Ограничения при формообразовании теоретической поверхности арочных зубьев

Губарь Сергей Алексеевич,
кандидат технических наук, доцент, кафедра «Двигатели внутреннего сгорания», Тихоокеанский государственный университет, gsa1953@mail.ru

Рассматривается схема обработки цилиндрических колёс с арочными зубьями инструментами с плоской спиральной производящей поверхностью. Анализируется влияние различных геометрических параметров станочного зацепления на размер воспроизводимой теоретической поверхности. Показано, что ограничения связаны с выходом ребра возврата на боковую поверхность зуба (подрезанием). Отмечается, что минимальная по размеру теоретическая поверхность воспроизводится на выпуклой стороне зуба, и эта сторона лимитирует возможную ширину венца зубчатого колеса. Протяженность теоретической поверхности вдоль зуба увеличивается с увеличением расчётного радиуса инструмента. Приведены рекомендации по выбору параметров зубчатых колёс.

Ключевые слова: цилиндрические колёса с арочными зубьями, спирально-дисковые инструменты, ребро возврата, подрезание.

Использование цилиндрических передач с арочными зубьями следует рассматривать как перспективный путь развития зубчатых механизмов. Их высокие эксплуатационные свойства подтверждены рядом исследований [1, 2]. Известно достаточно большое количество схем и способов образования колёс с арочными зубьями [3, 4]. Одним из наиболее точных и производительных способов, обеспечивающих возможность получения зацеплений с широким диапазоном свойств, следует считать предложенный профессором Ериховым М. Л. [5] способ формообразования боковых поверхностей зубьев инструментами с плоской спиральной производящей поверхностью в процессе непрерывного деления (рис. 1).

Теоретическая поверхность зуба при использовании спирально-дисковых инструментов определяется как огибающая однопараметрического семейства производящих поверхностей. Однако, как и всякий способ формообразования поверхностей путём обката, данная схема накладывает определённые ограничения на область возможных параметров обрабатываемых зубчатых колёс. Анализ геометрических ограничений, накладываемых спирально-дисковыми инструментами на размеры нарезаемых колёс, является задачей настоящей работы.

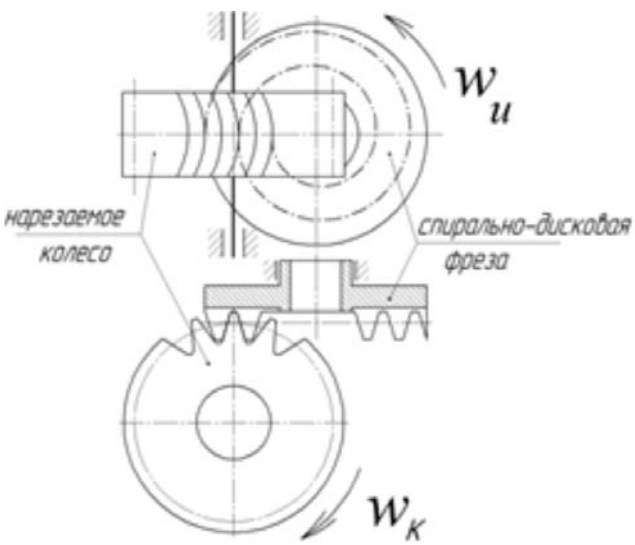


Рис. 1. Схема обработки арочных зубьев спирально-дисковым инструментом

Задачи решаются с использованием методов теории зубчатых зацеплений [6] и математического аппарата дифференциальной геометрии с применением

основных положений теории матриц и векторной алгебры. Вычислительные алгоритмы и программы составлены с использованием численных методов анализа.

Размеры воспроизводимой в станочном зацеплении теоретической поверхности зуба колеса при рассматриваемом способе зубообразования определяются рядом факторов, основными из которых следует считать размеры инструмента и число зубьев нарезаемого колеса. Естественной границей огибающей является ребро возврата, с существованием которого в пределах боковой поверхности обычно связывают такое явление, как подрезание зуба [6]. На производящей поверхности точкам ребра возврата соответствует предельная кривая . Как известно [6], подрезание зубьев можно избежать, если размеры инструмента (производящую поверхность) ограничить предельной кривой.

Ребро возврата обычно рассматривают как совокупность особых точек поверхности, в которых не определено направление вектора нормали. Такой подход к исследованию подрезания использовался в работах И. И. Дусева [7], Ф.Л.Литвина [8], М. Л. Ерихова [9] и других авторов. Следуя М.Л. Ерихову, подрезание, связанное с наличием особых точек на огибающей, называют подрезание первого рода.

Кроме подрезания в особых точках, может оказаться, что часть огибающей поверхности не воспроизводится реально, а существует как математическая абстракция. Это связано с тем, что в какой-то момент времени контакт боковой поверхности зуба с производящей поверхностью инструмента возможен лишь со стороны тела зуба колеса, то есть поверхность инструмента внедрена в тело зуба. Такое явление принято называть подрезание второго рода.

В рассматриваемом станочном зацеплении в пределах существования теоретической поверхности приведенная кривизна не меняет знак, следовательно, подрезание второго рода отсутствует. Поэтому основным фактором, определяющим размеры теоретической поверхности, следует считать подрезание первого рода.

Для определения положения точек ребра возврата воспользуемся условием, выделяющим особые точки, как точки, в которых полная кривизна поверхности равна бесконечности. В системе координат, связанной с текущей точкой ***M*** производящей поверхности, это условие имеет наиболее простой вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y_u)_u^M & (y_u)_\varphi^M & (V_y)_{\varphi K}^M \\ (Z_u)_u^M & (Z_u)_\varphi^M & (V_z)_{\varphi K}^M \\ f_u & f_\varphi & f_{\varphi K} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Определитель составлен из частных производных проекций радиуса-вектора производящей поверхности (2) по текущим параметрам φ и u, проекций аналога-вектора относительной скорости и частных производных от левой части уравнения зацепления (4), выделяющего точки огибающей семейства производящих поверхностей.

Производящая поверхность представляет собой конволютный (в частном случае − эвольвентный) геликоид. Выражения, определяющие проекции радиуса-вектора производящей поверхности в собственной системы координат $S_u(x_u, y_u, z_u)$, связанной с осью инструмента, получены в матричной форме и имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x_u &= -(p\varphi + u\sin\alpha)\cos(\varphi - \mu) + r_u\cos\varphi, \\ y_u &= -(p\varphi + u\sin\alpha)\sin(\varphi - \mu) + r_u\sin\varphi, \\ z_u &= u\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где r_u – расчётный радиус инструмента (по существу, это расстояние между осью инструмента и заготовки при нарезании колеса), φ и u – текущие линейный и угловой параметры, μ и p – постоянные параметры производящей поверхности.

Уравнение зацепления при образовании теоретической поверхности зуба колеса получено в форме:

$$\bar{m}_u \cdot \bar{V}_{\varphi k}, \qquad (3)$$

где $\bar{V}_{\varphi k}$ – аналог вектора относительной скорости, $\bar{m}_u$ – орт нормали к производящей поверхности. Опуская преобразования, уравнение зацепления представим в виде:

$$\cos\eta' [u_{uk} r_u \cos\alpha \sin\mu + u\sin\lambda - r_k \cos\alpha \sin\lambda + \rho\varphi \sin\alpha \sin\lambda - r_u \sin\alpha \sin(\varphi_u - \varphi - \beta) - r_u \sin\alpha \sin\beta] + \sin\eta' [u_{uk}(\rho\varphi + u\sin\alpha) - u_{uk} r_u \cos\mu - u\cos\alpha\cos\lambda + r_k \cos\lambda] = 0, \qquad (4)$$

где β – угол наклона спирали в расчётной плоскости, $\lambda = (\varphi_u - \varphi - \beta + \mu)$,

η' – угол между плоскостью движения производящей прямой при образовании геликоида и нормалью в текущей точке производящей поверхности, r_k – расчётный радиус нарезаемого зубчатого колеса.

Выражения для радиуса-вектора теоретической поверхности зуба колеса в собственной системе координат $S_k(x_k, y_k, z_k)$, связанной с осью нарезаемого колеса, опуская вывод, можно представить в как:

$$\left.\begin{aligned} X_k &= C_1 \sin\varphi_k - C_2 \cos\varphi_k, \\ Y_k &= C_1 \cos\varphi_k - C_2 \sin\varphi_k, \\ Z_k &= (p\varphi + u\sin\alpha)\cos\lambda + r_u[\cos(\varphi_u - \varphi - \beta) - \cos\beta], \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где $C_1 = (p\varphi + u\sin\alpha)\sin\lambda - r_u[\sin(\varphi_u - \varphi - \beta) + \sin\beta]$,

$C_2 = u\cos\alpha - r_k$,

Для того чтобы переписать частные производные в систему координат $S_M(x_M, y_M, z_M)$, связанную с текущей точкой, воспользуемся известным [6] матричным преобразованием

$$\bar{t}_u^M = \bar{L}_{M,u} \cdot \bar{t}_u \qquad (6)$$

где $\bar{t}_u$ – одна из матриц, составленных из производных от проекций радиуса-вектора $\bar{r}_u$, или из проекций вектора $\bar{V}_{\varphi k}$; $\bar{t}_u^M$ – матрица, составленная из проекций тех же векторов на оси координат системы S_M; $\bar{L}_{M,u}$ – матрица перехода от системы S_u к системе S_M. Матрицу перехода $\bar{L}_{M,u}$ составляется по известным [6] правилам непосредственно по схеме преобразования систем координат.

В соответствии с условием (6) все выражения, необходимые для составления определителя (1) переписываются в систему S_M.

Положение ребра возврата на боковой поверхности зуба колеса определяется при совместном рассмотрении условий (1) и (4). Фиксируя какой-либо из трех параметров поверхности, можно вычислить значения двух других, определяющих точку ребра возврата. Система уравнений при этом имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \Delta(u, \varphi, \varphi_к) &= 0; \\ f(u, \varphi, \varphi_к) &= 0; \\ \varphi_k &= const \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Подставив найденные значения параметров в (5), вычислим координаты точки ребра возврата в системе S_k

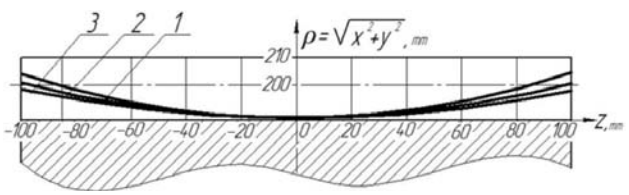
Однако при таком подходе, особенно на начальных этапах исследования, возникают большие затруднения при выборе области значений параметра $\varphi_к$, соответствующих точкам ребра возврата, лежащим в пределах боковой поверхности зуба колеса. Для устранения этих затруднений удобно вместо фиксации одного из параметров задавать дополнительное условие, выделяющее точки, лежащие в заданной области. Таким условием может быть пересечение ребра возврата либо с семейством торцовых плоскостей (8, а), либо с семейством соосных цилиндров (8, б), проходящих через боковую поверхность. Определять параметры точки при этом будут следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\Delta(u,\varphi,\varphi_k)&=0;\\ f(u,\varphi,\varphi_k)&=0;\\ z(u,\varphi,\varphi_k)&=B\end{aligned}\right\}а)\quad\left.\begin{aligned}\Delta(u,\varphi,\varphi_k)&=0;\\ f(u,\varphi,\varphi_k)&=0;\\ x^2+y^2&=R^2\end{aligned}\right\}б), \qquad (8)$$

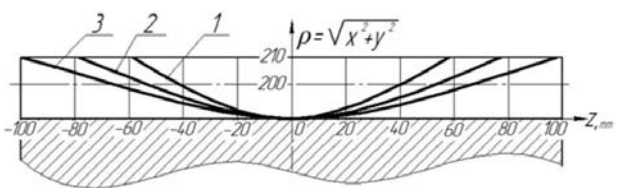
где B- аппликата торцовой плоскости, R- радиус соосного цилиндра.

Выбор того или иного условия зависит от решаемой задачи. Для построения ребра возврата на боковой поверхности конкретного зубчатого колеса удобно использовать систему (8, а).

На форму и положение ребра возврата существенное влияние оказывают два фактора: расчетный радиус инструмента r_u и число зубьев нарезаемого колеса z_k. Влияние расчетного радиуса инструмента на форму ребра возврата отражено на рисунке 2. Ребра возврата построены на боковой поверхности зуба колеса с параметрами: модуль $m_n = 10$мм, число зубьев z_k=40, при различных значениях r_u. По горизонтальной оси отложена аппликата Z , по вертикальной – радиус ρ точек ребра возврата. Кривая I соответствует ребру возврата при r_u=160мм, кривая 2 – при r_u=200мм, кривая 3 – при r_u=240мм. Отметим, что с увеличением расчетного радиуса инструмента, размер воспроизводимой теоретической поверхности вдоль зуба увеличивается на обеих сторонах зуба.



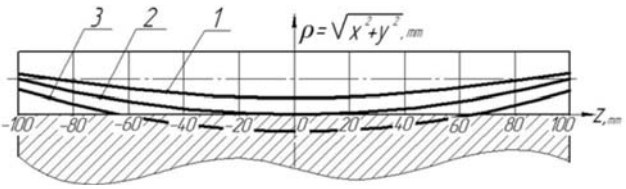
а – вогнутая сторона



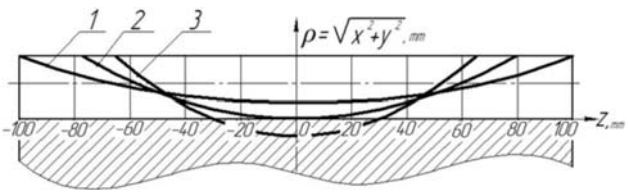
б – выпуклая сторона

Рис. 2. Примерное положение рёбер возврата на боковой поверхности зуба при различных расчётных радиусах инструмента

Влияние числа зубьев нарезаемого колеса на форму и положение ребра возврата можно оценить по рисунку 3. Здесь условно, с сохранением масштаба, совмещены боковые поверхности зубьев колес с различными числами зубьев. Поэтому по вертикальной оси сетка не нанесена. Все зубчатые колеса образованы инструментом с расчетным радиусом r_u=200мм. Кривая I соответствует ребру возврата на боковой поверхности при числе зубьев колеса z_k=20, кривая 2 – при $z_k = 40$, кривая 3 – при z_k=60. В среднем сечении колеса профиль зуба – эвольвента; здесь ребро возврата касается основного цилиндра, радиус которого, как известно $r_o = m_n \cdot z_k \cdot cos\alpha/2$.



а – вогнутая сторона



б – выпуклая сторона

Рис.3. Примерное положение рёбер возврата на боковой поверхности зуба при различных числах зубьев колёс

Отметим, что при увеличении числа зубьев колеса протяженность теоретической поверхности вдоль зуба на выпуклой стороне уменьшается, это справедливо для всего диапазона чисел зубьев колес. На вогнутой стороне эта зависимость имеет более сложный характер. Если протяженность теоретической поверхности вдоль зуба определять расстоянием B_M между точками выхода ребра возврата на вершину зуба, то можно построить кривые, характеризующие влияние различных параметров станочного зацепления на размер теоретической поверхности. Такие кривые приведены на рисунке 4. Характер кривых соответствует сделанным ранее заключениям относительно влияния на размер теоретической поверхности вдоль зуба величины расчетного радиуса инструмента и числа зубьев колес. Можно также отметить, что во всем диапазоне параметров теоретическая поверхность на вогнутой стороне имеет большие размеры. Следовательно, говоря о возможных размерах зубчатого колеса из условия существования на всей длине зуба теоретической поверхности, необходимо в первую очередь рассматривать выпуклую сторону зуба.

Увеличить размер теоретической поверхности (уменьшить подрезание) позволяет положительное смещение инструмента при нарезании. Как и в других случаях зубообработки, ребро возврата, практически сохраняя свою форму, “смещается” относительно боковой поверхности к центру колеса. Величина “смещения” может быть определена по положению точки ребра на боковой поверхности в среднем сечении колеса, где профиль зуба – эвольвента.

Что касается влияния параметра η, определяющего отклонение производящей поверхности от эвольвентного геликоида то, как показывают численные исследования, при использовании инструментов с производящей поверхностью, образованной при значениях узла η

от – 0.06 рад. До 0.06 рад., существенных изменений в положении ребра возврата на боковой поверхности не обнаружено.

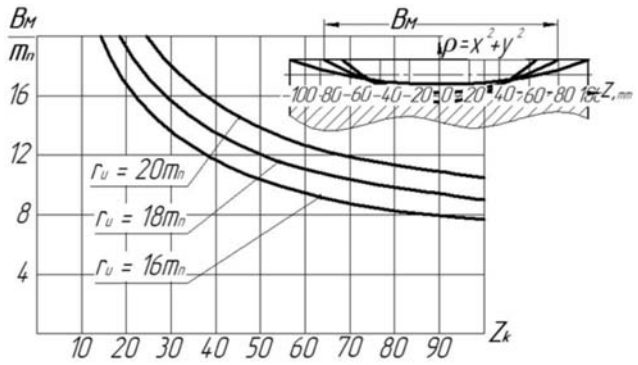


Рис. 4. Влияние параметров станочного зацепления на размер теоретической поверхности

Таким образом, на основании проведенного анализа можно заключить, что определяющее влияние на размер воспроизводимой на боковой поверхности арочного зуба теоретической поверхности при обработке зубчатых колёс спирально-дисковыми инструментами оказывают три фактора: число зубьев нарезаемого колеса, расчётный радиус инструмента и смещение исходного контура при нарезании колеса. Зависимости, связывающие отмеченные параметры имеют сложный и неоднозначный характер. Можно лишь утверждать, что минимальная по размеру теоретическая поверхность воспроизводится на выпуклой стороне зуба, и эта сторона лимитирует возможную ширину венца зубчатого колеса в целом, а также что с увеличением расчетного радиуса инструмента протяжённость теоретической поверхности увеличивается. Графики, приведённые на рисунке 3, можно рассматривать как рекомендации для выбора параметров зубчатых колес при проектировании цилиндрических передач с арочными зубьями

Литература

1. Айрапетов Э.Л., Городничий В.П., Ерихов М.Л., Сызранцев В.Н. Экспериментальное исследование контактной выносливости цилиндрических передач с арочными зубьями // Вестник машиностроения. – 1986, № 3 – С.20-21.

2. Сызранцев В.Н., Сызранцева К.В., Варшавский М.Р. Исследование нагруженности контакта в зацеплении арочных зубьев цилиндрических колес. // Вестник Академии транспорта – 1999 – С.217-220.

3. Севрюк В. Н. Цилиндрические передачи с круговым зубом // Повышение надёжности и усовершенствование конструкций тепловозных узлов – Киев – 1965 – С. 45-47.

4. А. с. 227066 (СССР) Способ нарезания криволинейных по длине зубьев цилиндрических зубчатых колёс / Г. И. Мошковский, М. И. Догода. – Опубл. в Б. и., 1968, № 29.

5. А.с. 282897 (СССР). Способ обработки круговых зубьев колёс цилиндрических и винтовых передач / М.Л. Ерихов. - Опубл. в Б.и. 1970 № 30.

6. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. – Наука – 1986. 584 с.

7. Дусев И. И. Подрезание зубьев зубчатых колёс при нарезании методом обкатки // Известия высших учебных заведений. Машиностроение – 1965, № 6. – С. 12-20.

8. Литвин Ф. Л. Подрезание зубцов плоских и пространственных передач // Теория передач в машинах – М. – 1963, С. 37-50.

9. Ерихов М. Л. Интерференция (подрезание) в передачах, образованных по методу огибания с двумя параметрами // Известия высших учебных заведений. Машиностроение – 1966, № 7 – С. 5-9.

Restrictions on shaping theoretical surface of the arch of the teeth

Gubar S.A.
Pacific National University

The scheme of processing cylindrical wheels with arched teeth with tools with a flat spiral producing surface is considered. The influence of various geometric parameters of the machine engagement on the size of the reproduced theoretical surface is analyzed. It is shown that the restrictions are related to the exit of the return edge to the side surface of the tooth (cutting). It is noted that the minimum size of the theoretical surface is reproduced on the convex side of the tooth, and this side limits the possible width of the crown of the gear wheel. The length of the theoretical surface along the tooth increases with the calculated radius of the tool. Recommendations for selecting the parameters of gears are given.

Keywords: cylindrical wheels with arched teeth, spiral-disk tools, return rib, undercutting.

References

1. Ayrapetov E.L., Gorodnichy V.P., Erichov M.L., Syzrantsev V.N. An experimental study of contact endurance of cylindrical gears with arched teeth // Herald of mechanical engineering. - 1986, No. 3 - S.20-21.
2. Syzrantsev V.N., Syzrantseva K.V., Warsaw M.R. Investigation of contact loading in gearing of arched teeth of cylindrical wheels. // Bulletin of the Academy of Transport - 1999 - S.217-220.
3. Sevryuk V. N. Cylindrical gears with a circular tooth // Improving reliability and improving the design of diesel nodes - Kiev - 1965 - S. 45-47.
4. A. p. 227066 (USSR) A method for cutting cylindrical gears curved along the length of the teeth / G. I. Moshkovsky, M. I. Dogoda. - Publ. in B. and., 1968, No. 29.
5. A.S. 282897 (USSR). A method of processing circular teeth of cylindrical and helical gears / M.L. Erichov. - Publ. in B.I. 1970 No. 30.
6. Litvin F. L. Theory of gears. - Science - 1986. 584 p.
7. Dusev I. I. Undercutting of gear teeth during cutting by running method // News of Higher Educational Institutions. Engineering - 1965, No. 6. - S. 12-20.
8. Litvin F. L. Undercutting of teeth of flat and spatial gears // Theory of gears in cars - M. - 1963, S. 37-50.
9. Erichov M. L. Interference (trimming) in transmissions formed by the method of enveloping with two parameters // News of higher educational institutions. Engineering - 1966, No. 7 - S. 5-9.