УДК 517.925

Э.Х. Назиев, А.Х. Назиев, Г.И. Келейникова

ОБ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПОЛНОЙ ПРОБЛЕМЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ (Часть 2) [*]

Известно, что нахождение решений однородной линейной дифференциальной системы с постоянной матрицей A сводится к алгебраической задаче нахождения нормальной жордановой формы J матрицы A и определения матрицы P такой, что $J = P^{-1}AP$. Нахождение матрицы J опирается на теорию элементарных делителей характеристической матрицы $A - \lambda E$, что приводит к так называемой *полной проблеме собственных значений*, состоящей в нахождении всех собственных значений и соответствующих им собственных векторов матрицы A. Решение этой проблемы даже в случаях систем не очень высоких порядков сопряжено со значительными трудностями, возникающими уже на стадии получения характеристического уравнения путем развертывания определителя характеристической матрицы. В 1969 году Р. Беллман [1] писал, что “в настоящее время не имеется простых методов нахождения собственных значений и собственных векторов матриц большого размера”. За минувшие с тех пор тридцать лет существенных изменений не произошло. В настоящей работе мы пытаемся продвинуться в решении указанной проблемы, изменив обычный порядок действий. Обычно сначала ищут собственные значения, затем – собственные векторы. Мы идём в обратном направлении.

В первой части были изложены общие результаты. Вторая часть посвящена подробному рассмотрению примеров.

однородная линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, полная проблема собственных значений, однородная линейная группа, инфинитезимальный оператор, однопараметрическая подгруппа.

5. (Продолжение). а) Легко указать общий интеграл системы (1.10), которой соответствует каноническая форма определяющей матрицы (2.4) с клетками (2.5).

Действительно, так как каждая из подсистем системы (1.10) интегрируется отдельно и все они имеют одинаковую структуру, достаточно указать общий интеграл системы

$$\dot{z}^1 = \lambda z^1, \dot{z}^2 = z^1 + \lambda z^2, \ldots, \dot{z}^l = z^{l-1} + \lambda z^l,$$

которой соответствует канонический оператор

$$\widetilde{X}_0\widetilde{f} = \lambda\left(z^1\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^1} + \ldots + z^l\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^l}\right) + z^1\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^2} + \ldots + z^{l-1}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial z^l} \equiv \lambda_1\widetilde{X}_1\widetilde{f} + \widetilde{X}_2\widetilde{f}$$

[*] Окончание. Начало (Часть 1) см.: Вестник РГУ. 2009. Вып. 1, № 1. С. 115–136.

и каноническая матрица

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} z^1 & z^2 & \dots & z^l \\ 0 & z^1 & \dots & z^{l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z^1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае имеем l функций

$$u^1 = \ln z^1, \quad u^2 = \frac{z^2}{z^1}, \quad u^3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{z^1}\right)^2 + \frac{z^3}{z^1}, \dots, \quad u^l = (-1)^l \frac{1}{l-1}\left(\frac{z^2}{z^1}\right)^{l-1} + \dots + \frac{z^l}{z^1},$$

соответствующих единственной клетке матрицы $\widetilde{\mathbf{M}}$ порядка l. Положив

$$\widetilde{u} = \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_l u^l,$$

находим

$$\widetilde{X}_0 \widetilde{u} = \lambda\alpha_1 + \alpha_2.$$

Равенство

$$\lambda\alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

при выполнении которого имеет место тождество $\widetilde{X}_0 \widetilde{u} \equiv 0$, удовлетворяется следующими $l-1$ наборами значений $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$: 1, $-\lambda$, 0,…, 0; 0, 0, 1, 0,…, 0;…; 0, 0,…, 1. Таким образом, имеем $l-1$ линейно независимых решений уравнения $\widetilde{X}_0 \widetilde{f} = 0$:

$$\widetilde{u}^1 = u^1 - \lambda u^2, \quad \widetilde{u}^2 = u^3, \dots, \quad \widetilde{u}^{l-1} = u^l.$$

Приравнивая эти решения произвольным постоянным, получаем $l-1$ независимых первых интегралов указанной выше системы дифференциальных уравнений

$$\ln z^1 - \lambda \frac{z^2}{z^1} = C^1, -\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{z^1}\right)^2 + \frac{z^3}{z^1} = C^2,$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{z^2}{z^1}\right)^3 - \frac{z^2 z^4}{\left(z^1\right)^2} + \frac{z^4}{z^1} = C^3, \dots, (-1)^l \frac{1}{l-1}\left(\frac{z^2}{z^1}\right)^{l-1} + \dots + \frac{z^l}{z^1} = C^{l-1},$$

образующих вместе с равенством

$$\ln z^1 - \lambda t = C^0,$$

где C^0 – произвольная постоянная, ее общий интеграл. Общий интеграл системы (1.10) составляется из общих интегралов m ее подсистем рассмотренного вида, на которые она распадается.

Общий интеграл системы (1.1) получается из общего интеграла системы (1.10) переходом к переменным $x^1, \dots, x^n$ при помощи равенств (1.9). Общее решение системы (1.1) получается из ее общего интеграла после разрешения последнего относительно указанных переменных.

б) Можно поступить иначе. Записывая уравнения

$$\frac{dz^{k_1+1}}{\lambda_1 z^{k_1+1}}=\frac{dz^{k_2+1}}{\lambda_2 z^{k_2+1}}=\ldots=\frac{dz^{k_{m-1}+1}}{\lambda_{m-1} z^{k_{m-1}+1}}=\frac{dz^{k_m+1}}{\lambda_m z^{k_m+1}},$$

представляющие собой часть системы дифференциальных уравнений в симметричной форме, соответствующей системе (1.10), легко понять, что, например, равенства

$$\frac{\left(z^{k_2+1}\right)^{\lambda_1}}{\left(z^{k_1+1}\right)^{\lambda_2}}=\widetilde{C}^1,\ \frac{\left(z^{k_3+1}\right)^{\lambda_1}}{\left(z^{k_1+1}\right)^{\lambda_3}}=\widetilde{C}^2,\ldots,\ \frac{\left(z^{k_{m-1}+1}\right)^{\lambda_1}}{\left(z^{k_1+1}\right)^{\lambda_m}}=\widetilde{C}^{m-1},$$

где $\widetilde{C}^1,\widetilde{C}^2,\ldots,\widetilde{C}^{m-1}$ – произвольные постоянные, определяют первые интегралы системы (1.10). Кроме того, легко обнаруживаются, например, интегрируемые комбинации

$$\frac{dz^{k_1+1}}{\lambda_1 z^{k_1+1}}=\frac{d\left(z^{k_2+1}z^{k_3+1}\right)}{(\lambda_2+\lambda_3)\left(z^{k_2+1}z^{k_3+1}\right)},\ \ldots,\ \frac{dz^{k_1+1}}{\lambda_1 z^{k_1+1}}=\frac{d\left(z^{k_{m-1}+1}z^{k_m+1}\right)}{(\lambda_{m-1}+\lambda_m)\left(z^{k_{m-1}+1}z^{k_m+1}\right)},$$

дающие первые интегралы системы (1.10) вида

$$\frac{\left(z^{k_2+1}z^{k_3+1}\right)^{\lambda_1}}{\left(z^{k_1+1}\right)^{\lambda_1+\lambda_2}}=\hat{C}^1,\ldots,\ \frac{\left(z^{k_{m-1}+1}z^{k_m+1}\right)^{\lambda_1}}{\left(z^{k_1+1}\right)^{\lambda_{m-1}+\lambda_m}}=\hat{C}^k \qquad (k=C_{l-1}^2),$$

где $\hat{C}^1,\ldots,\hat{C}^k$ – произвольные постоянные, и другие интегрируемые комбинации для трех, четырех, … переменных z^{k_s+1} $(s=1,..,m)$.

Таким образом, можно указать следующий алгоритм нахождения общего интеграла и общего решения системы (1.1):

– находим наиболее удобную совокупность $m-1$ независимых первых интегралов системы (1.10), пользуясь соответствующими интегрируемыми комбинациями, полученными при помощи указанных выше дифференциальных уравнений;

– в качестве остальных $n-m$, не зависящих явно от переменной t независимых первых интегралов системы (1.10), берем интегралы, указанные в п. а);

– в качестве интеграла, вводящего в рассмотрение независимую переменную t, берем любой интеграл уравнения $\widetilde{X}_0\widetilde{f}=1$.

Далее поступаем так, как в п. а.

6. Приступая к иллюстрации полученных результатов, отметим, что, в силу указанного в начале п. 1 взаимно однозначного соответствия, всем рассматриваемым ниже матрицам соответствуют линейные однородные дифференциальные системы с постоянными коэффициентами, которые мы с целью экономии места не выписываем.

Пример 1. Рассмотрим матрицу

$$A_0 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для составления характеристического уравнения данной матрицы вычисляем все ее степени вплоть до четвертой. Получаем:

$$A_0^0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0^1 = A_0 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0^2 = \begin{pmatrix} 14 & -6 & -10 & 6 \\ -4 & 9 & 8 & -5 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & 8 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_0^3 = \begin{pmatrix} 46 & -26 & -38 & 26 \\ -12 & 26 & 24 & -18 \\ 19 & -7 & -11 & 7 \\ -12 & 18 & 24 & 10 \end{pmatrix}, \quad A_0^4 = \begin{pmatrix} 146 & -98 & -130 & 98 \\ -32 & 72 & 64 & -56 \\ 65 & -33 & -49 & 33 \\ -32 & 56 & 64 & -40 \end{pmatrix}.$$

Матричное уравнение (3.2) в нашем случае $n = 4$ имеет вид

$$\alpha_4 E + \alpha_3 A_0^1 + \alpha_2 A_0^2 + \alpha_1 A_0^3 + \alpha_0 A_0^4 = \mathrm{O}.$$

Матрица соответствующей этому уравнению системы уравнений (3.3) после отбрасывания очевидных повторений имеет вид a) и после элементарных преобразований, выполняемых над строками этой матрицы, принимает вид b):

$$\text{a)} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 14 & 46 & 146 \\ 0 & -1 & -6 & -26 & -98 \\ 0 & -2 & -10 & -38 & -130 \\ 0 & -1 & -4 & -12 & -32 \\ 1 & 3 & 9 & 26 & 72 \\ 0 & 2 & 8 & 24 & 64 \\ 0 & -1 & -1 & -18 & -56 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -33 \\ 1 & 1 & -1 & -11 & -49 \\ 1 & 1 & -1 & -10 & -40 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{b)} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & 0 & 156 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -106 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Из вида последней матрицы следует, что среди указанных и, следовательно, и среди всех степеней данной матрицы A_0 всего три линейно независимые. Поэтому в соответствующей этой матрице системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_4 \quad -6\alpha_2 \quad +156\alpha_0 &= 0, \\ \alpha_3 + 5\alpha_2 \quad -106\alpha_0 &= 0, \\ \alpha_1 \quad +9\alpha_0 &= 0 \end{aligned}$$

два неизвестных коэффициента являются свободными. Желая получить коэффициенты характеристического многочлена данной матрицы, мы должны положить $\alpha_0 = 1$ и, например, $\alpha_4 = p_4 = \Delta(A_0) = 24$ [1], и тогда найдем $\alpha_3 = p_3$, $\alpha_2 = p_2$, $\alpha_1 = p_1$ из системы уравнений

$$\begin{aligned} 24 \quad -6p_2 \quad +156 &= 0, \\ p_3 + 5p_2 \quad -106 &= 0, \\ p_1 \quad +9 &= 0: \end{aligned}$$

$$p_1 = -9, \; p_2 = 30, \; p_3 = -44.$$

Таким образом, характеристическое уравнение данной матрицы имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 - 9\lambda^3 + 30\lambda^2 - 44\lambda + 24 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$.

Кроме того, мы найдем минимальный многочлен $\psi(\lambda)$ нашей матрицы, если в указанной выше системе уравнений положим $\alpha_0 = 0$ и, например, $\alpha_2 = 1$. Тогда получим $\alpha_3 = -5$, $\alpha_4 = 6$ и, следовательно,

$$\psi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6,$$

так что

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^2 \psi(\lambda).$$

Приступим теперь к нахождению собственных векторов данной матрицы. Легко обнаруживается линейная комбинация матриц E, A_0 и A_0^2:

$$A_0^2 - 4A_0 + 4E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}).$$

Матрицы (I) и (II), находящиеся в правой части полученного равенства, канонические. Легко проверить, что векторы (2, 0, 1, 0) и (0, 1, 0, 1) являются собственными векторами матрицы A_0, а векторы (1, –1, –1, 1) и (0, 1, 0, –1) – собственными векторами матрицы A_0^T.

Для нахождения жордановых базисов матриц A_0 и A_0^T воспользуемся определяющей матрицей, соответствующей линейно независимым (в чем нетрудно убедиться) матрицам E, (I), (II), A_0:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ 0 & y-w & 0 & y-w \\ 2(x-y-z+w) & 0 & x-y-z+w & 0 \\ 4x-y-2z+w & -x+3y+2z-w & x+z & -x+y+2z+w \end{pmatrix}$$

$$(x = x^1,\ y = x^2,\ z = x^3,\ w = x^4).$$

При помощи указанных в п. 2 элементарных преобразований приведем эту матрицу к каноническому виду. Для этого сначала воспользуемся тем, что векторы $\overline{\alpha}^1 = (1,-1,-1,1)$ и $\overline{\alpha}^2 = (0,1,0,-1)$ являются общими собственными векторами матриц, полученных транспонированием используемых матриц и имеет место легко проверяемое (см. теорему 7.1) равенство $\overline{\alpha}\overline{\xi} = \lambda\overline{\alpha}\overline{x}$, где $\overline{\xi} = A\overline{x}$, $\overline{\alpha}$ – собственный вектор матрицы A^T и λ – соответствующее ему собственное число: вычитаем из первого столбца второй и третий и прибавляем четвертый, одновременно вычитаем из третьего столбца четвертый:

$$\begin{pmatrix} x-y-z+w & y-w & z & w \\ 0 & 0 & 0 & y-w \\ x-y-z+w & 0 & x-y-z+w & 0 \\ 3(x-y-z+w) & 2(y-w) & x+z & -x+y+2z+w \end{pmatrix}.$$

Вычитаем первую строку из третьей и первую строку, умноженную на 3, из четвертой:

$$\begin{pmatrix} x-y-z+w & y-w & x & w \\ 0 & 0 & 0 & y-w \\ 0 & -(y-w) & x-y-2z+w & w \\ 0 & -(y-w) & x+z & -x+y+2z-2w \end{pmatrix}.$$

Вычитаем третью строку из четвертой и эту же строку прибавляем к первой:

$$\begin{pmatrix} x-y-z+w & 0 & x-y-z-w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y-w \\ 0 & -(y-w) & x-y-2z+w & -w \\ 0 & 0 & y-w & -x+y+2z-w \end{pmatrix}.$$

Наконец, переставляем вторую строку с третьей и четвертой, вычитаем первый столбец из третьего, прибавляем второй столбец к четвертому, умножаем третью строку на (–1):

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} x-y-z+w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-w & -x+y+2z-w & y \\ 0 & 0 & y-w & -x+y+2z-w \\ 0 & 0 & 0 & y-w \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} z^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & z^3 & z^4 \\ 0 & 0 & z^2 & z^3 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}.$$

Из вида полученной канонической матрицы следует, что форма $\overline{\alpha}^1\overline{x} = x-y-z+w$ (вектор $\overline{\alpha}^1 = (1,\ -1,\ -1,\ 1), \lambda_1 = 3$) имеет кратность, равную 1, а форма $\overline{\alpha}^2\overline{x} = y-w$ (вектор $\overline{\alpha}^2 = (0,\ 1,\ 0,\ -1), \lambda_2 = 2$) имеет кратность, равную 3. Векторы $\overline{\alpha}^3 = (-1,\ 1,\ 2,\ -1)$ и $\overline{\alpha}^4 = (0,1,0,0)$ являются присоединенными векторами матрицы A_0^T соответственно второго и третьего порядков.

Согласно указанному в п. 5 алгоритму б) общий интеграл линейной дифференциальной системы, соответствующей матрице A_0, можно определить равенствами

$$\ln(x-y-z+w) - 3t = C^0,\ \frac{(y-w)^3}{(x-y-z+w)^2} = C^1,$$

$$\ln(y-w) - 2\frac{-x+y+2z-w}{y-w} = C^2,\ \ -\frac{1}{2}\left(\frac{-x+y+2z-w}{y-w}\right)^2 + \frac{y}{y-w} = C^3.$$

Разрешая эти равенства относительно форм z^1, z^2, z^3, z^4, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} z^1 &\equiv x-y-z+w = \widetilde{C}^1 e^{3t}, \\ z^2 &\equiv y-w = \widetilde{C}^2 e^{2t}, \\ z^3 &\equiv x+y+2z-w = (\widetilde{C}^3 + \widetilde{C}^2 t)e^{2t}, \\ z^4 &\equiv y = (\widetilde{C}^4 + \widetilde{C}^3 t + \widetilde{C}^2 \frac{t^2}{2})e^{2t}, \end{aligned}$$

разрешая которые относительно $x,\ y,\ z$ и w, получаем общее решение соответствующей матрице A_0 системы в виде

$$x(\mathrm{t}) = 2\widetilde{C}^1 e^{3t} + (\widetilde{C}^2 + \widetilde{C}^3 + \widetilde{C}^2 t)e^{2t},$$

$$y(t) = (\widetilde{C}^4 + \widetilde{C}^3 t + \widetilde{C}^2 \frac{t^2}{2!})e^{2t},$$

$$z(t) = \widetilde{C}^1 e^{3t} + (\widetilde{C}^3 + \widetilde{C}^2 t)e^{2t},$$

$$w(\mathrm{t}) = (\widetilde{C}^4 - \widetilde{C}^2 + \widetilde{C}^3 t + \widetilde{C}^2 \frac{t^2}{2!})e^{2t}.$$

Образуем матрицу

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}^1 \\ \overline{\alpha}^2 \\ \overline{\alpha}^3 \\ \overline{\alpha}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и найдем ей обратную матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\overline{\beta}_1,\ \overline{\beta}_2,\ \overline{\beta}_3,\ \overline{\beta}_4)\,.$$

Векторы-столбцы $\overline{\beta}_1 = (2, 0, 1, 0)$, $\overline{\beta}_2 = (1, 0, 0, -1)$, $\overline{\beta}_3 = (1, 0, 1, 0)$ и $\overline{\beta}_4 = (0, 1, 0, 1)$ образуют жорданов базис матрицы A_0, взаимный с жордановым базисом $\overline{\alpha}^1, \overline{\alpha}^2, \overline{\alpha}^3, \overline{\alpha}^4$ матрицы A_0^T.

Построим канонические матрицы, соответствующие имеющему место разбиению на жордановы цепочки найденных взаимных базисов. Так как жорданов базис матрицы A_0^T состоит из двух цепочек (m = 2), образованных векторами $\overline{\alpha}^1$ $(\mathrm{l}_1 = 1)$ и $\overline{\alpha}^2, \overline{\alpha}^3, \overline{\alpha}^4$ $(l_2 = 3)$, то по формулам (1.32) находим:

$$A_1 = \overline{\beta}_1 \overline{\alpha}^1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \quad \overline{\beta}_2 \overline{\alpha}^2 + \overline{\beta}_3 \overline{\alpha}^3 + \overline{\beta}_4 \overline{\alpha}^4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \quad \overline{\beta}_3 \overline{\alpha}^2 + \overline{\beta}_4 \overline{\alpha}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \quad \overline{\beta}_4 \overline{\alpha}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Множество попарно перестановочных матриц, порождаемое этими матрицами, согласно формуле (1.31) для нашего случая определяется равенством

$$A = C^1 A_1 + (C^2 A_2 + C^3 A_3 + C^4 A_4).$$

Нетрудно убедиться, что при $C_0^1 = \lambda_1 = 3$, $C_0^2 = \lambda_2 = 2$, $C_0^3 = 1$, $C_0^4 = 0$ получаем данную матрицу A_0:

$$A_0 = 3A_1 + 2A_2 + A_3.$$

При $C_1^1 = 1$, $C_1^2 = 1$, $C_1^3 = C_1^4 = 0$ получаем разложение по каноническим матрицам единичной матрицы:

$$E = A_1 + A_2.$$

Пример 2. Рассмотрим матрицу

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Четвертая степень этой матрицы имеет вид

$$A_0^4=\begin{pmatrix}1&5&-5&-5\\0&1&0&-5\\0&5&-4&-5\\0&0&0&-4\end{pmatrix}.$$

Прибавляя к этой матрице матрицу 4E, получаем матрицу

$$A_0^4+4E=\begin{pmatrix}5&5&-5&-5\\0&5&0&-5\\0&5&0&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Каждая из матриц в правой части последнего равенства перестановочна с данной матрицей. Векторы $\overline{\beta}_1=(1,0,0,0)$ и $\overline{\beta}_2=(0,1,1,0)$ являются ее собственными векторами, а векторы $\overline{\alpha}^1=(1,1,-1,-1)$ и $\overline{\alpha}^2=(0,1,0,-1)$ – собственными векторами матрицы A_0^T. Указанным векторам соответствуют собственные числа $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$ матриц A_0 и A_0^T.

Для нахождения координат остальных собственных векторов матрицы A_0, воспользуемся равенством (4.3), используя вектор $\overline{\alpha}^1$:

$$\zeta^1+\zeta^2-\zeta^3-\zeta^4=0.$$

Из этого равенства находим

$$\zeta^4=\zeta^1+\zeta^2-\zeta^3,$$

так что произвольный собственный вектор первой из найденных выше матриц имеет вид

$$\overline{\zeta}=(\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3,\zeta^1+\zeta^2-\zeta^3),$$

где ζ^1,ζ^2,ζ^3 – произвольны. Осталось определить их таким образом, чтобы вектор $\overline{\zeta}$ был собственным вектором матрицы A_0.

Для этого воспользуемся равенством (4.4):

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&-1&1\\0&-2&1&3\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta^1\\\zeta^2\\\zeta^3\\\zeta^1+\zeta^2-\zeta^3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\zeta^1\\\zeta^2\\\zeta^3\\\zeta^1+\zeta^2-\zeta^3\end{pmatrix},$$

где λ также подлежит определению. После соответствующих вычислений, получаем систему линейных и однородных относительно ζ^1,ζ^2,ζ^3 уравнений с коэффициентами, зависящими от λ:

$$\begin{cases} (2-\lambda)\zeta^1 + \zeta^2 - \zeta^3 = 0, \\ \zeta^1 + (1-\lambda)\zeta^2 - 2\zeta^3 = 0, \\ 3\zeta^1 + \zeta^2 - (2-\lambda)\zeta^3 = 0, \\ -\lambda\zeta^1 + (1-\lambda)\zeta^2 - (1-\lambda)\zeta^3 = 0. \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет вид

$$G(\lambda) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 1 & -(2-\lambda) \\ -\lambda & 1-\lambda & -(1-\lambda) \end{pmatrix}.$$

Требуется найти значение λ, при котором ранг этой λ-матрицы равен 2.

Пользуясь элементарными преобразованиями λ-матриц [2], получаем λ-матрицу, эквивалентную записанной:

$$\widetilde{G}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2+3\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3-\lambda^2+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из вида матрицы $\widetilde{G}(\lambda)$ следует, что ее ранг, а следовательно, и ранг матрицы $G(\lambda)$ будет равен 2, если λ является одним из корней уравнения

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 2 = 0,$$

то есть при $\lambda_2 = -1$ и $\lambda_{34} = 1 \pm i$.

При $\lambda = \lambda_2 = -1$ указанная выше система сводится к двум уравнениям

$$\begin{cases} \zeta^1 + 2\zeta^2 - 2\zeta^3 = 0, \\ \zeta^2 - \zeta^3 = 0, \end{cases}$$

которые удовлетворяются значениями $\zeta^1 = 0,\ \zeta^2 = \zeta^3 = 1$. Тогда указанное выше выражение для ζ^4 дает $\zeta^4 = 0$ и мы получаем уже известный нам вектор $\overline{\beta}_2 = (0,\ 1,\ 1,\ 0)$.

При $\lambda_3 = 1 - i$ указанная выше система сводится к двум уравнениям

$$\begin{cases} \zeta^1 - i\zeta^2 - 2\zeta^3 = 0, \\ (1+3i)\zeta^2 + (3-i)\zeta^3 = 0. \end{cases}$$

Положив $\zeta^3 = 1$, находим $\zeta^2 = -i$, $\zeta^1 = 1$ и $\zeta^4 = -i$, так что имеем собственный вектор $\overline{\beta}_3 = (1,\ -i,\ 1,\ -i)$. При $\lambda_4 = 1 + i$ получаем комплексно-сопряженный вектор $\overline{\beta}_4 = (1,\ i,\ 1,\ i)$.

Координаты векторов $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \overline{\beta}_3, \overline{\beta}_4$ образуют соответствующие столбцы преобразующей матрицы

$$P = (\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \overline{\beta}_3, \overline{\beta}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i & i \end{pmatrix},$$

обращая которую, получаем матрицу

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1+i}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}^1 \\ \overline{\alpha}^2 \\ \overline{\alpha}^3 \\ \overline{\alpha}^4 \end{pmatrix},$$

строки которой дают соответствующие собственные векторы матрицы A_0^T: $\overline{\alpha}^1 = (1, 1, -1, -1)$, $\overline{\alpha}^2 = (0, 1, 0, -1)$, $\overline{\alpha}^3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1+i}{2}\right)$, $\overline{\alpha}^4 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-i}{2}\right)$.

Линейно независимым векторам $\overline{\alpha}^1, \overline{\alpha}^2, \overline{\alpha}^3, \overline{\alpha}^4$ соответствуют линейные формы

$$z^1 = x + y - z - w, \quad z^2 = y - w, \quad z^{3,4} = -y + z + w \pm iw.$$

Согласно указанному в п. 5 алгоритму б), равенства (напоминаем, что $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_{3,4} = 1 \mp i$)

$$\ln z^1 - t = C^0, \quad z^1 z^2 = C^1, \quad \frac{z^3 z^4}{\left(z^1\right)^2} = C^2, \quad \frac{\left(z^3\right)^{i+i}}{\left(z^4\right)^{1-i}} = C^3,$$

которые после подстановки в них указанных выражений для z^1, z^2, z^3, z^4 и некоторых несложных преобразований, принимают вид

$$\ln(x + y - z - w) - t = C^0, \quad (x + y - z - w)(y - w) = C^1,$$

$$\frac{\left(-y + z + w\right)^2 + w^2}{\left(x + y - z - w\right)^2} = C^2, \quad \left[\left(-y + z + w\right)^2 + w^2\right]^{\frac{1}{2}} e^{arctg\frac{w}{-y+z+w}} = C^3,$$

определяют общий интеграл системы дифференциальных уравнений, соответствующей матрице A_0. Разрешая эти равенства относительно x, y, z, w, получаем общее решение указанной системы в виде

$$x = \widetilde{C}^0 e^t + \mathrm{R} e^t \cos(t+\alpha),\ y = \widetilde{C}^1 e^{-t} - \mathrm{R} e^t \sin(t+\alpha),$$
$$z = \widetilde{C}^1 e^{-t} + \mathrm{R} e^t \cos(t+\alpha),\ w = -\mathrm{R} e^t \sin(t+\alpha), \qquad R \geq 0,$$

где $\widetilde{C}^0, \widetilde{C}^1, R$ и α – произвольные постоянные.

Пример 3. Построить множество систем линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка с постоянными коэффициентами, для которых функция

$$M(x,y,z) = (x+iy)(x-iy)z \ \ (x = x^1, y = x^2, z = x^3)$$

является определяющей.

Задача сводится к построению множества попарно перестановочных матриц, собственные векторы которых $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \overline{\beta}_3$ образуют систему векторов, взаимную с системой векторов

$$\overline{\alpha}^1 = (1, i, 0),\ \overline{\alpha}^2 = (1, -i, 0),\ \overline{\alpha}^1 = (0, 0, 1).$$

Последней соответствует матрица

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}^1 \\ \overline{\alpha}^2 \\ \overline{\alpha}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

обращение которой дает матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

так что

$$\overline{\beta}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}, 0\right),\ \ \overline{\beta}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, 0\right),\ \ \overline{\beta}_3 = (0,\ 0,\ 1).$$

Находим канонические матрицы, соответствующие взаимным системам векторов $\overline{\alpha}^1, \overline{\alpha}^2, \overline{\alpha}^3$ и $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \overline{\beta}_3$:

$$A_1 = \overline{\beta}_1 \overline{\alpha}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & 0 \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1^1 + iA_1^2,$$

$$A_2 = \overline{\beta}_2 \overline{\alpha}^2 = A_1^1 - iA_1^2, \qquad A_3 = \overline{\beta}_3 \overline{\alpha}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно формуле (1.31), все матрицы третьего порядка, общими собственными векторами которых являются векторы $\overline{\beta}_1$, $\overline{\beta}_2$, $\overline{\beta}_3$, определяются равенствами

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – выбираемые произвольно их собственные числа. Следовательно, множество систем дифференциальных уравнений, для которых указанная выше функция является определяющей, определяется равенством

$$\dot{\overline{x}} = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3)\overline{x} \qquad (\overline{x} = (x, y, z) - \text{вектор столбец}).$$

Положив $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i, \lambda_3 = -1$, находим матрицу

$$A_0 = (-1+i)(A_1^1 + iA_1^2) + (-1-i)(A_1^1 - iA_1^2) + (-1)A_3 =$$

$$= -2(A_1^1 + A_1^2) + A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

которой соответствует система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -x - y, \quad \dot{y} = x - y, \quad \dot{z} = -z.$$

Если же положить $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = -1$, то получим матрицу

$$A_0' = i(A_1^1 + iA_1^2) + (-i)(A_1^1 - iA_1^2) + (-1)A_3 = -2A_1^2 + A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

которой соответствует система

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = -z.$$

К предыдущей системе мы вернемся в следующем пункте.

Пример 4. Пусть

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ и, следовательно, } A_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем все матрицы, перестановочные с матрицей A_0, воспользовавшись системой (3.5).

Запишем сначала матрицу системы (3.6) применительно к нашему случаю, которую назовем *исходной*:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{rrr:rrr:rrr}
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
\hdashline
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0
\end{array}\right)
\end{array}.$$

Строка сверху напоминает о порядке следования неизвестных элементов матрицы А в системе (3.6). При помощи элементарных преобразований, выполняемых *только над строками* написанной матрицы, прямым и обратным ходами метода Гаусса эта матрица преобразуется в матрицу системы, эквивалентной системе (3.6):

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc:ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array} = (B_i^j)_1^3.$$

Из вида этой матрицы следует, что элементы a_1^3, a_2^3, a_3^3 можно задавать произвольно. Отделим столбцы, соответствующие этим элементам, сплошной вертикальной линией и у каждого ненулевого элемента, расположенного правее этой линии, изменим знак на противоположный. Это будет соответствовать тому, что в каждом уравнении эквивалентной системы все слагаемые, содержащие элементы a_1^3, a_2^3, a_3^3, перенесены в правую часть равенства.

Далее, отделив сплошной горизонтальной линией ненулевые строки от нулевых и отбросив последние строки за ненадобностью, поместим на их месте результаты вычислений. Именно в правой нижней клетке, вместо нулевой матрицы третьего порядка, можно поместить единичную матрицу третьего порядка, строки которой представляют три (из всех возможных) независимых набора произвольно выбираемых значений элементов a_1^3, a_2^3, a_3^3. Получаемые при этих значениях свободных параметров значения остальных элементов матрицы A^T поместим на соответствующих местах ниже и левее соответственно горизонтальной и вертикальной сплошных линий. Ясно, что осуществить эту операцию можно отражением относительно главной диагонали элементов, расположенных выше и правее соответственно горизонтальной и вертикальной сплошных линий. Таким образом, результаты всех вычислений компактно размещаются в пределах одной 9×9-матрицы, которую условимся называть *результирующей*:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc:ccc|ccc}
a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3
\end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccc:ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\
\hline
\frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 & -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 \\
\frac{3}{5} & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \\ \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3
\end{array}
\end{array}.$$

Строки, расположенные ниже сплошной горизонтальной линии, состоят из строк матриц A_1, A_2, A_3 расположенных последовательно слева направо вдоль одной горизонтальной линии, что отмечено соответствующими символами справа от каждой строки. Все три матрицы перестановочны между собой и с матрицей A_0, являющейся их линейной комбинацией с постоянными коэффициентами.

Следовательно, столбцы, находящиеся справа от сплошной вертикальной черты, состоят из столбцов матриц A_1^T, A_2^T, A_3^T, расположенных последовательно сверху вниз вдоль одной вертикальной прямой. Ясно, что эти матрицы перестановочны между собой и с матрицей A_0^T, являющейся их линейной комбинацией с постоянными коэффициентами.

Разумеется, предложенная схема вычислений не является единственно возможной. На месте единичной матрицы третьего порядка может быть расположена любая невырожденная матрица третьего порядка. При этом соответствующим образом изменятся и вычисления.

Образуя всевозможные линейные комбинации с постоянными коэффициентами строк матрицы, расположенной под сплошной горизонтальной чертой, будем получать всевозможные матрицы, перестановочные с матрицами A_1, A_2, A_3 (и с матрицей A_0). Например, вычитая из первой строки последнюю, получаем строку

$$-\frac{1}{5} \quad 0 \quad \frac{1}{5} \;\vdots\; \frac{3}{5} \quad 0 \quad -\frac{3}{5} \;\vdots\; 1 \quad 0 \quad -1,$$

дающую матрицу

$$A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

из вида которой следует, что вектор $\overline{\alpha}^1 = (1,\ 0,\ -1)$ является собственным вектором матрицы A_0^T, а вектор $\overline{\beta}_1 = (-\frac{1}{5},\ \frac{3}{5},\ 1)$ является собственным вектором матрицы A_0: $A_0\overline{\beta}_1 = (-1)\overline{\beta}_1$, $A_0^T\overline{\alpha}^1 = (-1)\overline{\alpha}^1$. Оба вектора соответствуют собственному числу $\lambda_1 = -1$.

Заметим, далее, что ранг матрицы B_3^2 равен 2. Это значит, что однородная система линейных уравнений

$$-\frac{3}{5}a_1^3 - \frac{1}{5}a_2^3 = 0, \quad -a_1^3 - a_2^3 - a_3^3 = 0, \quad \frac{3}{5}a_1^3 + \frac{1}{5}a_2^3 = 0$$

имеет ненулевое решение, например, $a_1^3 = 1$, $a_2^3 = -3$, $a_3^3 = 2$. Тогда четвертое, пятое и шестое уравнения с учетом предыдущих равенств дают $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = 0$, а из первых трех уравнений тогда находим $a_1^1 = 1$, $a_2^1 = -3$, $a_3^1 = 2$. Таким образом, получаем матрицу

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

так что вектор $\overline{\alpha}^2 = (1, -3, 2)$ является собственным вектором матрицы A_0^T, а вектор $\overline{\beta}_2 = (1, 0, 1)$ является собственным вектором матрицы A_0. Оба вектора соответствуют собственному числу $\lambda_2 = 2$.

Определяющая матрица, соответствующая попарно перестановочным матрицам A_1, A_2, A_3, имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 3x^1 + 5x^2 - 3x^3 & x^1 + 5x^2 \ - x^3 & 5x^2 \\ 4x^1 \qquad + x^3 & 3x^1 + 5x^2 - 3x^3 & 5x^1 \end{pmatrix}.$$

Нам известен собственный вектор $\overline{\alpha}^1 = (1, 0, -1)$ указанных матриц, так что можно, как и в примере 1, воспользоваться равенством $\overline{\alpha}\overline{\xi} = \lambda\overline{\alpha x}$: прибавляя к первому столбцу второй столбец, умноженный на 0, и третий столбец, умноженный на –1, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} x^1 - x^3 & x^2 & x^3 \\ 3(x^1 - x^3) & x^1 + 5x^2 \ - x^3 & 5x^2 \\ -x^1 + x^3 & 3x^1 + 5x^2 - 3x^3 & 5x^1 \end{pmatrix}.$$

Вычитаем из второй строки первую, умноженную на 3, и прибавляем первую строку к третьей:

$$\begin{pmatrix} x^1 - x^3 & x^2 & x^3 \\ 0 & x^1 + 2x^2 \ - x^3 & 5x^2 - 3x^3 \\ 0 & 3x^1 + 6x^2 - 3x^3 & 5x^1 \ + x^3 \end{pmatrix}.$$

Вычитаем из третьей строки вторую, умноженную на 3, и делим полученную третью строку на 5:

$$\begin{pmatrix} x^1 - x^3 & x^2 & x^3 \\ 0 & x^1 + 2x^2 - x^3 & 5x^2 - 3x^3 \\ 0 & 0 & x^1 - 3x^2 + 2x^3 \end{pmatrix}.$$

На этом преобразования определяющей матрицы можно прекратить, так как на главной диагонали полученной матрицы расположены линейно независимые формы

$$z^1 = x^1 - x^3, \quad z^2 = x^1 + 2x^2 - x^3, \quad z^3 = x^1 - 3x^2 + 2x^3,$$

соответствующие линейно независимым собственным векторам матрицы A_0^T

$$\overline{\alpha}^1 = (1, 0, -1) \ (\lambda_1 = -1), \quad \overline{\alpha}^2 = (1, -3, 2) \ (\lambda_2 = 2),$$
$$\overline{\alpha}^3 = (1, 2, -1) \ (\lambda_3 = 1) \ \ (A_0^T\overline{\alpha}^3 = \overline{\alpha}^3).$$

Пользуясь указанным в п. 5 алгоритмом б), можно записать общий интеграл системы дифференциальных уравнений, соответствующей матрице A_0, в виде

$$\ln(x^1 - x^3) - t = C^0, \quad (x^1 - 3x^2 + 2x^3)(x^1 - x^3)^2 = C^1,$$
$$\left(x^1 + 2x^2 - x^3\right)\left(x^1 - x^3\right) = C^2,$$

разрешая который относительно x^1, x^2, x^3, получаем общее решение указанной системы дифференциальных уравнений в виде

$$x^1 = 3\widetilde{C}^0 e^{-t} + 2\widetilde{C}^1 e^{2t} + 2\widetilde{C}^2 e^{t}, \quad x^2 = -3\widetilde{C}^0 e^{-t} + 3\widetilde{C}^1 e^{2t},$$
$$x^3 = -5\widetilde{C}^0 e^{-t} + 3\widetilde{C}^1 e^{2t} + 2\widetilde{C}^2 e^{t}.$$

Пример 5. Пусть

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ так что } A_0^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задачи, стоящие перед нами, те же, что и в примере 4.

Поступая аналогично предыдущему примеру, получим результирующую матрицу, которую мы поместим рядом с исходной матрицей, обозначив переход от исходной матрицы к результирующей стрелкой:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
-2 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -3 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0
\end{array}\right)
\end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c|cc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -6 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -4 & 2 \\
\hline
-2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-6 & 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array}
\end{array}.$$

Из вида полученной матрицы следует, что мы имеем пять независимых матриц, перестановочных с матрицей A_0. Однако из них перестановочны только матрицы A_1 и A_5. Для получения третьей матрицы, перестановочной с каждой из этих матриц, следует иначе выбрать значения свободных параметров. Однако в этом нет никакой необходимости, поскольку в качестве третьей матрицы можно взять матрицу A_0.

Заметим, что складывая A_1 и A_5 получаем единичную матрицу E третьего порядка, перестановочную со всеми матрицами третьего порядка, в том числе и с матрицами $A_0, A_1, \ldots, A_5$. Таким образом, матрицы A_0, E и любая из найденных матриц образуют совокупность трех независимых попарно перестановочных матриц.

Далее, запишем определяющую матрицу, соответствующую матрицам E, A_1 и A_0:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ -2x^1 + x^2 & -2x^1 + x^2 & 0 \\ 2x^1 - x^2 - x^3 & 2x^1 - x^2 - 2x^3 & -x^1 + x^2 + 2x^3 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь знанием собственного вектора $\overline{\alpha}^1 = (-2, 1, 0)$, прибавляем второй столбец к первому, умноженному на –2. Получаем:

$$\begin{pmatrix} -2x^1 + x^2 & x^2 & x^3 \\ 2x^1 - x^2 & -2x^1 + x^2 & 0 \\ -2x^1 + x^2 & 2x^1 - x^2 - 2x^3 & -x^1 + x^2 + 2x^3 \end{pmatrix}.$$

Первую строку прибавляем ко второй и вычитаем из третьей:

$$\begin{pmatrix} -2x^1 + x^2 & x^2 & x^3 \\ 0 & -2x^1 + x^2 & x^3 \\ 0 & 2x^1 - 2x^2 - 2x^3 & -x^1 + x^2 + x^3 \end{pmatrix}.$$

Прибавляем удвоенный третий столбец ко второму:

$$\begin{pmatrix} -2x^1 + x^2 & x^2 + 2x^3 & x^3 \\ 0 & -2x^1 + 2x^2 + 2x^3 & x^3 \\ 0 & 0 & -x^1 + x^2 + x^3 \end{pmatrix}.$$

Прибавляем первый столбец ко второму:

$$\begin{pmatrix} -2x^1 + x^2 & -2x^1 + 2x^2 + 2x^3 & x^3 \\ 0 & -2x^1 + 2x^2 + 2x^3 & x^3 \\ 0 & 0 & -x^1 + x^2 + x^3 \end{pmatrix}.$$

Вычитая вторую строку из первой, после деления второго столбца на 2 окончательно получаем матрицу

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} -2x^1 + x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -x^1 + x^2 + x^3 & x^3 \\ 0 & 0 & -x^1 + x^2 + x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} z^1 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & z^3 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}.$$

Формы $z^1 = -2x^1 + x^2$, $z^2 = -x^1 + x^2 + x^3$ соответствуют собственным векторам $\overline{\alpha}^1 = (-2, 1, 0)$ $(\lambda_1 = 1)$, $\overline{\alpha}^2 = (-1, 1, 1)$ $(\lambda_{2,3} = 1)$ матрицы A_0^T, форма $z^3 = x^3$ – присоединенному вектору этой матрицы $\overline{\alpha}^3 = (0, 0, 1)$. Пользуясь указанным в п. 5 алгоритмом б), общий интеграл соответствующей матрице A_0 системы дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$\ln(-2x^1 + x^2) - t = C^0, \quad \frac{-x^1 + x^2 + x^3}{-2x^1 + x^2} = C^1, \quad \ln(-x^1 + x^2 + x^3) - \frac{x^3}{-x^1 + x^2 + x^3} = C^2.$$

Разрешая последние равенства относительно x^1, x^2, x^3, получаем общее решение указанной системы дифференциальных уравнений в виде

$$x^1 = e^t(\widetilde{C}^0 t - \widetilde{C}^0 + \widetilde{C}^1 - \widetilde{C}^2), \quad x^2 = e^t(-2\widetilde{C}^0 t - \widetilde{C}^0 + 2\widetilde{C}^1 - 2\widetilde{C}^2),$$
$$x^3 = e^t(\widetilde{C}^1 t + \widetilde{C}^2).$$

Пример 6. Пусть

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ так что } A_0^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае получаем:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccc:ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\
\hline
\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}
\end{array}.$$

Как видим, в этом случае мы имеем три независимые попарно перестановочные матрицы A_1, A_2, A_3. Матрица A_0 является их линейной комбинацией с постоянными коэффициентами.

Ранг матрицы B_3^2 равен 2. Это значит, что однородная система линейных уравнений

$$-\frac{1}{5}a_1^3 - \frac{3}{5}a_2^3 = 0, \quad -\frac{2}{5}a_1^3 - \frac{1}{5}a_2^3 - a_3^3 = 0, \quad \frac{1}{5}a_1^3 + \frac{3}{5}a_2^3 = 0$$

имеет ненулевое решение, например, $a_1^3 = -3,\ a_2^3 = 1,\ a_3^3 = 1$. Тогда из уравнений, соответствующих четвертой, пятой и шестой строкам, с учетом предыдущих равенств получаем $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = 0$, а из первых трех уравнений находим $a_1^1 = -3,\ a_2^1 = 1,\ a_3^1 = 1$. Таким образом, получаем матрицу

$$A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

из вида которой следует, что вектор $\overline{\alpha}^1 = (-3,\ 1,\ 1)$ является собственным вектором матрицы A_0^T, а вектор $\overline{\beta}_1 = (1, 0, 1)$ – собственным вектором матрицы A_0. Оба вектора соответствуют собственному числу $\lambda_1 = 2$.

Определяющая матрица, соответствующая матрицам $E,\ A_4$ и A_0, имеет вид

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ -3x^1+x^2+x^3 & 0 & -3x^1+x^2+x^3 \\ 2x^1+x^2 & x^1+3x^2-x^3 & -x^1+2x^2+3x^3 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\overline{\alpha}^1$ является общим собственным вектором матриц E, A_4^T и A_0^T: прибавляем второй и третий столбцы к первому, умноженному на – 3. В результате получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} -3x^1+x^2+x^3 & x^2 & x^3 \\ -2(-3x^1+x^2+x^3) & 0 & -3x^1+x^2+x^3 \\ 2(-3x^1+x^2+x^3) & x^1+3x^2-x^3 & -x^1+2x^2+3x^3 \end{pmatrix}.$$

Прибавляем ко второй и вычитаем из третьей удвоенную первую строку:

$$\begin{pmatrix} -3x^1+x^2+x^3 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x^2 & -3x^1+x^2+3x^3 \\ 0 & x^1+x^2-x^3 & -x^1+2x^2+x^3 \end{pmatrix}.$$

Прибавляем второй столбец к третьему:

$$\begin{pmatrix} -3x^1+x^2+x^3 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x^2 & 3[-(x^1-x^3)+x^2] \\ 0 & (x^1-x^3)+x^2 & 3x^2 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы

$$M=(-3x^1+x^2+x^3)\begin{vmatrix} 2x^2 & 3[-(x^1-x^3)+x^2] \\ (x^1-x^3)+x^2 & 3x^2 \end{vmatrix}=$$

$$=(-3x^1+x^2+x^3)[(x^1-x^3)^2+(x^2)^2]=$$

$$=(-3x^1+x^2+x^3)(x^1+ix^2-x^3)(x^1-ix^2-x^3)\equiv z^1z^2z^3.$$

Таким образом, собственными векторами матрицы A_0^T являются векторы $\overline{\alpha}^1=(-3,1,1)$, $\overline{\alpha}^2=(1,i,-1)$, $\overline{\alpha}^3=(1,-i,-1)$, которым, согласно равенствам

$$A_0^T\overline{\alpha}^1=2\overline{\alpha}^1,\quad A_0^T\overline{\alpha}^2=(3+i)\overline{\alpha}^2,\quad A_0^T\overline{\alpha}^3=(3-i)\overline{\alpha}^3,$$

соответствуют ее собственные числа $\lambda_1=2$, $\lambda_{2,3}=3\pm i$.

Пользуясь указанным в п. 5 алгоритмом б), получаем общий интеграл соответствующей матрице A_0 системы дифференциальных уравнений в виде

$$\ln z^1 - 2t = C^0, \quad \frac{z^2 z^3}{\left(z^1\right)^3} = C^1, \quad \frac{\left(z^2\right)^{3-i}}{\left(z^3\right)^{3+i}} = C^2,$$

или после подстановки вместо z^1, z^2, z^3 их выражений и несложных преобразований в виде

$$\ln(-3x^1 + x^2 + x^3) - 2t = C^0, \quad \frac{\left(x^1 - x^3\right)^2 + \left(x^1\right)^2}{(-3x^1 + x^2 + x^3)^3} = C^1,$$

$$\left[\left(x^1 - x^3\right)^2 + \left(x^1\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} e^{3 arctg \frac{x^2}{x^1 - x^3}} = \hat{C}^2.$$

Разрешая эти равенства относительно переменных x^1, x^2, x^3, находим общее решение указанной системы дифференциальных уравнений:

$$x^1 = \widetilde{C}^0 e^{2t} + R\, e^{3t}\left[\sin(t+\alpha) - \cos(t+\alpha)\right], \quad x^2 = 2R\, e^{3t} \sin(t+\alpha),$$

$$x^3 = \widetilde{C}^0 e^{2t} + R\, e^{3t}\left[\sin(t+\alpha) - 3\cos(t+\alpha)\right], \quad \mathrm{R} \geq 0,$$

где $\widetilde{C}^0, R, \alpha$ – произвольные постоянные.

Пример 7. Пусть

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ так что } A_0^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае получаем

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc:ccc:ccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \end{array}$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{array} \\
\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
\hline
1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}
\end{array} .
$$

Для нахождения координат собственных векторов матрицы A_0^T составим уравнения (2.12), для чего нужно вычислить коэффициенты формы $M_3(x^1, x^2, x^3)$, пользуясь указанной в п. 2 матрицей В. Чтобы упростить вычисления, перенумеруем полученные матрицы A_1, A_2, A_3, расположив их в обратном порядке. Тогда получим матрицу

$$
B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

Вычисляем коэффициенты формы $M_3(x^1, x^2, x^3)$:

$$
a_{111} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad a_{222} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,
$$

$$
a_{333} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4,
$$

$$
a_{112} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 - 2 = -3,
$$

$$
a_{122} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 = -1,
$$

$$a_{113} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 3 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0 + 2 + 3 = 5,$$

$$a_{133} = \begin{vmatrix}1 & 3 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & 1 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & 3 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0 - 2 - 2 = -4.$$

Так как $a_{111} = \alpha_1^1\alpha_1^2\alpha_1^3 = 1 \neq 0$, то $\alpha_1^1 \neq 0$, $\alpha_1^2 \neq 0$ и $\alpha_1^3 \neq 0$. Поэтому, поскольку собственные векторы определяются с точностью до постоянного множителя, можно в уравнениях (2.25) положить $\alpha_1 = 1$. Это означает, что у всех трех векторов первые координаты будут равны 1. Для нахождения вторых и третьих координат, учитывая значения найденных коэффициентов формы $M_3(x^1, x^2, x^3)$, получаем уравнения

$$\alpha_2{}^3 + 3\alpha_2{}^2 - \alpha_2 - 2 = 0 \text{ и } \alpha_2{}^3 - 5\alpha_2{}^2 - 4\alpha_2 + 4 = 0.$$

Найти корни этих уравнений с любой степенью точности можно любым из известных методов решения нелинейных уравнений. Наши вычисления, выполненные с точностью до четвертого знака после запятой, дают следующие результаты (корни расположены в порядке возрастания их абсолютных величин)

$$\alpha_1^2 = -0{,}7459; \quad \alpha_2^2 = 0{,}8608; \quad \alpha_3^2 = -3{,}1149;$$
$$\alpha_1^3 = -1{,}1895; \quad \alpha_2^3 = 0{,}6018; \quad \alpha_3^3 = 5{,}5877.$$

Легко проверить, что векторы

$$\overline{\alpha}^1 = \begin{pmatrix}1\\ -0{,}7459\\ -1{,}1895\end{pmatrix}, \quad \overline{\alpha}^2 = \begin{pmatrix}1\\ 0{,}8608\\ 0{,}6018\end{pmatrix}, \quad \overline{\alpha}^3 = \begin{pmatrix}1\\ -3{,}1149\\ 5{,}5877\end{pmatrix}$$

являются собственными векторами матрицы A_0^T:

$$A_0^T\overline{\alpha}^1 = \begin{pmatrix}2{,}2541\\ -1{,}6813\\ -2{,}6813\end{pmatrix} = 2{,}2541\begin{pmatrix}1\\ -0{,}7458\\ -1{,}1895\end{pmatrix},$$

$$A_0^T\overline{\alpha}^2 = \begin{pmatrix}3{,}8608\\ 3{,}3234\\ 2{,}3224\end{pmatrix} = 3{,}8608\begin{pmatrix}1\\ 0{,}8608\\ 0{,}6018\end{pmatrix},$$

$$A_0^T\overline{\alpha}^3=\begin{pmatrix}-0,1149\\0,3579\\-0,6421\end{pmatrix}=-0,1149\begin{pmatrix}1\\-3,1149\\5,5883\end{pmatrix}.$$

Как видим, собственными числами матрицы A_0^T (а также и A_0) являются $\lambda_1=2,2541$, $\lambda_2=3,8608$, $\lambda_3=-0,1149$. Отметим, что $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=6,0000=$ $=SpA_0$.

Замечание. Для матриц, заданных в евклидовых (действительных или комплексных) пространствах, отнесенных к ортонормированным базисам, можно указать еще один способ нахождения их собственных векторов, основанный на представлении (2.7) определяющей функции

$$M(x^1,x^2,...,x^n)=\begin{vmatrix}\xi_1^1(x^1,...,x^n) & ... & \xi_n^1(x^1,...,x^n)\\ ... & ... & ...\\ \xi_1^n(x^1,...,x^n) & ... & \xi_n^n(x^1,...,x^n)\end{vmatrix}=$$

$$=\gamma(\overline{\alpha}^{k_1+1}\overline{x})^{l_1}\cdot(\overline{\alpha}^{k_2+1}\overline{x})^{l_2}\cdot...\cdot(\overline{\alpha}^{k_m+1}\overline{x})^{l_m}.$$

показывающем, что эта функция обращается в нуль на многообразиях (гиперплоскостях), определяемых равенствами $\overline{\alpha}^{k_s+1}\overline{x}=0$ $(s=1,...,m)$. Поэтому, положив в выражении для $M(x^1,x^2,...,x^n)$,

$$x^2=\gamma^2,...,\ x^n=\gamma^n, \qquad (*)$$

где $\gamma^2,...,\ \gamma^n$ – произвольные числа, не все равные нулю, мы получим, вообще говоря, уравнение степени *n* относительно переменной x^1, имеющее ровно *n* корней $\gamma_1^1,...,\ \gamma_n^1$, среди которых могут быть как действительные, так и комплексные, как простые, так и кратные. Таким образом, мы получим *n* точек

$$N_1(\gamma_1^1,\ \gamma^2,...,\ \gamma^n)\ ,...,\ N_n(\gamma_n^1,\ \gamma^2,...,\ \gamma^n),$$

принадлежащих, вообще говоря, различным гиперплоскостям, или, иначе, *n* векторов

$$\overline{\omega}_1^1(\gamma_1^1,\ \gamma^2,...,\ \gamma^n)\ ,...,\ \overline{\omega}_1^n(\gamma_n^1,\ \gamma^2,...,\ \gamma^n), \qquad (**)$$

исходящих из начала координат. Ясно, что $n-1$ независимым наборам (*) будут соответствовать $n-1$ независимых наборов (**). Выбирая из каждого набора по одному вектору, получим всевозможные наборы из $n-1$ векторов, среди которых будут содержаться наборы векторов, принадлежащих одним и тем же гиперплоскостям. Векторные произведения входящих в эти наборы векторов [4], представляющие собой нормальные векторы гиперплоскостей, которым они принадлежат (ортогональные дополнения (n – 1)-мерных подпространств до всего пространства), и дают собственные векторы матрицы A_0^T.

Возвращаясь к рассмотренному примеру, запишем определяющую функцию заданной системы, воспользовавшись найденными перестановочными матицами A_1, A_2 и A_3 (матрица A_0 является их линейной комбинацией с постоянными коэффициентами):

$$M = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 2x^1 + x^2 & x^1 + x^2 + 2x^3 & x^2 \\ x^1 + 2x^2 + 2x^3 & 2x^1 + x^2 & x^1 \end{vmatrix}.$$

Переменные x^1, x^2, x^3 можно, очевидно, считать декартовыми координатами трехмерного действительного евклидова пространства.

Полагая в записанном для M выражении $x^1 = x^1$, $x^2 = 1$, $x^3 = 0$, находим с указанной выше точностью корни уравнения

$$\begin{vmatrix} x^1 & 1 & 0 \\ 2x^1 + 1 & x^1 + 1 & 1 \\ x^1 + 2 & 2x^1 + 1 & x^1 \end{vmatrix} = \left(x^1\right)^3 - 3\left(x^1\right)^2 - x^1 + 2 = 0: \quad x^1 = 3{,}1149;\ 0{,}7459;\ -0{,}8608.$$

Таким образом, имеем три вектора:

$$\overline{\omega}_1^1 = (3{,}1149; 1; 0), \quad \overline{\omega}_1^2 = (0{,}7459; 1; 0), \quad \overline{\omega}_1^3 = (-0{,}8608; 1; 0).$$

Полагая в том же выражении $x^1 = x^1$, $x^2 = 0$, $x^3 = 1$, находим корни уравнения

$$\begin{vmatrix} x^1 & 0 & 1 \\ 2x^1 & x^1 + 2 & 0 \\ x^1 + 2 & 2x^1 & x^1 \end{vmatrix} = \left(x^1\right)^3 + 5\left(x^1\right)^2 - 4x^1 + 1 = 0: \quad x^1 = 1{,}1895;\ -0{,}6019;\ -5{,}5877.$$

Таким образом, имеем еще три вектора:

$$\overline{\omega}_2^1 = (1{,}1895; 0; 1), \quad \overline{\omega}_2^2 = (-0{,}6019; 0; 1), \quad \overline{\omega}_2^3 = (-5{,}5877; 0; 1).$$

Пользуясь известной формулой для векторного произведения векторов в декартовых координатах, находим:

$$\overline{\omega}_1^1 \times \overline{\omega}_2^1 = (1; -3{,}1149; -1{,}1895), \quad \overline{\omega}_1^1 \times \overline{\omega}_2^2 = (1; -3{,}1149; 0{,}6019),$$

$$\overline{\omega}_1^1 \times \overline{\omega}_2^3 = (1; -3{,}1149; -5{,}5877),$$

$$\overline{\omega}_1^2 \times \overline{\omega}_2^1 = (1; -0{,}7459; -1{,}1895), \quad \overline{\omega}_1^2 \times \overline{\omega}_2^2 = (1; -0{,}7459; 0{,}6019),$$

$$\overline{\omega}_1^2 \times \overline{\omega}_2^3 = (1; -0{,}7459; -5{,}5877),$$

$$\overline{\omega}_1^3 \times \overline{\omega}_2^1 = (1; 0{,}8608; -1{,}1895), \quad \overline{\omega}_1^3 \times \overline{\omega}_2^2 = (1; 0{,}8608; 0{,}6019),$$

$$\overline{\omega}_1^3 \times \overline{\omega}_2^3 = (1; 0{,}8608; -5{,}5877).$$

Как видим, собственными векторами матрицы A_0^T являются произведения $\overline{\omega}_1^1 \times \overline{\omega}_2^3 = \overline{\alpha}^3$, $\overline{\omega}_1^2 \times \overline{\omega}_2^1 = \overline{\alpha}^1$, $\overline{\omega}_1^3 \times \overline{\omega}_2^2 = \overline{\alpha}^2$. Легко проверить, что остальные найденные векторные произведения собственными векторами этой матрицы не являются.

7. В этом пункте система (1.1) рассматривается в действительном n-мерном евклидовом пространстве, базис которого предполагается ортонормированным. Следовательно, матрица A_0 системы – действительная, произведение $\overline{\alpha}\overline{\beta}$ понимается как скалярное произведение вектор-строки $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ на вектор-столбец $\overline{\beta} = (\beta^1, \quad \dots, \beta^n)$. Определяющую матрицу (функцию) группы G_n, соответствующей системе (1.1), для упрощения формулировок будем в дальнейшем называть определяющей матрицей (функцией) системы (1.1).

Покажем, каким образом определяющая функция системы (1.1) может быть использована для ее качественного исследования.

Прежде всего, вспомнив, что у действительных матриц комплексные собственные векторы всегда встречаются комплексно сопряженными парами, докажем следующую простую теорему.

Теорема 7.1. 1) Каждому действительному собственному вектору $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ действительной матрицы A^T соответствует действительная линейная форма $z = \overline{\alpha}\overline{x}$, инвариантная относительно оператора $X_A f$, причем $X_A z = \lambda z$, где λ – собственное число матрицы A^T, соответствующее вектору $\overline{\alpha}$, и обратно.

2) Каждой паре комплексно сопряженных собственных векторов $\overline{\alpha}^{1,2} = (\sigma_1 \pm i\omega_1, \dots, \sigma_n \pm i\omega_n)$ матрицы A^T соответствует действительная квадратичная форма $v = (\overline{\alpha}^1\overline{x})(\overline{\alpha}^2\overline{x}) = (\sigma_1^2 + \omega_1^2){x^1}^2 + \dots + (\sigma_n^2 + \omega_n^2){x^n}^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \omega_1\omega_2)x^1x^2 + \dots + 2(\sigma_{n-1}\sigma_n + \omega_{n-1}\omega_n)x^{n-1}x^n$, инвариантная относительно оператора $X_A f$, причем $X_A f = (\lambda_1 + \lambda_2)v$, где $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексно сопряженные собственные числа матрицы A^T, соответствующие ее собственным векторам $\overline{\alpha}^{1,2}$, и обратно.

Доказательство. 1) Представив оператор $X_A f$ в виде

$$X_A f = \overline{\nabla} f A \overline{x} = \overline{x}^T A^T \left(\overline{\nabla} f\right)^T,$$

для формы $z = \overline{\alpha}\overline{x}$ получаем

$$X_A z = \overline{x}^T A^T \left(\overline{\nabla} z\right)^T = \overline{x}^T A^T \overline{\alpha}^T = \overline{x}^T \lambda \overline{\alpha}^T = \lambda \overline{\alpha}\overline{x} = \lambda z,$$

если $A^T \overline{\alpha}^T = \lambda \overline{\alpha}^T$.

2) Для формы $v = (\overline{\alpha}^1\overline{x})(\overline{\alpha}^2\overline{x})$, пользуясь предыдущим результатом, получаем

$$X_A v = [X_A(\overline{\alpha}^1\overline{x})](\overline{\alpha}^2\overline{x}) + (\overline{\alpha}^1\overline{x})\left[X_A(\overline{\alpha}^2\overline{x})\right] = [\lambda_1(\overline{\alpha}^1\overline{x})](\overline{\alpha}^2\overline{x}) +$$
$$+ (\overline{\alpha}^1\overline{x})\left[\lambda_2(\overline{\alpha}^2\overline{x})\right] = (\lambda_1 + \lambda_2)(\overline{\alpha}^1\overline{x})(\overline{\alpha}^2\overline{x}) = (\lambda_1 + \lambda_2)v,$$

что доказывает второе утверждение.

В целях экономии места доказательство обратных утверждений мы опускаем.

Функции $z = \bar{\alpha}\bar{x}$ и $v = (\bar{\alpha}^1\bar{x})(\bar{\alpha}^2\bar{x})$ можно назвать *собственными функциями* оператора $X_\Delta f$, а числа λ и $\lambda_1 + \lambda_2$ соответствующими этим функциям *собственными числами* этого оператора.

Обращаясь теперь к представлению (2.7) определяющей функции

$$M = |M| = (\bar{\alpha}^{k_1+1}\bar{x})^{l_1}(\bar{\alpha}^{k_2+1}\bar{x})^{l_2} \dots (\bar{\alpha}^{k_m+1}\bar{x})^{l_m},$$

напомним, что векторы $\bar{\alpha}^{k_1+1}, \bar{\alpha}^{k_2+1}, \dots, \bar{\alpha}^{k_m+1}$ являются общими собственными векторами матриц $A_0^T, A_1^T, \dots, A_{n-1}^T$. В силу доказанной теоремы, в действительном случае эта функция может быть представлена в виде произведения некоторого количества линейных и некоторого количества квадратичных собственных форм, общих для всех операторов $X_0f, X_1f, \dots, X_{n-1}f$, и потому инвариантных относительно всех преобразований группы G_n. Будучи приравненными к нулю порознь или некоторыми совокупностями, эти формы определяют в пространстве $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ инвариантные многообразия группы G_n, являющиеся интегральными многообразиями системы (1.1), в точках которых определяющая функция обращается в нуль. Эти многообразия разбивают фазовое пространство системы (1.1) на ряд областей, в которых функция $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ отлична от нуля и сохраняет знак и в каждой из которых остальные интегральные многообразия (а следовательно, и принадлежащие им траектории) ведут себя подобным образом, преобразуясь друг в друга преобразованиями группы G_n. Интегральные многообразия системы (1.1), в точках которых определяющая функция обращается в нуль, естественно назвать ее *особыми интегральными многообразиями.* Остальные интегральные многообразия системы (1.1) (а также и принадлежащие им траектории системы) естественно назвать *обыкновенными.*

Из сказанного выше следует, что особыми интегральными многообразиями системы (1.1) являются (n – 1)-мерные гиперплоскости, определяемые равенствами

$$(\bar{\alpha}\bar{x}) \equiv \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0,$$

(n – 2)-мерные оси знакопостоянных квадратичных форм, определяемые равенствами

$$(\bar{\alpha}^1\bar{x})(\bar{\alpha}^2\bar{x}) \equiv (\sigma_1^2 + \omega_1^2){x^1}^2 + \dots + (\sigma_n^2 + \omega_n^2){x^n}^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \omega_1\omega_2)x^1x^2 + \dots +$$
$$+ 2(\sigma_{n-1}\sigma_n + \omega_{n-1}\omega_n)x^{n-1}x^n = 0,$$

и результаты всевозможных их пересечений, одним из которых является начало координат $O(0, 0, \dots, 0)$.

Нахождением особых интегральных многообразий задача качественного исследования системы (1.1) не заканчивается. Дальнейшее исследование состоит в установлении поведения траекторий на особых интегральных многообразиях и в областях $M \neq 0$ определяющей функции. Существенную помощь при этом могут оказать приводимые ниже свойства определяющей функции (2.2).

Докажем следующую теорему.

Теорема 7.2. Любая определяющая функция системы (1.1) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$X_0 M = M div\overline{\xi_0} \quad (\equiv M \,\mathrm{Sp} A_0). \tag{7.1}$$

Доказательство. Действительно, так как группа G_n абелева, то имеют место равенства

$$X_i \xi_k^j = X_k \xi_i^j \qquad (i, k = 1,..., n, \ j = 1,..., n).$$

Используя правило дифференцирования определителей, получаем равенство

$$X_0 M = \begin{vmatrix} X_0\xi_1^1 & X_0\xi_1^2 & \dots & X_0\xi_1^n \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n^1 & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^n \\ X_0\xi_2^1 & X_0\xi_2^2 & \dots & X_0\xi_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n^1 & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^n \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_0\xi_n^1 & X_0\xi_n^2 & \dots & X_0\xi_n^n \end{vmatrix},$$

которое с помощью предыдущих равенств можно переписать в виде

$$X_0 M = \begin{vmatrix} X_1\xi_0^1 & X_1\xi_0^2 & \dots & X_1\xi_0^n \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n^1 & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^n \\ X_2\xi_0^1 & X_2\xi_0^2 & \dots & X_2\xi_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n^1 & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^n \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n\xi_0^1 & X_n\xi_0^2 & \dots & X_n\xi_0^n \end{vmatrix}.$$

Разложив определители в правой части последнего равенства по элементам строк, соответствующих порядковым номерам определителей, получим равенство

$$X_0 M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i (\xi_0^j) A_i^j ,$$

где A_i^j $(i, j = 1,..., n)$ – алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы (2.2), которое с учетом равенств (1.3) и (1.27) переписываются в виде

$$X_0 M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_i^k \frac{\partial \xi_0^j}{\partial x^k} A_i^j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_0^j}{\partial x^k} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^k A_i^j .$$

В силу теоремы о величине определителя и теоремы об аннулировании

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^k A_i^j = \begin{cases} M, & \text{если k = j,} \\ 0, & \text{если k} \neq \text{j,} \end{cases}$$

в итоге получаем равенство (7.1), что и требовалось доказать.

Равенство (7.1), переписанное в виде

$$\overline{\nabla} M \xi_0 = \mathrm{MSp} A_0 , \tag{7.2}$$

позволяет изучать взаимное расположение векторов $\bar{\xi}_0$ и ∇M вдоль «поверхностей» уровня функции $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$, определяемых равенством

$$M(x^1, x^2, \dots, x^n) = h\,. \tag{7.3}$$

В областях $M > 0$, $\nabla M \neq 0$ ($M < 0$, $\nabla M \neq 0$) значения $h > 0$ ($h < 0$) и равенство

$$\nabla M \bar{\xi}_0 = h \mathrm{Sp} A_0 \tag{7.4}$$

при $\mathrm{Sp}A_0 > 0$ показывает, что во всех точках любой поверхности уровня функции $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$, принадлежащей рассматриваемой области, угол между векторами $\bar{\xi}_0$ и ∇M острый (тупой), то есть траектории векторного поля $\bar{\xi}_0$ в указанной области пересекают поверхности уровня функции $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в направлении ее возрастания (убывания). Если же $\mathrm{Sp}A_0 < 0$, то во всех точках любой поверхности уровня функции $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$, принадлежащей рассматриваемой области, угол между векторами $\bar{\xi}_0$ и ∇M тупой (острый), то есть траектории векторного поля $\bar{\xi}_0$ в указанной области пересекают поверхности уровня функции $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в направлении ее убывания (возрастания). Наконец, при $\mathrm{Sp}A_0 = 0$ угол между векторами $\bar{\xi}_0$ и ∇M прямой, то есть траектории системы принадлежат поверхностям уровня функции $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$, являющимся, таким образом, интегральными многообразиями системы (1.1).

Учитывая равенство $df = Xf dt$, равенство (7.1) можно переписать в виде

$$\frac{dM}{dt} = M \mathrm{Sp} A_0. \tag{7.5}$$

Это равенство характеризует изменение определяющей функции $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ вдоль траекторий системы (1.1). В областях $M > 0$ при $\mathrm{Sp}A_0 > 0$ функция $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ вдоль траекторий системы (1.1) с ростом t возрастает, а при $\mathrm{Sp}A_0 < 0$ – убывает. В областях $M < 0$ при $\mathrm{Sp}A_0 > 0$ функция $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ вдоль траекторий системы (1.1) с ростом t убывает, а при $\mathrm{Sp}A_0 < 0$ – возрастает. При $\mathrm{Sp}A_0 = 0$ функция $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$ вдоль траекторий системы сохраняет постоянное значение, то есть $M(x^1, x^2, \dots, x^n) = C$, где C – произвольная постоянная, является первым интегралом системы (1.1).

Переписывая равенство (7.5) в виде

$$\frac{dM}{M} = \mathrm{Sp} A_0 dt$$

и интегрируя полученное равенство вдоль некоторой траектории системы (1.1) в произвольных пределах t_0 и t, получаем равенство

$$M(x^1(t), \dots, x^n(t)) = M(x^1(t_0), \dots, x^n(t_0)) e^{\mathrm{Sp} A_0 (t - t_0)}. \tag{7.6}$$

Равенство (7.6) показывает, что функция $M(x^1, x^2, \dots, x^n)$, рассматриваемая вдоль некоторой траектории системы (1.1), либо тождественно (относительно t) обращается в нуль, либо не обращается в нуль ни при каком конечном значении t. Первое имеет место в том случае, когда начальная точка принадлежит особому интегральному многообразию системы. Если же начальная точка $(x^1(t_0),\dots,x^n(t_0))$ принадлежит области, в которой $M \neq 0$, то, учитывая свойства экспоненциальной функции, приходим к тем же заключениям, что и выше: при $M > 0$ вдоль проходящей через эту точку траектории системы (1.1) функция $M(x^1(t),\dots,x^n(t))$ с ростом t возрастает при $SpA_0 > 0$ и убывает при $SpA_0 < 0$; при $M < 0$ вдоль проходящей через указанную точку траектории функция $M(x^1,x^2,\dots,x^n)$ с ростом t убывает при $SpA_0 > 0$ и возрастает при $SpA_0 < 0$; при $SpA_0 = 0$ функция $M(x^1,x^2,\dots,x^n)$ вдоль любой траектории системы (1.1) сохраняет постоянное значение, равное ее значению в начальной точке. Ясно при этом, что особые интегральные многообразия системы могут достигаться ее обыкновенными траекториями только при $t \to \infty$.

Из теоремы 7.1 вытекает следующее важное утверждение: функция $\mu = M^{-1}$ является последним множителем системы уравнений в симметричной форме

$$\frac{dx^1}{\xi_0^1} = \frac{dx^2}{\xi_0^2} = \dots = \frac{dx^n}{\xi_0^n}, \qquad (*)$$

соответствующей системе (1.1) [3].

Действительно,

$$X_0 M^{-1} = -\frac{X_0 M}{M^2} = -\frac{M \operatorname{div} \bar{\xi}_0}{M^2} = -M^{-1} \operatorname{div} \bar{\xi}_0 \quad \left(\operatorname{div} \bar{\xi}_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_0^j}{\partial x^j} \right),$$

откуда следует уравнение

$$X\mu + \mu \operatorname{div} \bar{\xi}_0 = 0$$

для последнего множителя системы (*).

Таким образом, любая определяющая функция $M(x^1,\dots,x^n)$ принадлежит бесконечному множеству решений уравнения (7.1). Не все эти решения можно отнести к классу определяющих функций, однако все они несут определенную информацию о соответствующих дифференциальных системах и могут быть использованы как для интегрирования, так и для качественного исследования этих систем. Все решения уравнения (7.1) можно назвать *интегрирующими функциями* системы (*) в том смысле, что соответствующие им обратные величины являются последними множителями этой системы.

Исследование поведения траекторий системы (1.1), принадлежащих ее особым интегральным многообразиям, сводится к исследованию поведения траекторий дифференциальной системы, индуцированной системой (1.1) на рассматриваемом интегральном многообразии [6].

Изложенный метод качественного исследования линейных систем наиболее прост в применении к системам второго порядка

$$\begin{cases}\dot{x}^1 = a_1^1x^1 + a_2^1x^2,\\ \dot{x}^2 = a_1^2x^1 + a_2^2x^2,\end{cases}\quad SpA_0 = a_1^1 + a_2^2, \tag{7.8}$$

допускающим группу подобия с оператором

$$X_1f = x^1\frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial f}{\partial x^2},$$

перестановочным с оператором системы

$$X_0f = \frac{\left(a_1^1x^1 + a_2^1x^2\right)\partial f}{\partial x^1} + \frac{\left(a_1^2x^1 + a_2^2x^2\right)\partial f}{\partial x^2},$$

в силу чего определяющая функция системы выписывается сразу и имеет вид

$$M(x^1,x^2) = \begin{vmatrix} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 & a_1^2x^1 + a_2^2x^2 \\ x^1 & x^2\end{vmatrix} = -a_1^2{x^1}^2 + (a_1^1 - a_2^2)x^1x^2 + a_2^1{x^2}^2. \tag{7.9}$$

Легко убедиться, что

$$X_0M \equiv \bar{\nabla}M\bar{\xi}_0 = \left(a_1^1 + a_2^2\right)M. \tag{7.10}$$

Равенства (7.9), (7.10) и уравнения самой системы (7.8) позволяют установить ее фазовый портрет, не прибегая к приведению матрицы системы к нормальной жордановой форме. Не останавливаясь на этом, представляющем определенный интерес вопросе более подробно, отметим только, что *при знакоопределенной функции* $M(x^1,x^2)$ *состояние равновесия системы (7.8) устойчиво при* $a_1^1 + a_2^2 = 0$, *асимптотически устойчиво при* $a_1^1 + a_2^2 < 0$ и *неустойчиво* при $a_1^1 + a_2^2 > 0$, что прямо следует из равенства (7.10) и соответствующих теорем второго метода Ляпунова.

Приведем простейшие примеры, иллюстрирующие это утверждение.

Соответствующие системам

$$\begin{cases}\dot{x}^1 = x^2 \equiv \xi_0^1,\\ \dot{x}^2 = -x^1 \equiv \xi_0^2,\end{cases} SpA_0 = 0 \ \text{ и } \ \begin{cases}\dot{x}^1 = -x^1 \equiv \xi_1^1,\\ \dot{x}^2 = -x^2 \equiv \xi_1^2,\end{cases} SpA_1 = -2 < 0$$

операторы

$$X_0f = x^2\frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial f}{\partial x^2} \quad \text{ и } \quad X_1f = -x^1\frac{\partial f}{\partial x^1} - x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}$$

перестановочны и являются символами абелевой непрерывной группы преобразований G_2 плоскости Ox^1x^2. Определяющей функцией этой группы является функция

$$M(x^1,x^2) = {x^1}^2 + {x^2}^2,$$

положительная всюду на плоскости Ox^1x^2, кроме точки $O(0,0)$, в которой она обращается в нуль, причем

$$X_0M \equiv 0, \qquad X_1M = -2M.$$

Согласно сформулированному выше утверждению, эти равенства показывают, что начало координат $O(0,0)$ является устойчивым состоянием равновесия для первой системы и асимптотически устойчивым – для второй. Известные фазовые портреты рассмотренных систем изображены на рисунках 1 и 2: для первой системы точка $O(0,0)$ является центром, для второй – узлом.

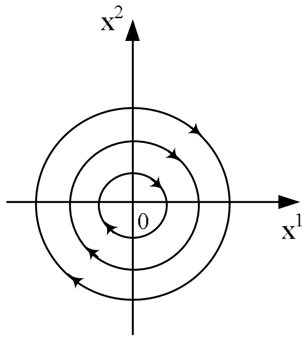

Рис. 1

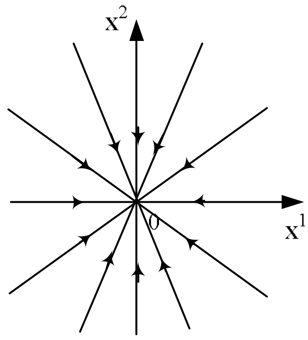

Рис. 2

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^1 \equiv \xi_2^1, \\ \dot{x}^2 = x^2 \equiv \xi_2^2, \end{cases} \quad SpA_2 = 2 > 0$$

с оператором

$$X_2 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2},$$

преобразования которой принадлежат той же группе G_2. Имеем $X_2 M = 2M$, откуда следует, что состояние равновесия $O(0, 0)$ для этой системы неустойчиво. Ее фазовый портрет можно получить, если на рисунке 2 на всех лучах, исходящих из начала координат, направление стрелок изменить на противоположное.

Приведем пример качественного исследования системы третьего порядка.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -x - y \equiv \xi_0^1(x,y,z), \ \ \dot{y} = x - y \equiv \xi_0^2(x,y,z), \ \ \dot{z} = -z \equiv \xi_0^3(x,y,z) \quad (SpA_0 = -3)$$

с определяющей функцией

$$M(x,y,z) = (x+iy)(x-iy)z = (x^2+y^2)z,$$

построенную нами в примере 3 п. 6. Ее состояние равновесия $O(0, 0, 0)$ асимптотически устойчиво, так как все (заданные нами) собственные числа матрицы A_0 имеют отрицательные действительные части. Теперь мы получим этот результат, исследуя поведение траекторий системы, принадлежащих ее особым интегральным многообразиям, отличным от состояния равновесия $O(0, 0, 0)$, которыми являются положительная и отрицательная полуоси Oz, расположенные на оси положительно определенной квадратичной формы $M_1(x,y)=x^2+y^2$, и плоскость $z=0$.

Направление движения изображающей точки по полуосям Oz определяется вектором $\bar{\xi}_0(0,0,z)=-z$: и при z > 0 и при z < 0 этот вектор направлен к началу координат $O(0,0,0)$.

Поведение траектории системы в плоскости z = 0 определяется системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=-x-y\equiv\xi_0^1(x,y,0), \quad \dot{y}=x-y\equiv\xi_0^2(x,y,0), \quad a_1^1+a_2^1=-2<0,$$

определяющей для которой является функция

$$M_1(x,y)=x^2+y^2,$$

положительно определенная в любой окрестности начала координат. Ее линиями уровня являются концентрические окружности $x^2+y^2=h \quad (h\geq 0)$, стягивающиеся к общему центру $O(0, 0)$ при $h\to +0$, в каждой точке которых вектор $\overline{\nabla} M_1 \uparrow\uparrow \bar{\xi}_1=(x,y)$. Равенство

$$\overline{\nabla} M_1 \bar{\xi}_0(x,y,0)=(-2)M_1$$

и вытекающее из него равенство

$$\cos(\overline{\nabla} M_1, \bar{\xi}_0(x,y,0))=\frac{-2M_1}{\left|\overline{\nabla} M_1\right|\left|\bar{\xi}_0(x,y,0)\right|}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (x^2+y^2\neq 0)$$

показывают, что траектории системы в плоскости z = 0 являются спиралями, последовательно пересекающими указанные окружности снаружи внутрь под одним и тем же углом $\frac{3\pi}{4}$ к вектору $\bar{\xi}_1$, неограниченно приближаясь к началу координат при $t\to +\infty$.

Траектории, принадлежащие особым интегральным многообразиям рассматриваемой системы, изображены на рисунке 3.

В силу теоремы о непрерывной зависимости решений системы от начальных данных заключаем, что траектории системы в областях M ≠ 0 являются спиралями, обращающимися вокруг полуосей Oz и неограниченно приближающимися к началу координат $O(0,0,0)$ при $t=+\infty$.

К сказанному нужно добавить, что рассматриваемая система имеет легко определяемый первый интеграл

$$\frac{z^2}{x^2+y^2}=C,$$

(C – неотрицательная произвольная постоянная), определяющий семейство прямых круговых конусов с общей вершиной в точке $O(0, 0, 0)$, вырождающихся в плоскость $z = 0$ при $C = 0$ и в ось Oz при $C = +\infty$. Указанные выше спирали принадлежат этим конусам. Фазовый портрет системы изображен на рисунке 4.

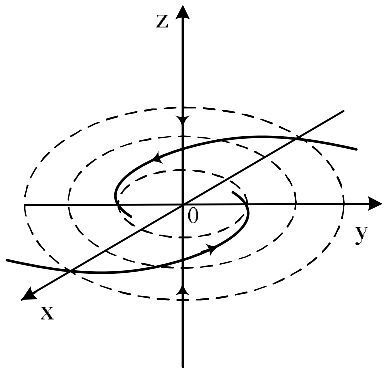

Рис. 3

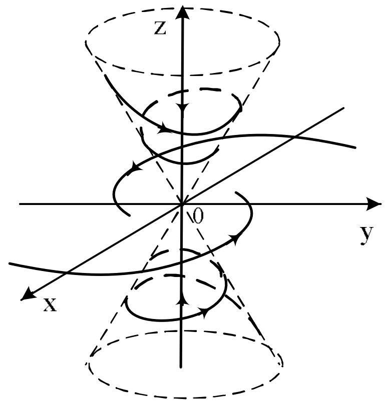

Рис. 4

Изложенный метод качественного исследования линейных однородных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами обобщается на случай нелинейных динамических систем, рассматриваемых в n-мерном действительном евклидовом пространстве. Не имея возможности подробно останавливаться на этом вопросе в рамках настоящей работы, остановимся только на задаче исследования устойчивости состояний равновесия динамических систем второго порядка.

Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = \xi_0^1\left(x^1, x^2\right), \\ \dot{x}^2 = \xi_0^2\left(x^1, x^2\right), \end{cases} \tag{7.11}$$

правые части уравнений которой, по меньшей мере, непрерывно дифференцируемы в некоторой открытой области D плоскости Ox^1x^2. Для этой системы мы можем ввести в рассмотрение интегрирующую функцию $M(x^1, x^2) = \mu^{-1}(x^1, x^2)$, где $\mu(x^1, x^2)$ – интегрирующий множитель соответствующего системе (7.11) дифференциального уравнения в симметричной форме, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$X_0 M = M \operatorname{div} \bar{\xi}_0, \tag{7.12}$$

множество решений которого бесконечно. Предполагая, что начало координат $O(0,0)$ является изолированным состоянием равновесия системы, приведем следующую теорему, справедливость которой очевидным образом вытекает из равенства (7.12) и соответствующих теорем второго метода Ляпунова.

Теорема 7.2. Если для системы (7.11) существует знакоопределенное в некоторой окрестности $\mathbf{D_0}$ ее изолированного состояния равновесия $\mathbf{O}(0,0)$ решение $\mathrm{M}(x^1,x^2)$ уравнения (7.12) и в этой же окрестности $div\bar{\xi}_0 <\big| 0$, или $div\bar{\xi}_0 < 0$, или $div\bar{\xi}_0 \le 0$, то состояние равновесия $\mathbf{O}(0,0)$ системы асимптотически устойчиво; если в указанной окрестности $div\bar{\xi}_0 >\big| 0$, или $div\bar{\xi}_0 > 0$, или $div\bar{\xi}_0 \ge 0$, то состояние равновесия $\mathbf{O}(0,0)$ неустойчиво (асимптотически устойчиво при $t \to -\infty$); если $div\bar{\xi}_0 \equiv 0$ в D, то состояние равновесия устойчиво.

Использованная в формулировке теоремы символика означает следующее: символ $div\bar{\xi}_0 <\big| 0$ ($div\bar{\xi}_0 >\big| 0$) означает, что функция $\mathbf{div}\bar{\xi}_0$ отрицательна (положительна) всюду в $\mathbf{D_0}$, включая точку $\mathbf{O(0,0)}$; символ $div\bar{\xi}_0 < 0$ ($div\bar{\xi}_0 > 0$) означает, что в $\mathbf{D_0}$ функция $\mathbf{div}\bar{\xi}_0$ отрицательно (положительно) определена; символ $div\bar{\xi}_0 \le 0$ ($div\bar{\xi}_0 \ge 0$) означает, что функция $\mathbf{div}\bar{\xi}_0$ отрицательна (положительна) всюду в $\mathbf{D_0}$, кроме некоторых изолированных кривых, проходящих через начало координат, на которых она обращается в нуль.

Существенное отличие приведенной теоремы от соответствующих теорем второго метода Ляпунова состоит в том, что фигурирующая в ней функция $\mathrm{M}(x^1,x^2)$ имеет конкретный математический смысл и всегда может быть найдена либо в конечном виде, либо в виде некоторого ее локального представления в окрестности рассматриваемого состояния равновесия. Это обстоятельство позволяет уравнение (7.12) и его решения положить в основу эффективного метода качественного исследования динамических систем на плоскости. Соответствующий пример приводится ниже. Укажем также на работу [5], в которой при помощи предлагаемого метода подробно изучены все возможные фазовые портреты однородных динамических систем второго порядка.

Рассмотрим систему ($x^1 = x, x^2 = y$)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - xy^2 \equiv \xi_0^1(x,y), \\ \dot{y} = \quad x - y^3 \quad \equiv \xi_0^2(x,y), \end{cases} \qquad \mathrm{div}\bar{\xi}_0 = -4y^2 .$$

Единственным состоянием равновесия этой системы является начало координат $\mathbf{O(0,0)}$.

Интегрирующую функцию $\mathrm{M}(x,y)$ заданной системы найдем, пользуясь соответствующей системой дифференциальных уравнений в симметричной форме

$$\frac{dx}{-y - xy^2} = \frac{dy}{x - y^3} = \frac{dM}{-4y^2 M},$$

Пользуясь свойством равных отношений, получаем равенство

$$\frac{xdx + ydy}{-y^2(x^2 + y^2)} = \frac{dM}{-4y^2 M},$$

из которого при $y \neq 0$ следует равенство

$$\frac{dM}{M} = \frac{2d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2},$$

интегрируя которое, находим с точностью до произвольного постоянного множителя

$$M(x, y) = (x^2 + y^2)^2.$$

Так как в любой окрестности начала координат функция $M(x, y)$ является положительно определенной, а $\operatorname{div}\bar{\xi}_0$ функцией постоянно отрицательной, согласно теореме 7.2 заключаем, что состояние равновесия системы $O(0,0)$ асимптотически устойчиво.

Линиями уровня функции $M(x, y)$ являются концентрические окружности, определяемые равенством

$$x^2 + y^2 = h \qquad (h \geq 0),$$

стягивающиеся к общему центру $O(0,0)$ при $h \to +0$. Из неравенства

$$\frac{dM\left(x(t), y(t)\right)}{dt} = -4y^2 M(x(t), y(t)) \leq 0,$$

показывающего, что вдоль траекторий рассматриваемой системы функция $M(x(t), y(t))$ не возрастает, следует, что все траектории системы последовательно пересекают указанные окружности снаружи внутрь, касаясь соответствующих окружностей в точках оси Ox, и неограниченно приближаются к началу координат $O(0,0)$ при $t \to +\infty$.

Если ψ – угол между векторами $\bar{\nabla} M \uparrow\uparrow \bar{\xi}_1 = (x, y)$ и $\bar{\xi}_0$ в произвольно выбранной точке плоскости, отличной от точки $O(0,0)$, то для данной системы имеем равенство

$$\cos\psi = \frac{M \operatorname{div}\bar{\xi}_0}{|\bar{\nabla} M||\bar{\xi}_0|} = -\frac{y^2}{\sqrt{1 + y^4}},$$

которое после перехода к полярным координатам по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, принимает вид

$$\cos\psi = \frac{M \operatorname{div}\bar{\xi}_0}{|\bar{\nabla} M||\bar{\xi}_0|} = -\frac{\rho^2 \sin^2\varphi}{\sqrt{1 + \rho^4 \sin^4\varphi}}.$$

Так как $\lim\limits_{\rho \to 0} \cos\psi = 0$ независимо от φ, заключаем, что при $\rho \to 0$ угол, под которым траектории системы пересекают лучи, исходящие из начала координат, неограниченно приближается к прямому. Отсюда следует, что ни одна из траекторий системы не входит в начало координат в определенном направлении, то есть траектории системы являются спиралями, обращающимися вокруг начала координат и неограниченно приближающимися к нему при $t \to +\infty$.

В рассматриваемом случае этот вывод можно также получить, интегрируя уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{(x - y^3)dx}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(y + xy^2)dy}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

что дает общий интеграл системы

$$\frac{1 + xy}{(x^2 + y^2)^2} - arctg\frac{y}{x} = C,$$

из которого после перехода к полярным координатам с помощью указанных выше формул получаем уравнение семейства траекторий системы в виде

$$\rho = \left(C + \varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}},$$

подтверждающее сделанный выше вывод.

Фазовый портрет системы изображен на рисунке 5.

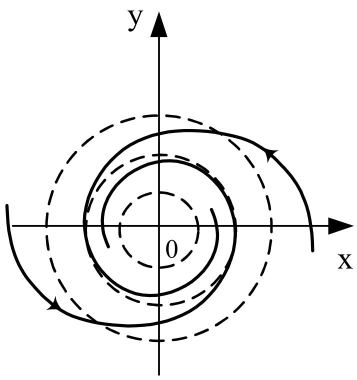

Рис. 5

Направление движения изображающей точки по траекториям системы легко определяется построением вектора $\bar{\xi}_0(x, y)$ в произвольно выбранной точке плоскости, например, в точке (1, 0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц [Текст]. – М. : Наука, 1967. – 575 с.

2. Гюнтер, Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных [Текст]. – Л. ; М. : ГТТИ, 1934. – 359 с.
3. Данилина, Н.И. Численные методы [Текст] / Н.И. Данилина [и др.]. – М. : Высшая школа, 1976. – 368 с.
4. Ефимов, Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия [Текст] / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. – М. : Наука, 1970. – 527 с.
5. Назиев, Э.Х. Фазовые портреты однородных динамических систем второго порядка [Текст]. – Киев, 1991. – 34 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 30.10.91, №1429-Ук 91.
6. Эйзенхарт, Л.П. Непрерывные группы преобразований [Текст]. – М. : ГИИЛ, 1947. – 359 с.

E.Kh. Naziev, A.Kh. Naziev, G.I. Keleynikova

HOMOGENEOUS LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH CONSTANT COEFFICIENTS AND THE PROBLEM OF EIGENVALUES

(PART 2)

It is well known that to solve a homogeneous linear differential system with a constant matrix A one must usually find the Jordan canonical form of the matrix A and to obtain a matrix P such that $J = P^{-1}AP$. To find a matrix J one should rely on the theory of elementary devisors of the characteristic matrix $A - \lambda E$, which triggers off the so called full problem of eigenvalues. This problem is fraught with difficulty. In 1969 R. Bellman argued that there were no simple ways of calculating eigenvalues and eigenvectors of large matrices. Almost nothing has changed since then. The article suggests a new approach to solution of the problem by first computing eigenvectors and further finding eigenvalues, which is the opposite of the traditionally applied procedure. Part 1 was mainly theoretical and part 2 provides practical illustrations.

homogeneous linear differential equations with constant coefficients, eigenvalues, eigenvectors, homogeneous linear group, infinitesimal operator, one-parameter subgroup.