УДК 577.3.01;577.38
ББК 28.071
Б 82

Борисов А.В.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и экспериментальной физики физического факультета Томского государственного университета, тел. (8822)52-98-98, e-mail: borisov@phys.tsu.ru
Трифонов А.Ю.
Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики и математической физики факультета естественных наук и математики Томского политехнического университета, тел. (8822) 41-89-17, e-mail: trifonov@mph.phtd.tpu.edu.ru
Шаповалов А.В.
Доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической физики физического факультета Томского государственного университета, тел. (8822) 52-98-43, e-mail: shpv@phys.tsu.ru

Влияние нелинейной диффузии на одномерную реакционно-диффузионную динамику с нелокальным самодействием[§]

(Рецензирована)

Аннотация

Одномерная динамика пространственно локализованных начальных распределений плотности среды описывается обобщенным реакционно-диффузионным уравнением Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова с квадратично нелинейным нелокальным самодействием и нелинейной диффузией (коэффициент диффузии линейно зависит от плотности). Численными методами исследовано влияние нелинейной диффузии на динамику пространственно локализованных начальных распределений. Проведена редукция исходного уравнения по степеням размера области нелокального самодействия. Для редуцированного уравнения получено частное решение в аналитическом виде.

Ключевые слова: *реакционно-диффузионное уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова, численные методы, нелинейные системы, самодействие*

Borisov A.V.
Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Department of General and Experimental Physics, Physics Department, Tomsk State University, ph. (8322)52-98-98, e-mail: borisov@phys.tsu.ru
Trifonov A.Yu.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of High Mathematics and Mathematical Physics Department of Natural Sciences and Mathematics Faculty, Tomsk Polytechnic University, ph. (8322) 41-89-17, e-mail: trifonov@mph.phtd.tpu.edu.ru
Shapovalov A.V.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Physics Department of Physics Faculty at Tomsk State University, ph. (8322) 52-98-43, e-mail: shpv@phys.tsu.ru

Influence of non-linear diffusion on the one-dimensional reaction-diffusion dynamics with nonlocal self-interaction

Abstract

The one-dimensional dynamics of space localized initial distributions of density of medium is described by extended reaction-diffusion Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov equation with quadratic non-linear nonlocal self-interaction and non-linear diffusion (the diffusion coefficient linearly depends on density). The influence of non-linear diffusion on dynamics of space localized initial distributions with numerical methods is investigated. The reduction of initial equation on degrees of the field size of nonlocal self-interaction ρ is realized.

[§] *Работа выполнена при частичной финансовой поддержке АВЦП Министерства образования и науки РФ № 2.1.1/3436; ФЦП «Научные и научно педагогические кадры инновационной России», контракты; № 02.740.11.0238; П691; П798.*

For the reduced equation a special solution is obtained in explicit form.

***Key words**: reaction-diffusion Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov equation, numerical methods, nonlinear systems, self-interaction.*

1. Введение

Динамика открытых нелинейных систем определяется разномасштабными механизмами внутреннего взаимодействия подсистем, составляющих систему (самодействием), обменом энергией, веществом и информацией с окружающей средой, процессами самоорганизации. В динамическом поведении подобных систем наблюдается способность адаптироваться к изменяющимся условиям посредством количественного и качественного изменения своей структуры, что, в частности, проявляется в формировании упорядоченных пространственно-временных структур. Примером последних могут служить структуры, возникающие в процессе роста колоний микроорганизмов [1], автоволны [2, 3] в возбудимых средах и др.

Математические модели, описывающие возникновение и эволюцию пространственно-временных структур, строятся на основе уравнений типа «реакция-диффузия» [1−4]. Базовым уравнением реакционно-диффузионного типа (РД-типа), описывающим динамику популяции одного вида микроорганизмов, служит известное уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова (ФКПП), в котором кинетика моделируется локальными нелинейными членами, а диффузия определяет пространственное распределение популяции [5, 6]. В модель ФКПП включены основные механизмы популяционной динамики, однако ряд существенных факторов, влияющих на возникновение пространственной неоднородности в распределении популяции, не учитывается. Чтобы расширить возможности описания популяционной динамики, такие факторы, как окружение особи в популяции метаболитами и продуктами лизиса, подвижность микроорганизмов, межклеточные коммуникации в уравнении ФКПП локальные конкурентные потери заменяются квадратично нелинейным нелокальным оператором, имеющим вид самодействия [7]. Представляет также интерес исследование влияния нелинейной диффузии на популяционную динамику [8].

Для исследования обобщенной модели ФКПП разрабатываются аналитические и численные методы. В [9] развит формализм квазиклассических асимптотик для обобщенного уравнения ФКПП, в котором учитывается нелокальное взаимодействие и нелокальный дрейф. В [10] численными методами исследовано одномерное нелокальное уравнение ФКПП с постоянным коэффициентом диффузии, в котором ядро нелокального оператора выбрано в виде гауссовой функции и в виде прямоугольника.

В данной работе численными методами исследовано влияние нелинейной диффузии на динамику пространственно локализованных начальных распределений в рамках обобщенной модели ФКПП с нелокальным самодействием в области конечного размера и коэффициентом диффузии, линейно зависящим от популяционной плотности. Проведена редукция исходного уравнения по степеням размера области нелокального самодействия ρ. Для редуцированного уравнения в первом порядке по ρ получено частное решение в аналитическом виде.

2. Уравнение модели и функции влияния

Обобщенное одномерное уравнение ФКПП с нелокальным самодействием и нелинейной диффузией запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = (D+\eta\, u(x,t))\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + a\, u(x,t) - \kappa u(x,t)\int_{-\infty}^{\infty} b(x,y)u(y,t)dy\,. \qquad (1)$$

Здесь кинетическая переменная $u(x,t)$ (массовая плотность или концентрация, отнесенная на единицу площади) зависит от времени t и пространственной координаты x. Коэффициент диффузии $D+\eta u(x,t)$ в рассматриваемой модели линейно зависит от кинетической переменной, где D − постоянный коэффициент диффузии, а η − параметр нелинейной диффузии. Отметим, что диффузия описывается выражением $(D+\eta u(x,t))\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$ и является нелинейной. Слагаемое $a\,u(x,t)$ описывает автокатализ (воспроизводство) популяции, параметр $a>0$ представляет собой темп роста величины $u(x,t)$. Конкурентные потери описываются квадратичным по плотности интегральным выражением с функцией влияния $b(x,y)$ и параметром нелинейности κ. Зависимость коэффициента $b(x,y)$ от пространственных координат (x,y) позволяет учитывать пространственную неоднородность условий протекания популяционных процессов, обусловленных внешними факторами. Будем также считать величины, входящие в уравнение (1), безразмерными.

Для одномерного уравнения (1) при $\eta=0$ динамика кинетической переменной $u(x,t)$ с функциями влияния

$$b(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp(-(x-y)^2/2\sigma^2) \tag{2}$$

и $b(x,y)=\theta(x-y+\sigma/2)-\theta(x-y-\sigma/2)$ численными методами изучалась в работе [10], где показано, что локализованное начальное распределение распространяется вдоль оси x в обе стороны от центра локализации с образованием серии локальных максимумов, что можно рассматривать как процесс формирования популяционной структуры в одномерном случае [7, 10].

В данной работе с помощью численных решений уравнения (1) исследовано влияние нелинейной диффузии на динамику локализованного начального распределения. Функция влияния b выбирается в виде (2) и в виде

$$b(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{3}\sigma}, & |x-y|\le\sqrt{3}\sigma,\\ 0, & |x-y|>\sqrt{3}\sigma.\end{cases} \tag{3}$$

В формулах (2) и (3) параметр σ^2 характеризует эффективный размер области нелокального взаимодействия. Проведен сравнительный анализ поведения $u(x,t)$ с функциями влияния (2) и (3) в зависимости от параметра η нелинейной диффузии.

3. Численные решения

Построим численные решения уравнения (1) с функциями влияния (2) и (3) с помощью метода конечных элементов [11]. В качестве начального условия выберем распределение с центром локализации в точке x_0 следующим образом:

$$u(x,0)=u_0(x)=\frac{f_0}{\sqrt{2\pi\sigma_0}}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}\right). \tag{4}$$

Здесь параметр σ_0^2 характеризует степень локализации функции $u(x,0)$, f_0 – амплитуда.

В терминах популяционной динамики функция $u(x,0)$ вида (4) задает начальное распределение плотности популяции при условии инокуляции в окрестность точки x_0.

Численные решения уравнения (1) строились в симметричной области $[-L,L]$, на отрезке времени $[0,T_0]$ при следующих значениях параметров уравнения: $D=0,001$, $a=1$, $\kappa=1$, $\sigma_0=0,1$. Амплитуда начального распределения выбиралась равной $f_0=1$.

Численное моделирование при различных значениях параметра η показало, что в динамике функции $u(x,t)$ наблюдаются качественные изменения под влиянием нелинейной диффузии по сравнению с динамикой, рассмотренной в [10] при $\eta=0$.

Как отмечено выше, в [10] показано, что в случае функции влияния вида (2) из локализованного в окрестности заданной точки x_0 на оси x начального распределения $u_0(x)$ последовательно возникают локальные максимумы в центре распределения, которые в дальнейшем делятся на два локальных максимума, движущихся в противоположные стороны. Для функции влияния вида (3) возникает пространственно периодическая структура с одинаковыми по форме и параметрами пиками. Такой характер динамики рассматривается как процесс формирования пространственной структуры. В [12, 13] было отмечено, что в процессе формирования структур за некоторое характерное время τ (названное временем релаксации) начальные распределения с различными значениями f_0 и σ_0 трансформируются в распределение $\bar{u}(x)$, имеющее один и тот же вид для различных f_0 и σ_0. Распределение $\bar{u}(x)$ симметрично относительно точки локализации начального распределения x_0. Далее при $t>\tau$ происходит формирование локальных максимумов.

Рассмотрим динамику начального распределения (4) при $\eta\neq 0$.

Пусть коэффициент η положителен и мал. В этом случае динамика формирования структур подобна динамике, описанной в работе [10]. Отметим, что положительное значение коэффициента η означает усиление диффузии в области увеличения концентрации (плотности) популяции.

Начальное распределение вида (4) за время релаксации τ преобразуется в симметричное распределение $\bar{u}(x)$ с максимумом в точке x_0 подобно тому, как это имеет место при $\eta=0$. Распределения $\bar{u}(x)$, образующиеся за время τ, при различных значениях амплитуды начального распределения, мало отличаются друг от друга. Далее, в зависимости от значений параметров уравнения (1) и вида функции влияния $b(x,y)$ реализуются два сценария динамики:

1. Центральный максимум распределения разделяется на два локальных максимума, которые движутся в разные стороны относительно друг друга. В центре распределения возникает локальный максимум, который, в свою очередь, разделяется на два локальных (вторичных) максимума меньшей величины.

2. При разделении максимума распределения образуется несколько максимумов, а возникновение последующих (вторичных) максимумов, в свою очередь, происходит при делении крайних максимумов. При этом движения максимумов не наблюдается, а происходит лишь их сужение и уменьшение минимумов между ними.

Процесс образования центрального максимума и последующее образование вторичных максимумов продолжается далее.

Численные расчеты показали, что увеличение параметра η приводит к уменьшению разности между первичными и вторичными максимумами, а при достижении некоторого значения $\eta=\eta_{\max}(D,a,\kappa,\sigma)$ формирования описанных выше структур не

происходит. Вместо формирования локальных максимумов начальное распределение (4) трансформируется к виду $u(x,t)$, показанному на рис. 1.

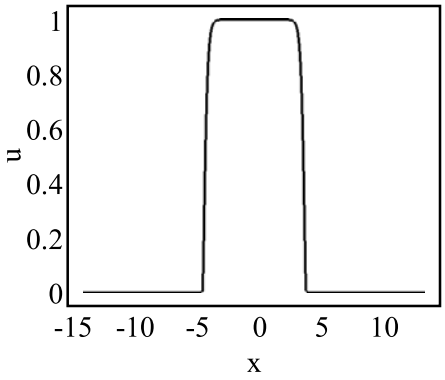


Рис. 1. Решение $u(x,t)$ уравнения (1) в момент времени $t=50$,
при $\eta=0,04>\eta_{\max}\approx 0,02$, $x_0=0$ с функцией влияния вида (2) и $\sigma=0,2$.
В случае функции влияния вида (3) решение выглядит аналогично

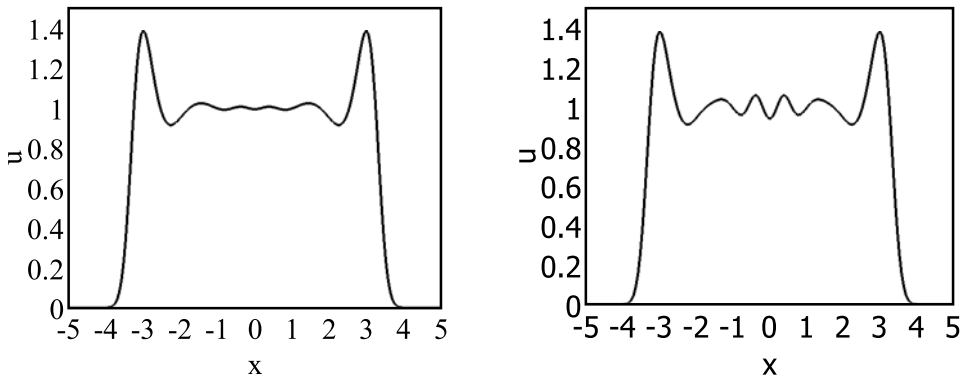


Рис. 2. Вид решения уравнения (1) с функцией влияния (2) в момент времени $t=50$,
при $\sigma=0,4$; на левом рисунке $\eta=0$, а на правом рисунке $\eta=-0.0006>\eta_{\min}$

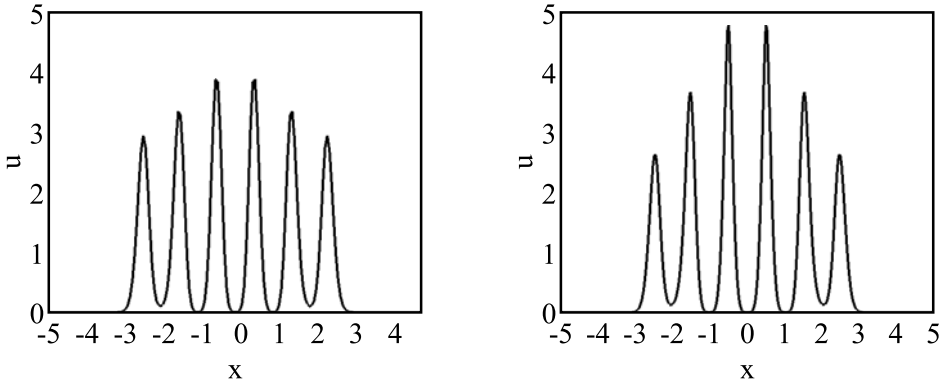


Рис. 3. Вид решения уравнения (1) с функцией влияния (3) в момент времени $t=40$,
при $\sigma=0,4$; на левом рисунке $\eta=0$, а на правом рисунке $\eta=-0.0002>\eta_{\min}$
Очевидно, что величина параметра η в случаях, показанных на рис. 2 и рис. 3,
влияет на величину вторичных максимумов распределения $u(x,t)$

Рассмотрим динамику начального распределения (4) при отрицательных значениях коэффициента нелинейной диффузии η, когда общий коэффициент диффузии $D+\eta u(x,t)\geq 0$. Для этого положим

$$\eta \geq -\frac{D}{\sup\limits_{(x,t)} u(x,t)} = \eta_{\min}.$$

При отрицательных и малых по модулю η выражение $\eta u(x,t)$ в коэффициенте диффузии можно рассматривать как вклад в диффузию от интегрального члена в уравнении (1), что будет проиллюстрировано в следующем пункте. В этом случае, в зависимости от величины $\eta < 0$, динамика формирования структур качественно изменяется по сравнению со случаем $\eta > 0$. На рис. 2 показано решение уравнения (1) с начальным условием (4) при $x_0 = 0$ с функцией влияния вида (2), а на рис. 3 − с функцией влияния вида (3). Для расчетных значений параметров использована оценка $\eta_{\min} \approx -0.001$.

4. Разложение нелокального уравнения ФКПП по размеру области нелокального взаимодействия

Запишем функцию влияния в следующем виде

$$b(x,y) = b(|\rho|), \qquad \rho = y - x, \tag{5}$$

где функция $b(\rho)$ убывает при $\rho \to \infty$ так, что

$$f_n = \int_{-\infty}^{\infty} \rho^n b(|\rho|)\, d\rho < \infty, \quad n = 0, \ldots, \infty. \tag{6}$$

Будем считать, что область, в которой функция (5) существенно отлична от нуля, мала. Для функций (2), (3) это означает малость σ. Интеграл, описывающий нелокальное взаимодействие в уравнении (1), разложим по степеням размера области взаимодействия. Предположим, что функция $b(\rho)$ отлична от нуля в малой окрестности точки $\rho_0 = 0$. Положив в функции $u(y,t) = u(x+\rho,t)$ малым $|\rho|$, подставим в (1) разложение

$$u(y,t) = u(x+\rho,t) = u(x,t) + \rho \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) + \frac{1}{2!} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + \ldots .$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = &\left(D - (\kappa f_2 / 2 - \eta) u(x,t)\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + a\, u(x,t) - \\ &- \kappa f_0 u^2(x,t) - \kappa f_1 u(x,t) \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) - \kappa u(x,t) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n u(x,t). \end{aligned} \tag{7}$$

Для функций влияния (2) и (3) f_n имеет следующий вид:

$$f_{2n} \equiv f_{2n}^e = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) 2^n \sigma^{2n},$$

$$f_{2n}(t) \equiv f_{2n}^g = \frac{1}{1+2n} 3^n \sigma^{2n},$$

$$f_{2n+1}^e = f_{2n+1}^g = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots .$$

Здесь $\Gamma(x)$ − гамма функция.

Очевидно, что $f_0^e = f_0^g = 1$, $f_2^e = f_2^g = \sigma^2$, $f_4^e \neq f_4^g$. Ограничимся в уравнении (7) первыми тремя членами в правой части, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \Big(D - (\kappa\sigma^2/2 - \eta)u(x,t)\Big)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + a(t)u(x,t) - \kappa u^2(x,t). \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что при $\eta = 0$ нелокальность в уравнении (1) дает отрицательный вклад в коэффициент диффузии в виде линейной зависимости от плотности $u(x,t)$. Заметим, что при $\eta = \frac{1}{2}\kappa\sigma^2$ уравнение (8) переходит в известное уравнение ФКПП [5, 6].

В общем случае не удается проинтегрировать уравнение (8). Найдем частное решение этого уравнения в разделенных переменных. Положим $u(x,t) = X(x)T(t)$ в уравнении (8), получим

$$X(x)\frac{\partial}{\partial t}T(t) = \left(a - \frac{D\kappa}{\kappa\sigma^2/2 - \eta}\right)X(x)T(t) +$$

$$+\Big(D - (\kappa\sigma^2/2 - \eta)X(x)T(t)\Big)T(t)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{\kappa\sigma^2/2 - \eta}\right)X(x).$$

Подчиним функцию $X(x)$ уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{\kappa\sigma^2/2 - \eta}\right)X(x) = 0, \quad (9)$$

тогда для функции $T(t)$ получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}T(t) = \left(a - \frac{D\kappa}{\kappa\sigma^2/2 - \eta}\right)T(t). \quad (10)$$

Решив уравнения (9), (10), найдем частное решение уравнения (8) при условии $\kappa\sigma^2/2 > \eta$:

$$u(x,t) = u_0 \cos\big(\omega(x - x_0)\big)\exp\big((a - D\omega^2)t\big), \quad (11)$$

где $\omega^2 = \frac{\kappa}{\kappa\sigma^2/2 - \eta}$. Из соображений неотрицательности плотности положим, что $u(x,t)$ описывается выражением (11) при $-\pi/2\omega < (x - x_0) < \pi/2\omega$ и равно нулю при $(x - x_0) < -\pi/2\omega$, $(x - x_0) > \pi/2\omega$. В точках $x_0 \pm \pi/2\omega$ производная по x имеет разрыв, и решение в окрестностях этих точек имеет особенность. При $a - D\omega^2 > 0$ функция $u(x,t)$ со временем растет, а при $a - D\omega^2 < 0$ − убывает, оставаясь локализованной на интервале $\big(x_0 - \pi/2\omega,\ x_0 + \pi/2\omega\big)$.

Уравнение (8), полученное из уравнения (1) в результате разложения интеграла, совпадает для функций влияния $b(x,y)$ вида (2) и (3) (вклад в коэффициент диффузии от разложения интегрального члена одинаков и равен $-\frac{1}{2}\kappa\sigma^2 u(x,t)$ для обеих функ-

ций $b(x,y)$). С другой стороны, согласно результатам работы [10], характер динамики $u(x,t)$, определяемой уравнением (1) (при $\eta = 0$), для функции влияния $b(x,y)$ вида (2) отличается от динамики $u(x,t)$ для функции влияния $b(x,y)$ вида (3). Очевидно, различия в динамике плотности $u(x,t)$, описываемой уравнением (7), в зависимости от вида функции влияния будут проявляться, если в (7) учесть члены порядка $n \geq 2$ разложения по степеням ρ.

Построим численные решения уравнения (7) с функциями влияния (2) и (3), оставив в разложении слагаемое с коэффициентом f_4 следующего порядка, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \left(D - (\kappa f_2(t)/2 - \eta)u(x,t)\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + a(t)u(x,t) - \\ -\kappa f_0(t)u^2(x,t) - \kappa u(x,t)\frac{1}{4!}f_4(t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 u(x,t). \qquad (12)$$

Для функции влияния вида (2) $f_4^e = 3\sigma^4$, а для (3) $f_4^g = 1{,}8\sigma^4$.

Численные решения уравнения (12) показывают, что происходит формирование множества локальных максимумов (рис. 4), как и в случае уравнения (1). Однако, сравнивая решения уравнения (1) и (12), можно заключить, что в отличие от решений, полученных для уравнения (1), в случае уравнения (12) эти максимумы растут со временем, превышая величину соответствующих максимумов решения уравнения (1). Отметим, что образование максимумов в случае уравнения (12) происходит по истечении времени релаксации τ, а на промежутке меньшем τ поведение $u(x,t)$ хорошо описывается уравнением (8).

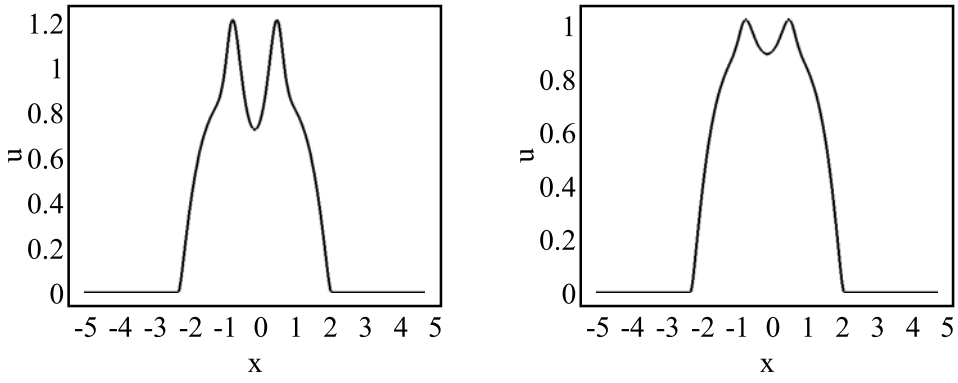


Рис. 4. Вид решения уравнения (12) с функцией влияния (2) на левом рисунке, с функцией влияния (3) на правом рисунке в момент времени $t = 14$, при $\sigma = 0{,}02$, $\eta = 0{,}2$

Проведенный последовательный учет вклада нелокального взаимодействия и нелинейной диффузии показывает, что формирование пространственно неоднородного распределения плотности определяется нелокальным взаимодействием.

Заключение

В работе исследовано совместное влияние нелокального взаимодействия и нелинейной диффузии на формирование пространственно неоднородных распределений плотности в популяционной модели, обобщающей известную модель Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова. Начальное распределение в процессе эволюции

может проходить характерные стадии. Существование этих стадий обусловлено нелокальностью взаимодействия и балансом между параметрами $D, \eta, a, \kappa, \sigma$ в уравнении (1). Характерным является последовательное возникновение локальных максимумов, которое можно усилить либо подавить, изменяя параметр η.

На формирование пространственной структуры существенное влияние оказывает нелокальное взаимодействие. Дополнительно проведенные исследования приводят к выводу о том, что влияние нелокального взаимодействия на поведение функции $u(x,t)$ тем больше, чем больше промежуток времени Δt, при котором происходят процессы, описываемые интегральным членом в уравнени (1). Однако это влияние проявляется только при определенном соотношении параметров уравнения $D, \eta, a, \kappa, \sigma$.

Численное решение уравнения (8) для начальной функцией $u_0(x)$ вида (11), взятой при $t = 0$, показало, что точное решение (11) уравнения (8) не является устойчивым и представляет интерес лишь на первой стадии эволюции функции $u(x,t)$ на временах меньших времени релаксации.

Примечания:

1. Murray J.D. Mathematical Biology. I. An Introduction (Third Edition). N.Y., Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. 551 p.
2. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. 240с.
3. Ванаг В.К. Диссипативные структуры в реакционно-диффузионных системах / Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». М.; Ижевск, 2008. 300 с.
4. Grindrod P. The theory and application of reaction-diffusion equations. Oxford: Clarendon Press, 1996. 275 p.
5. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes // Annual Eugenics. 1937. Vol. 7. P. 255-369.
6. Колмогоров А.Н., Петровский Н.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика. 1937. Т. 1, № 6. С. 1-16.
7. Fuentes M.A., Kuperman M.N., Kenkre V.M. Nonlocal interaction effects on pattern formation in population dynamics // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91. P. 158104-1-158104-4.
8. Белотелов Н.В., Лобанов А.И. Популяционные модели с нелинейной диффузией // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, №. 12. С. 43-56.
9. Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Одномерное уравнение Фишера-Колмогорова с нелокальной нелинейностью в квазиклассическом приближении // Известия вузов. Физика. 2009. Т. 52. № 9. С. 14-23.
10. Численное моделирование одномерной популяционной динамики с нелокальным взаимодействием / А.В. Борисов [и др.] // Известия Томского политехнического университета. 2009. Т. 315. № 2. С. 24-28.
11. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 318 с.
12. Борисов А.В., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Двумерная динамика распределений с одним и двумя центрами локализации в нелокальной реакционно-диффузионной модели // Известия Томского политехнического университета. 2010. Т. 316, № 2. С. 54-82.
13. Борисов А.В., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Формирование диссипативной структуры в двумерной популяционной динамике с нелокальным взаимодействием // Известия Томского политехнического университета. 2010. Т. 316, № 2. С. 50-54.