. – 259 p.
8. Co T. B. Methods of Applied Mathematics for Engineers and Scientists / T. B. Co. – New York, Cambridge University Press, 2013. – 582 p.
9. Tikhonov A. N. Solutions of ill-posed problems / A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin. – New York, Wiley, 1977. – 272 p.
10. Huber P. J. Robust statistics / P. J. Huber. – New York : John Wiley and Sons, 1981. – 312 p.
11. Neff H. P. Introductory Electromagnetics / H. P. Neff. – New York, Wiley, 1991. – 414 p.
12. Vovk S. M. A minimum-duration method for recovering finite signals / Vovk S. M., Borul'ko V. F. // Radioelectronics and Communications. – 1991. – No. 8, vol. 34. – P. 67–69.
13. Borulko V. Image Processing by Minimum Extent Method / V. Borulko, S. Vovk // Pattern Recognition and Information Analysis : International Conference PRIA-95, Minsk, 19–21 September 1995 : proceedings. – Szczecin : Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecinskiej, 1995. – P. 71–72.
14. Vovk S. M. Statement of a problem of definition of linear signals parameters in quasinormed space / S. M. Vovk, V. F. Borul'ko // Radioelectronics and Communications. – 2010. – Vol. 53, No. 7. – P. 367–375.
15. Vovk S. M. Myriad and meridian functionals as extreme forms of smoothed quasinorms / S. M. Vovk, V. F. Borulko // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory : 14th International Conference MMET-2012, Kyiv, 28–30 August 2012 : proceedings. – IEEE, 2012. – P. 320-323. DOI: 10.1109/MMET.2012.6331268
16. Vovk S. Family of generalized Demidenko functionals for robust estimation / S. Vovk, V. Borulko // Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory : 17th International Seminar/Workshop DIPED'12, Tbilisi, 24–27 September 2012 : proceedings. – IEEE, 2012. – P. 151–154.
17. Vovk S. Spectrum extrapolation by using combined root-Demidenko family of quasi-duration functionals / S. Vovk, V. Borulko // Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves : 8th International Kharkov Symposium MSMW'13, Kharkov, 23-28 June 2013 : proceedings. – IEEE, 2013. – P. 461–463. DOI: 10.1109/MSMW.2013.6622088

Статья поступила в редакцию 10.06.2014.
После доработки 27.10.2014.

Вовк С. М.[1], Борулько В. Ф.[2]

[1]Канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри автоматизованих систем обробки інформації, Дніпропетровський національний університет, Україна

[2]Канд. фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник кафедри прикладної та комп'ютерної радіофізики, Дніпропетровський національний університет, Україна

ПОДВІЙНИЙ МЕТОД МІНІМУМУ ПРОСТОРОВОЇ ПРОТЯЖНОСТІ ДЛЯ РОБАСТНОГО ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ДИПОЛЬНИХ ДЖЕРЕЛ ВИПРОМІНЮВАННЯ

Розглянута задача робастного оцінювання параметрів дипольних джерел випромінювання за результатами вимірювань ближнього поля, коли дані вимірювань спотворені адитивним гауссівським шумом та викидами. Запропоновано підхід до оброб-

ки даних, який заснований на принципі досягнення мінімуму просторової протяжності отримуваного розв'язку, а також мінімуму просторової протяжності нев'язки розв'язку. Використана модель джерел випромінювання у вигляді одновимірної гратки ідеальних диполів Герца, які розташовані уздовж прямої лінії, паралельної до лінії вимірювань електричного поля, а електричні моменти диполів перпендикулярні до площини вимірювань. Запропоновано алгоритм обробки даних та представлені результати числового моделювання.

Ключові слова: електричний диполь, просторова протяжність, робастне оцінювання, регуляризація.

Vovk S. M.[1], Borulko V. F.[2]

[1]PhD, Associate Professor of the department of Automated Systems of Information Processing, Dnipropetrovs'k National University, Ukraine

[2]PhD, Senior Scientist of the department of Applied and Computer Radio Physics, Dnipropetrovs'k National University, Ukraine

DUAL METHOD OF MINIMUM SPATIAL EXTENT FOR ROBUST ESTIMATION OF DIPOLE RADIATION SOURCES

The robust estimation of dipole radiation-source parameters from near-field measurement is considered. The case of data distorted by additive noise and by spikes is investigated. A new approach based on a principle of minimal spatial extent is suggested. This approach states that the solution extent as well as the extent of solution discrepancy should be minimal together. The model of radiation sources described by the one-dimensional array of ideal Hertzian dipoles is used. The task geometry, when dipoles are located along a straight line, which is parallel to the measurement line of electric field, and when electric moments of all dipoles are perpendicular to the measurement plane, is considered. Algorithm of data processing based on conjugate gradient method is proposed. Numerical simulations with the error boundaries are presented.

Keywords: electric dipole, spatial extent, robust estimation, regularization.

REFERENCES

1. Yaghjian A. D. An Overview of Near-Field Antenna Measurements, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 34, Jan. 1986, pp. 30–44.
2. Cano F., Sierra-Castaner M., Burgos S., Besada J. L. Applications of sources reconstruction techniques: Theory and practical results, *Antennas and Propagation, 4th European Conference EuCAP-2010*. Barcelona, 12–16 April 2010, proceedings, IEEE, 2010, pp. 1–5.
3. Martini E., Breinbjerg O., Maci S. Reduction of Truncation Errors in Planar Near-Field Aperture Antenna Measurements Using the Gerchberg-Papoulis Algorithm, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2008, Vol. 56, Nov, pp. 3485–3493.
4. Vovk S. M., Borulko V. F. Using the method of minimum extension to extrapolation of antenna measurements, *Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, 10th International Conference MMET-2004*. Dniepropetrovsk, 14–17 September 2004, proceedings, IEEE, 2004, pp. 159–161. DOI: 10.1109/MMET.2004.1396962
5. Vovk S. M., Borulko V. F. Restoration of point sources located along a perpendicular to a plane of measurements by the extension minimum method, *Mathematical Methods in Electromagnetic Theory : 11th International Conference MMET-2006. Kharkiv,* 26–29 June 2006, proceedings, IEEE, 2006, pp. 147–149. DOI: 10.1109/MMET.2006.1689728
6. Borulko V. F., Vovk S. M. Determining sources in the array of electric dipoles, *Mathematical Methods in Electromagnetic Theory : International Conference MMET-2010*. Kyiv, 6–8 September 2010 : proceedings, IEEE, 2010, pp. 1–4. DOI: 10.1109/MMET.2010.5611347
7. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B. Computer Methods for Mathematical Computations. New York, Prentice-Hall, 1977, 259 p.
8. Co T. B. Methods of Applied Mathematics for Engineers and Scientists. New York, Cambridge University Press, 2013, 582 p.
9. Tikhonov A. N., Arsenin V. Y. Solutions of ill-posed problems. New York, Wiley, 1977, 272 p.
10. Huber P. J. Robust statistics. New York, John Wiley and Sons, 1981, 312 p.
11. Neff H. P. Introductory Electromagnetics, New York, Wiley, 1991, 414 p.
12. Vovk S. M., Borul'ko V. F.: A minimum-duration method for recovering finite signals, *Radioelectronics and Communications,* 1991, vol. 34, No. 8, pp. 67–69.
13. Borulko V., Vovk S. Image Processing by Minimum Extent Method, P*attern Recognition and Information Analysis : International Conference PRIA-95*. Minsk, 19–21 September 1995 : proceedings, Szczecin, Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecinskiej, 1995, pp. 71–72
14. Vovk S. M., Borul'ko V. F. Statement of a problem of definition of linear signals parameters in quasinormed space, *Radioelectronics and Communications,* 2010, Vol. 53, No. 7, pp. 367–375.
15. Vovk S. M., Borulko V. F. Myriad and meridian functionals as extreme forms of smoothed quasinorms, M*athematical Methods in Electromagnetic Theory, 14th International Conference MMET-2012*. Kyiv, 28–30 August 2012, proceedings, IEEE, 2012, pp. 320–323. DOI: 10.1109/MMET.2012.6331268
16. Vovk S., Borulko V. Family of generalized Demidenko functionals for robust estimation, *Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory : 17th International Seminar*, *Workshop DIPED'12*. Tbilisi, 24–27 September 2012, proceedings, IEEE, 2012, P. 151–154.
17. Vovk S., Borulko V. Spectrum extrapolation by using combined root-Demidenko family of quasi-duration functionals, *Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves*, 8th International Kharkov Symposium MSMW'13. Kharkov, 23–28 June 2013, proceedings, IEEE, 2013, pp. 461–463. DOI: 10.1109/MSMW.2013.6622088