УДК 519.2 DOI 10.23683/0321-3005-2018-1-10-14

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫХОДА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ИЗ ОБЛАСТИ В СВЯЗИ С УСТОЙЧИВЫМ РАЗВИТИЕМ АКТИВНЫХ СИСТЕМ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦЕН БАРЬЕРНЫХ ОПЦИОНОВ В СУБОРДИНИРОВАННЫХ МОДЕЛЯХ*

© 2018 г. Г.И. Белявский[1], М.А. Гирченко[1]
[1]Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия,

CALCULATION OF BOUNDARY CROSSING PROBABILITY FOR RANDOM PROCESSES WITH STABLE EVOLUTION OF ACTIVE SYSTEMS AND CALCULATION THE BARRIER OPTION PRICES IN SUBORDINATED MODELS*

G.I. Beliavsky[1], M.A. Girchenko[1]
[1]Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Белявский Григорий Исаакович – доктор технических наук, профессор, кафедра высшей математики и исследования операций, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: beliavsky@hotmail.com

Grigorii I. Beliavsky - Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of High Mathematics and Operations Research, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: beliavsky@hotmail.com

Гирченко Михаил Александрович – аспирант, кафедра высшей математики и исследования операций, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: girchenkomikhail@gmail.com

Mikhail A. Girchenko - Postgraduate, Department of High Mathematics and Operations Research, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: girchenkomikhail@gmail.com

Цель данной работы – нахождение справедливой цены барьерного опциона в рамках субординированной модели Блэка – Шоулза с субординатором, имеющим бесконечную интенсивность. Производится аппроксимация малых скачков субординатора и используется свойство устойчивости броуновского движения с последующим вычислением математического ожидания от функции выплаты по опциону методом Монте-Карло.

В качестве субординатора с бесконечной интенсивностью скачков рассмотрен процесс variance-gamma.

Проведены численные эксперименты расчета справедливой цены барьерного опциона в субординированной модели. Дается сравнение результатов работы рассматриваемого метода и классического метода Монте-Карло. Отмечается преимущество в вычислительной скорости рассматриваемого метода по сравнению с классическим алгоритмом Монте-Карло.

На основе изучения субординации винеровского процесса установлено, что при нахождении вероятности пересечения барьера нет необходимости в полном воспроизведении траектории базового актива. Достаточно моделировать число скачков, их размеры и одну нормальную случайную величину.

Выявлена проблема взаимосвязи ошибки аппроксимации субординатора и его интенсивности скачков, влияющей на вычислительные затраты при применении метода, рассматриваемого в статье.

Отмечается, что предложенный подход, опирающийся на свойство устойчивости винеровского процесса, может быть распространен на произвольные процессы со свойством устойчивости.

Полученные результаты могут быть использованы не только в финансовой математике, но и при решении разнообразных задач с наличием случайного процесса в допустимой области, что очень важно при решении задач, связанных с управлением активными системами.

Ключевые слова: *процесс Леви, ценообразование опционов, метод Монте-Карло, субординатор, модель со скачками, модель Блэка – Шоулза.*

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-19-01038).

The purpose of this work is to find the fair price of a barrier option under the subordinated Balck - Sholes model with infinite activity subordinator, by approximating small jumps of subordinator and reducing the computation of barrier crossing probability to solving square inequality, by using stable property of Brownian motion and computing the price of an option with Monte Carlo technique.

Variance gamma process was considered as a subordinate with an infinite intensity of jumps.

Numerical experiments to calculate the fair price of an barrier option in subordinated model were conducted.

Results comparison of this method and the classical Monte Carlo method is given.

The advantage in the computational speed of the method over the classical Monte Carlo algorithm is noted.

Based on the study of the Wiener process subordination it is established that to find the probability of the barrier crossing, there is no need to completely reproduce the whole trajectory of the underlying asset, it is sufficient to simulate only the jump sizes and one normal random variable.

The problem of the relationship between the normal approximation error and intensity of jumps affecting computing costs was identified.

It is noted that the proposed approach, which relies on the stability property of the Wiener process, can be extended to arbitrary processes with the stability property.

It is concluded that the obtained results can be used not only in financial mathematics, but also in solving various problems related to the content of a random process in an admissible region, which is very important in solving problems related to the management of active systems.

Keywords: *Levy process, option pricing, Monte Carlo method, subordinator, model with jumps, Black - Sholes model.*

Введение

Устойчивость развития активной системы часто связана с поведением случайного процесса, отражающего в определенной степени состояние активной системы. К таким процессам относятся, например, финансовые временные ряды. Классическая модель Блэка – Шоулза, основанная на логнормальном распределении стоимости активов, не описывает статистические характеристики финансовых временных рядов надлежащим образом, так как логарифмы доходностей финансовых активов не подчиняются нормальному распределению [1, 2]. Кроме того, исследования финансовых рынков указывают на скачки в динамике активов, которые не учитывает модель Блэка – Шоулза.

Предпринято множество попыток построить модель, описывающую реальное поведение финансовых рынков [3, 4]. Один из вариантов – субординированная модель, в которой время – случайный процесс.

Один из способов управления рисками – использование вспомогательных активов – опционов, изучением ценообразования которых в субординированных моделях занимались многие авторы.

Хартс [5] использовал субординацию для классической модели Блэка – Шоулза с устойчивым процессом в качестве субординатора. В [6] получена формула цены европейского опциона, но он не учитывает возможности разбалансированности активной системы, что в определенной степени делают барьерные опционы.

Цель данной работы – исследование возможностей имитационного моделирования для нахождения справедливой цены барьерного опциона в рамках субординированной модели Блэка – Шоулза с произвольным субординатором.

Главное достоинство рассматриваемого метода заключается в отсутствии необходимости полностью воспроизводить траекторию случайного процесса. Для нахождения вероятности того, что случайный процесс не выйдет из области справедливой цены барьерного опциона, достаточно для каждой траектории моделировать размеры скачков, одну нормальную и одну пуассоновскую случайные величины.

Субординированная модель

Рассмотрим динамику рискового и безрискового активов в рамках модели Блэка – Шоулза:

$$S_t = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t),$$

$$B_t = B_0 \exp(rt).$$

Здесь r, σ – процентная ставка и волатильность рискового актива соответственно.

Субординированная модель определяется равенствами

$$\overline{S_t} = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T_t + \sigma W_{T_t}), \quad (1)$$

$$\overline{B_t} = B_0 \exp(rT_t),$$

где T_t – субординатор, неубывающий, положительный, чисто скачкообразный случайный процесс, не зависящий от винеровского процесса. Нетрудно убедиться в том, что относительно естественной фильтрации $F_t = F_t^W \times F_t^T$ дисконтированный процесс $\frac{\overline{S_t}}{\overline{B_t}} = \frac{S_0}{B_0}\exp(-\frac{\sigma^2}{2})T_t + \sigma W_{T_t})$ является мартингалом.

Используя свойство устойчивости броуновского движения [7], равенство для цены акции запишем в виде

$$\overline{S_t} = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T_t + \sigma\sqrt{T_t}W_1).$$

Аппроксимация малых скачков субординатора

Характеристическая экспонента субординатора в общем случае имеет вид

$$\psi(\mathrm{u}) = imu + \int_0^\infty (e^{iux} - 1)\nu(dx),$$

где $m>0$ – снос; $\nu(dx)$ – мера Леви.

Зафиксируем некоторое положительное число $\varepsilon > 0$ и на интервале $(0, \varepsilon)$ разложим функцию e^{iux} в ряд Тейлора до первой степени в подынтегральном выражении

$$\psi(\mathrm{u}) \approx i\overline{m}u + \int_\varepsilon^\infty (e^{iux} - 1)\nu(dx),$$

где $\overline{m} = m + \int_0^\varepsilon x\nu(dx)$.

Обозначим через $\lambda = \int_\varepsilon^\infty \nu(dx)$ – интенсивность наступления скачков.

При этом функция распределения размеров скачков $F_{jump}(x) = \frac{1}{\lambda}\int_\varepsilon^x \nu(dy)$.

Замечание. Допустим, что мера Леви абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега. Тогда для генерации псевдослучайной величины с заданной плотностью можно воспользоваться методом Неймана [7].

Далее мы рассмотрим вычисление вероятности, не выхода за барьер рискового актива в субординированной модели.

Вероятность невыхода за барьер

Очевидно, что неравенство $S_t \le B$ эквивалентно $(r - \frac{\sigma^2}{2})T_t + \sigma\sqrt{T_t}W_1 \le b$, где $b = \ln(B/S_0)$. Предположим сначала, что $(r - \sigma^2/2) > 0$.

Для субординатора $max_{0\le t\le\tau} T_t = T_\tau$, $T_t = mt + Z_t$, неравенство, определяющее, что процесс не выйдет за барьер, имеет вид

$$\sqrt{m\tau + Z_\tau} \le \alpha(W_1),$$

где Z_t – составной процесс Пуассона,

$$\alpha(W_1) = \frac{-\sigma W_1 + \sqrt{\sigma^2 W_1^2 + 4b(r - \sigma^2/2)}}{2(r - \sigma^2/2)}.$$

Следовательно, условная вероятность невыхода за барьер в данном случае

$$P\left(\max_{0\le t\le\tau} S_t \le B\right) = F_{Z_\tau}\left(\alpha(W_1)^2 - m\tau\right), \quad (2)$$

где $F_{Z_t}(x)$ – функция распределения вероятностей случайной величины Z_τ.

Рассмотрим случай $(r - \sigma^2/2)<0$. Приведем окончательный результат:

$$P\left(\max_{0\le t\le\tau} S_t \le B\right) = \quad (3)$$

$$= \begin{cases} F_{Z_\tau}\left(\alpha(W_1)^2 - m\tau\right), (W_1 > 0) \wedge \left(W_1^2 > \dfrac{4\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)b}{\sigma^2}\right) \\ 1, \neg\left[(W_1 > 0) \wedge \left(W_1^2 > \dfrac{4\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)b}{\sigma^2}\right)\right] \end{cases}.$$

Метод Монте-Карло для барьерных опционов в субординированной модели

Исследуем вопрос нахождения цены барьерного опциона в рамках субординированной модели (1). В качестве барьерного рассмотрим опцион call типа up & out. Проблема его оценки сводится к вычислению математического ожидания

$$C = B_0 E\left[\frac{(\overline{S}_\tau - K)^+}{\overline{B}_\tau} 1_{M_\tau \le b}\right],$$

где

$$M_\tau = \max_{0\le t\le\tau} \ln\frac{\overline{S}_t}{S_0}.$$

Индикатор, определяющий, пересек ли базовый актив барьер, можно заменить на проверку условия (2) или (3) в зависимости от параметров модели.

Вычисляя данное математическое ожидание методом Монте-Карло, можно определить цену барьерного опциона в рассматриваемой модели.

Алгоритм (метод Монте-Карло для субординированного процесса)

1. Генерировать случайную величину $W_1 \in N(0,1)$.
2. Проверить условие (2) или (3) в зависимости от параметров модели r, σ. Если оно истинно, то перейти на шаг 3, иначе – шаг 1.
3. Генерировать количество скачков на траектории $N \in \Pi(\lambda T)$ и размеры скачков $\xi\tau_i$.
4. Вычислить функцию выплаты опциона.
5. Повторить первые пять пунктов необходимое количество раз, чтобы вычислить среднее значение функционала с желаемой точностью.

Используя аппроксимацию малых скачков и вышеприведенный алгоритм, можно вычислить барьерные опционы в субординированной модели с субординатором, имеющим бесконечную активность скачков. Соответствующие результаты экспериментов представлены ниже.

Вычисление цен барьерных опционов в моделях Леви с бесконечной степенью активности скачков рассматривалось в статье [8].

Результаты численных экспериментов

Рассмотрим в качестве субординатора процесс variance-gamma, мера Леви которого имеет вид

$$\nu(x) = \frac{1}{\upsilon x}\exp\left(\frac{\theta}{\sigma^2}x - \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\upsilon}+\frac{\theta^2}{\sigma^2}}x\right)I_{\{x>0\}}(x),$$

где $\theta \in R$, σ, $\nu > 0$.

В статьях [9, 10] используется метод Монте-Карло для расчета стоимости опционов, где процесс variance-gamma рассматривается в виде гамма-мостов.

Проведем 2 эксперимента.

Зафиксируем параметры: $\theta = 0$, $\sigma = 0{,}1$, $\nu = 1$, $\varepsilon = 0{,}01$, $S_0 = 120$, $K = 50$, $T = 1$. В 1-м эксперименте дополнительные параметры: $r = 0{,}1$, $B = 160$; во 2-м – $r = 0$, $B = 130$. Получены следующие результаты метода Монте-Карло: числитель – эксперимент № 1, знаменатель – № 2 (табл. 1).

Отметим, что время вычислений при расчете в субординированной модели в этом эксперименте возросло из-за наличия дополнительного условия (3).

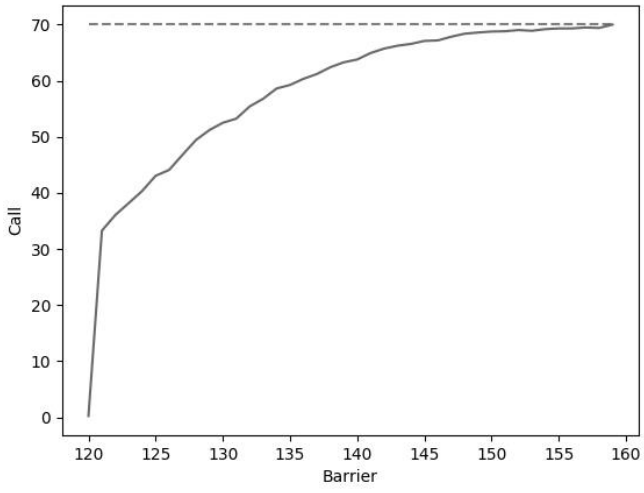
Таблица 1

Результаты метода Монте-Карло / The results of the Monte Carlo method

Число итераций метода Монте-Карло	Цена опциона в субординированной модели	Вычислительное время, с	Цена опциона классическим методом Монте-Карло	Вычислительное время, с
5 000	64,0299 52,4690	1,27 2,38	63,6653 53,0759	15,0 16,94
10 000	64,1133 52,0570	2,50 4,87	63,5001 52,6338	30,96 35,08
25 000	64,1431 52,1622	6,39 13,18	64,1737 53,6335	76,08 85,39
50 000	64,0955 52,0700	12,74 24,18	64,0372 53,1924	148,15 172,11

Эксперимент № 3

Рассмотрим эксперимент, в котором будем увеличивать величину барьера. Цена опциона с определенного момента перестает зависеть от величины барьера и при уменьшении барьера приближается к цене европейского опциона. Данную ситуацию иллюстрирует рисунок.



Зависимость цены опциона от барьера /
The relationship between option price and barrier

Эксперимент № 4

Рассмотрим для числа симуляций, равного 10 000, эксперимент, в котором будем уменьшать аппроксимирующий параметр ε и подсчитывать время работы метода Монте-Карло (табл. 2).

Таблица 2

Зависимость вычислительного времени от ε /
The relationship between computational time and ε

ε	$\lambda(\varepsilon)$	Вычислительное время, с	Цена опциона
0,1	0,0974	0,15	52,2497
$0{,}1^2$	1,4991	1,05	52,0781
$0{,}1^3$	3,6792	8,24	51,6946
$0{,}1^4$	5,9691	26,67	51,9193
$0{,}1^5$	8,2704	41,98	51,7419
$0{,}1^6$	10,5729	56,82	51,8792

При уменьшении ε увеличивается λ, что приводит к росту вычислительных затрат, связанных с увеличением в среднем числа скачков на фиксированном временном интервале, а также одновременно к двум противоречивым обстоятельствам. Первое –

уменьшение погрешности линейной аппроксимации малых скачков, второе – рост погрешности метода Монте-Карло, что сказывается на результатах, представленных в последнем столбце таблицы. В частности, оптимальное значение ε = 0,001.

Заключение

Задача вычисления стоимости барьерного опциона в субординированной модели с субординатором, имеющим бесконечную степень активности, решена при помощи аппроксимации малых скачков и расчета стоимости финансового обязательства модифицированным методом Монте-Карло.

В качестве процесса субординатора с бесконечной интенсивностью скачков был рассмотрен процесс variance-gamma.

Проведены численные эксперименты, позволяющие утверждать преимущество исследуемого метода над классическим методом Монте-Карло.

Главное достоинство рассматриваемого метода заключается в отсутствии необходимости полностью воспроизводить траекторию случайного процесса. Для нахождения вероятности того, что базовый актив не пересечет барьер, достаточно на каждой траектории моделировать только размеры скачков, одну нормальную и одну пуассоновскую случайные величины.

Предложенный подход, опирающийся на свойство устойчивости винеровского процесса, может быть распространен на произвольные процессы со свойством устойчивости.

Полученные результаты могут быть использованы не только при вычислении справедливой цены барьерного опциона, но и при прогнозе устойчивого развития активных систем, а также при решении разнообразных задач, связанных с удержанием случайного процесса в устойчивой области.

Литература

1. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2: Теория. М.: Фазис, 1998. 512 с.

2. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1: Факты. Модели. М.: Фазис, 1998. 544 с.

3. *Кудрявцев О.Е.* Современные численные методы решения интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в приложениях. М.: Вузовская книга, 2010. 144 с.

4. *Cont R., Tankov P.* Financial Modelling with Jump Processes. Chapman & Hall/CRC, 2004. 552 p.

5. *Hurst S.R., Platen E., Rachev S.T.* Option pricing for a logstable asset price model // Mathematical and Computer Modelling. 1999. Vol. 29. P. 105–119.

6. *Vollert A.* Margrabe's option to exchange in a paretian-stable subordinated market // Mathematical and Computer Modelling. 2001. Vol. 34. P. 1185–1197.

7. *Borodin A.N., Salminen P.* Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae. Basel: Birkhäuser Verlag, 2002. 685 p.

8. *Белявский Г., Гирченко М.* Комбинированный метод Монте-Карло для расчета справедливых цен барьерных опционов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2017. № 1. С. 9–13.

9. *Fu M.C., Jarrow R.A., Yen J.-J., Elliott R.J.* Variance-Gamma and Monte Carlo // Advances in Mathematical Finance. Applied and Numerical Harmonic Analysis. 2007. P. 21–34

10. *Ribeiro C., Webber N.* Valuing path-dependent options in the Variance Gamma model by Monte Carlo with a gamma bridge // J. of Computational Finance. 2004. Vol. 7. P. 81–100.

References

1. Shiryaev A.N. *Osnovy stokhasticheskoi finansovoi matematiki* [Fundamentals of stochastic financial mathematics]. Vol. 2. Theory. Moscow: Fazis, 1998, 512 p.

2. Shiryaev A.N. *Osnovy stokhasticheskoi finansovoi matematiki* [Fundamentals of stochastic financial mathematics]. Vol. 1. Facts. Models. Moscow: Fazis, 1998, 544 p.

3. Kudryavtsev O.E. *Sovremennye chislennye metody resheniya integro-differentsial'nykh uravnenii, voznikayushchikh v prilozheniyakh* [Modern numerical methods for solving integro-differential equations arising in applications]. Moscow: Vuzovskaya kniga, 2010, 144 p.

4. Cont R., Tankov P. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC, 2004, 552 p.

5. Hurst S.R., Platen E., Rachev S.T. Option pricing for a logstable asset price model. *Mathematical and Computer Modelling*. 1999, vol. 29, pp. 105-119.

6. Vollert A. Margrabe's option to exchange in a paretian-stable subordinated market. *Mathematical and Computer Modelling*. 2001, vol. 34, pp. 1185-1197.

7. Borodin A.N., Salminen P. *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae*. Basel: Birkhäuser Verlag, 2002, 685 p.

8. Belyavskii G., Girchenko M. Kombinirovannyi metod Monte-Karlo dlya rascheta spravedlivykh tsen bar'ernykh optsionov [Combined Monte Carlo method for calculating fair prices of barrier options]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki.* 2017, No. 1, pp. 9-13.

9. Fu M.C., Jarrow R.A., Yen J.-J., Elliott R.J. Variance-Gamma and Monte Carlo. *Advances in Mathemat-ical Finance. Applied and Numerical Harmonic Analysis.* 2007, pp. 21-34.

10. Ribeiro C., Webber N. Valuing path-dependent options in the Variance-Gamma model by Monte Carlo with a gamma bridge. *J. of Computational Finance.* 2004, vol. 7, pp. 81-100.

Поступила в редакцию / Received ***20 декабря 2017 г. / December 20, 2017***