

Вычисление желаемых коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы автоматического управления

В.А. Жмудь, Л.В. Димитров

ФГБОУ ВО «НГТУ», Новосибирск, Россия; Технический университет Софии, София, Болгария

Аннотация: Вопрос выбора желаемого полинома при проектировании регуляторов крайне актуален. В литературе этому вопросу посвящено крайне мало публикаций, как правило эта задача решается на примитивном уровне, то есть выбирается полином, обладающий набором равных кратных отрицательных корней (бином Ньютона), или корни полинома задаются в некоторой области отрицательной полуплоскости (трапеция, сфера, прямоугольник). Этот выбор не только не обоснован, но и далек от оптимального. Статья решает задачу этого выбора на основе требований, предъявляемых к динамическим и статическим свойствам замкнутой системы автоматического управления. Впервые при решении этой задачи среди критериев её эффективности введено в рассмотрение обратное перерегулирование.

Ключевые слова: управление, регулирование, динамическая точность, статическая точность, характеристический полином системы, желаемый полином, желаемая динамика

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании систем автоматического управления к их поведению в замкнутом виде предъявляются определенные статические и динамические требования. К статическим требованиям относится допустимая величина остаточной статической ошибки. Динамические требования задаются чаще всего в форме допустимого перерегулирования, допустимой длительности переходного процесса и так далее. Но в некоторых случаях эти требования формируются в виде желаемого уравнения переходного процесса. Это желаемое уравнение формально описывается полиномом, который должен стоять в знаменателе эквивалентного фильтра низких частот, имеющего такой же переходный процесс. Поэтому также используется задание требований к динамическим свойствам замкнутой системы в форме желаемого полинома (знаменателя передаточной функции фильтра) или желаемого характеристического уравнения (то есть соотношения, в котором этот желаемый полином приравнивается к нулю). Кроме того, некоторые методики, например, метод локализации [1, 2] используют желаемый вид характеристического полинома, то есть без

задания этого желаемого вида такие методики попросту не могут использоваться.

При этом редки случаи, когда указанный желаемый характеристический полином задается в форме набора корней этого полинома. Чаще задается область, в которой эти корни должны располагаться. В некоторых случаях такой полином задается путем выбора его коэффициентов. В этом случае чаще всего используются коэффициенты бинома Ньютона, то есть фактически такой полином содержит все одинаковые вещественные отрицательные корни. Основания для такого выбора недостаточны, поскольку при таком выборе можно лишь достоверно указать, что система с таким характеристическим полиномом устойчива, но не более того. Очевидно, что система с таким полиномом обладает далеко не лучшим быстродействием. Более обоснованного выбора характеристического полинома почти не встречается в литературе, за исключением единичных публикаций, как, например, [3].

В работе [3] обоснован подход к решению этой задачи. Но результат решения этой задачи в указанной публикации может быть пересмотрен на основе новейших достижений в области моделирования замкнутых динамических систем, в том числе с помощью программы VisSim, которая использовалась в указанной публикации.

В настоящей статье критически обсуждаются ранее полученные результаты, предлагается обновленная и более эффективная методика для вычисления желаемых коэффициентов полинома, из которой можно увидеть, что задание полинома через коэффициенты бинома Ньютона или через область расположения корней существенно уступает предлагаемой методике.

Наибольшее практическое значение имеет решение этой задачи для полиномов от третьего до пятого порядка. Для полиномов первого порядка эта задача очевидна, поскольку выбора фактически нет, для полинома второго порядка задача сводится к выбору единственного коэффициента, что может быть сделано многими методиками с приблизительно одним и тем же результатом, но с ростом порядка эта задача существенно усложняется. Вместе с тем при слишком высоком порядке полинома эта задача утрачивает практическое значение, поскольку на практике всегда бывает достаточно ограничиться порядком не более четвертого (реже пятого).

Однако предлагаемая методика без каких-либо сложностей может быть распространена на достаточно большой порядок (пятый и выше).

1. ЗАМКНУТАЯ СИСТЕМА И ЕЁ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Линейная замкнутая динамическая система автоматического регулирования описывается, как правило, моделью, приблизительно совпадающей с моделью фильтра низких частот (ФНЧ). Если система склонна к колебаниям, но устойчива, то эквивалентный фильтр в знаменателе содержит соответствующие полиномы с комплексно-сопряженными корнями, реальная часть которых отрицательна. Если все корни действительные и отрицательные, то система устойчива. Но если система устойчива, то она не обязательно должна содержать только действительные отрицательные корни, поскольку комплексно-сопряженные корни с отрицательной действительной частью также могут входить в набор корней её характеристического полинома.

Если система не только устойчива, но еще и астатическая, то статический коэффициент передачи указанного фильтра равен единице. Поскольку только такие системы, как правило, желательны, то в желаемом характеристическом полиноме следует в любом случае задать свободный член равным единице.

В общем виде передаточная функция фильтра низких частот порядка N можно описать соотношением:

$$W(s) = 1 / P_N(s). \quad (1)$$

Здесь s – аргумент преобразования Лапласа, а $P_N(s)$ – полином вида [3]:

$$P_N(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots s^N. \quad (2)$$

Здесь коэффициент при старшем члене полинома (2) мы положили равным единице для определенности, как и в работе [3], поскольку это можно всегда обеспечить соответствующим выбором масштаба времени и частот. Отклик системы с передаточной функцией вида (1) можно рассчитать моделированием, например, в программе *VisSim*, которая также позволяет строить соответствующие графики.

2. ЗАДАЧА ВЫБОРА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА И ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Из соотношения (2) видно, что первый и последний коэффициенты полинома заданы единичными, то есть задача выбора этих коэффициентов не стоит. Следовательно, для полиномов нулевого и первого порядка обсуждаемая задача стоять не может. Для полинома второго порядка стоит задача выбора единственного коэффициента. В общем случае для полинома порядка N необходимо выбрать $N - 1$ коэффициент среди множества положительных коэффициентов. Нулевые и отрицательные коэффициенты могут быть исключены из

рассмотрения заранее на основе связи корней полиномов с коэффициентами, а при автоматическом или автоматизированном вычислении коэффициентов нулевые или отрицательные коэффициенты просто не должны получаться в результате этой процедуры.

Наряду с нулевой статической ошибкой, что обеспечивается строгим равенством единице коэффициента при свободном члене полинома (2), к системе предъявляются следующие требования:

1. Недопустимо существенное обратное перерегулирование, то есть начальный ход процесса в неверном направлении.
2. Весьма нежелательно существенное перерегулирование, то есть выброс переходного процесса за предписанный установившийся уровень.
3. Нежелательны многократные колебания переходного процесса около установившегося уровня.
4. Нежелательна не монотонность переходного процесса, то есть резкие (и многократные) изменения его направления или скорости даже при сохранении в целом правильной тенденции его развития.

При таком обилии требований, которые могут быть даже дополнены, задача выбора коэффициентов полинома становится трудной, а результат неоднозначным.

В работе [3] применен следующий подход.

1. Моделируется фильтр низких частот на основании модели соответствующего порядка с указанными коэффициентами.
2. Вычисляется переходный процесс изменения во времени ошибки в системе управления $e(t)$ как разница между единичным предписанным значением и откликом на выходе этого фильтра.
3. Вычисляется некоторая стоимостная функция, зависящая от ошибки, например, интеграл от квадрата ошибки, умноженного на время в некоторой целой степени M :

$$F_C(T, M) = \int_0^T e^2(t) t^M dt. \quad (3)$$

4. Поскольку имеется неопределенность, какую степень M выбрать, осуществляется решение указанной задачи для различных целых значений M , от 1 до 7 и при необходимости выше.
5. Анализируется результат путем простого сопоставления графиков переходных процессов (визуальный анализ). На этом основании делается вывод о наилучшем значении M . Тем самым делается выбор методики решения задачи отыскания коэффициентов полинома, что подтверждено моделированием для полиномов от третьего до пятого порядка.
6. Получены значения коэффициентов указанных полиномов. Рассчитаны и

построены графики соответствующих переходных процессов.

Результаты могут быть сведены в Табл. 1–4. В нижней строке даны коэффициенты, найдены без использования критерия, опытным (субъективным) путем.

Таблица 1. Результаты расчета коэффициентов для полиномов второго порядка

Значение M	a_1	Условное обозначение
2	1,34	A
4	1,53	B
6	1,66	C
Субъективный подбор коэффициентов	1,66	D

Таблица 2. Результаты расчета коэффициентов для полиномов третьего порядка

Значение M	a_1	a_2	Обознач-е
2	1,455	2,04	A
4	1,85	2,185	B
6	1,96	2,185	C
Субъектив.	2,3	2,1	D

Таблица 3. Результаты расчета коэффициентов для полиномов четвертого порядка

Значение M	a_1	a_2	a_3	Обознач-е
2	2,4	3,1	1,7	A
4	2,3	3,1	1,73	B
6	2,3	3,1	1,85	C
Субъективный	2,6	3,4	1,95	D

Таблица 4. Результаты расчета коэффициентов для полиномов пятого порядка

Значение M	a_1	a_2	a_3	a_4	Обознач-е
2	2,8	5	4,2	2,75	A
4	2,93	4,79	4,275	2,65	B
6	3,0	4,6	4,35	2,38	C
Субъект	3,4	5,3	5	2,8	D

3. КРИТИКА ИЗВЕСТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе [3] не уделено достаточного внимания обратному перерегулированию. Результаты моделирования отражены на графиках, при выборе фиксированных границ осей. При этом нижняя граница по оси ординат была взята нулевой.

Осуществим детальный анализ переходных процессов в указанных фильтрах, например, путем моделирования в программе VisSim. На Рис. 1 показаны переходные процессы в фильтрах с характеристическими полиномами из Таблицы 2. Различные графики маркированы буквами из последнего столбца этой таблицы. Видно, что графики, маркированные как A, B, C и D, характеризуются обратным перерегулированием около 15 %. Для сравнения приведен график, маркированный буквой E, в котором обратное перерегулирование не превышает 5 %. Исходя из этого, можно сделать вывод, что все выше рассмотренные результаты, применительно к Таблице 2, характеризуются достаточно большим перерегулированием. Эта величина приблизительно одинаковая, она не подлежит управлению. То есть эту величину нельзя снизить с критерием вида (3).

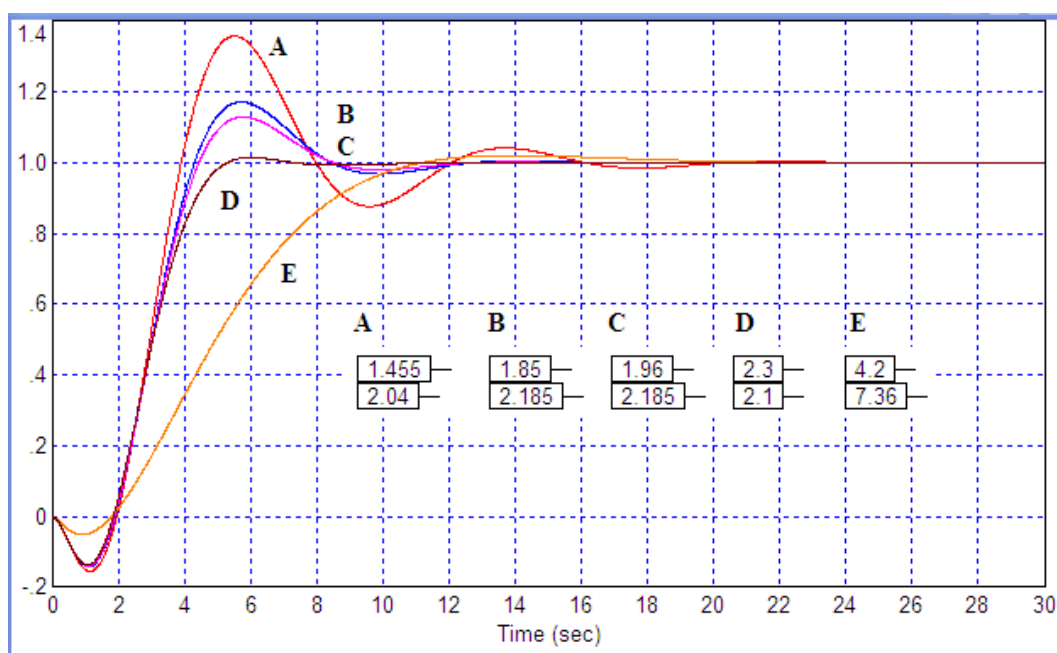


Рис. 1. Переходные процессы в фильтрах с различными характеристическими полиномами по Таблице 2.

На Рис. 2 показаны аналогичные процессы в системах с фильтрами, имеющими в знаменателе передаточной функции характеристические полиномы из Таблицы 3. Также графики с метками А, В, С и D, характеризуются обратным перерегулированием около 10 %. Для сравнения

график, маркированный буквой Е, почти не имеет обратного перерегулирования.

Из этого следует, что рассмотренные критерии оптимизации не удовлетворительны для решения поставленной задачи, а коэффициенты, представленные в Таблицах 1–4, нуждаются в уточнении.

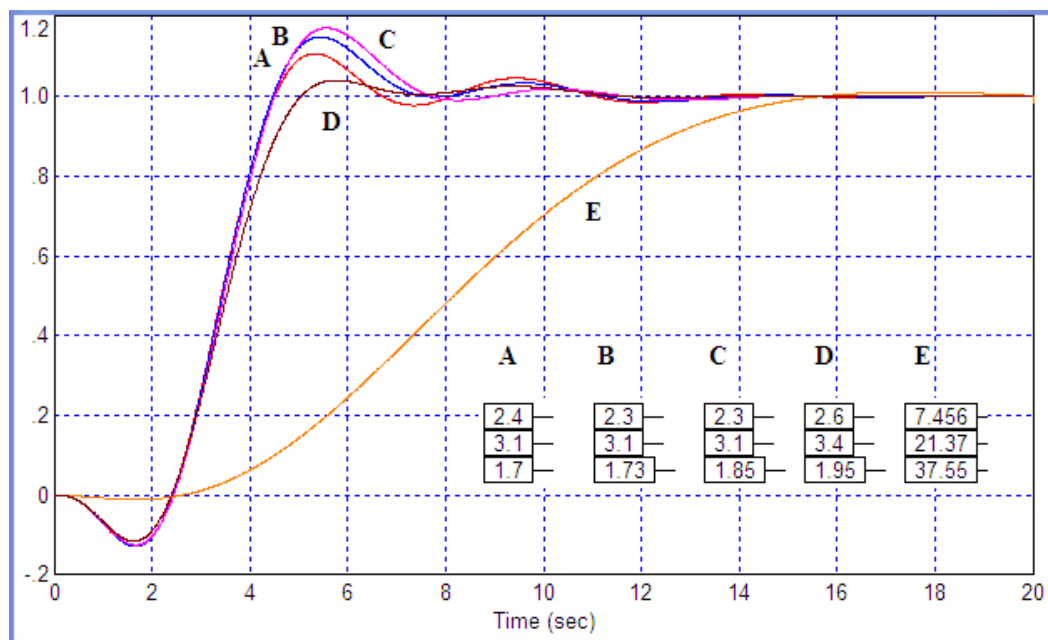


Рис. 2. Переходные процессы в фильтрах с различными характеристическими полиномами по Таблице 3.

4. ПРЕДЛАГАЕМОЕ РЕШЕНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

С учетом развития методик оптимизации замкнутых систем, опубликованных в серии работ [4–6], можно рекомендовать три нижеследующие стоимостные функции (4) – (6), причем в соотношении (6) используемая функция определена соотношением (7):

$$F_{C1}(T) = \int_0^T |e(t)| dt, \quad (4)$$

$$F_{C2}(T) = \int_0^T |e(t)| t dt, \quad (5)$$

$$F_{C3}(T) = \int_0^T \{ |e(t)| t + f[k, e(t)] \} dt, \quad (6)$$

$$f[k, e(t)] = k \max\{0, e(t) \cdot de(t)/dt\}. \quad (7)$$

Предлагается моделировать системы методом открытой модели фильтра. Ранее этот метод не применялся с использованием программы VisSim, поскольку такое моделирование не давало полной адекватности переходного процесса в сравнении с использованием модели в виде передаточной функции. Однако, поскольку выяснено, что адекватность легко достигается при выборе в качестве метода интегрирования адаптивного

метода Булири-Стоера [4], использование открытой модели стало возможным.

4.1. Полиномы четвертого порядка

На Рис. 3 показана структура для моделирования и оптимизации фильтра. В этой структуре использован критерий (6), (7). Небольшие модификации этой структуры позволяют преобразовать вычислитель этой целевой функции в вычислитель функции (5) или (4). Получаемый переходный процесс в такой системе показан на Рис. 4.

Из процесса, показанного на Рис. 4, видно, что может быть путем оптимизации при выборе критерия (6), (7) получен полином, которому соответствует процесс практически без обратного перерегулирования. Это требование отсутствия обратного перерегулирования учитывается в стоимостной функции путем включения под интеграл слагаемого, которое растет в том случае, если имеются участки, на которых ошибка и её производная совпадают по знаку, то есть ошибка растет по величине. Весомость этого слагаемого задается весовым коэффициентом. Если положить его равным нулю (то есть разомкнуть верхнюю цепь верхнего сумматора), то получим целевую функцию вида (5). Оптимизация коэффициентов полинома в этом случае дает их значения, которые показаны на Рис. 5, где также показан и соответствующий график переходных процессов.

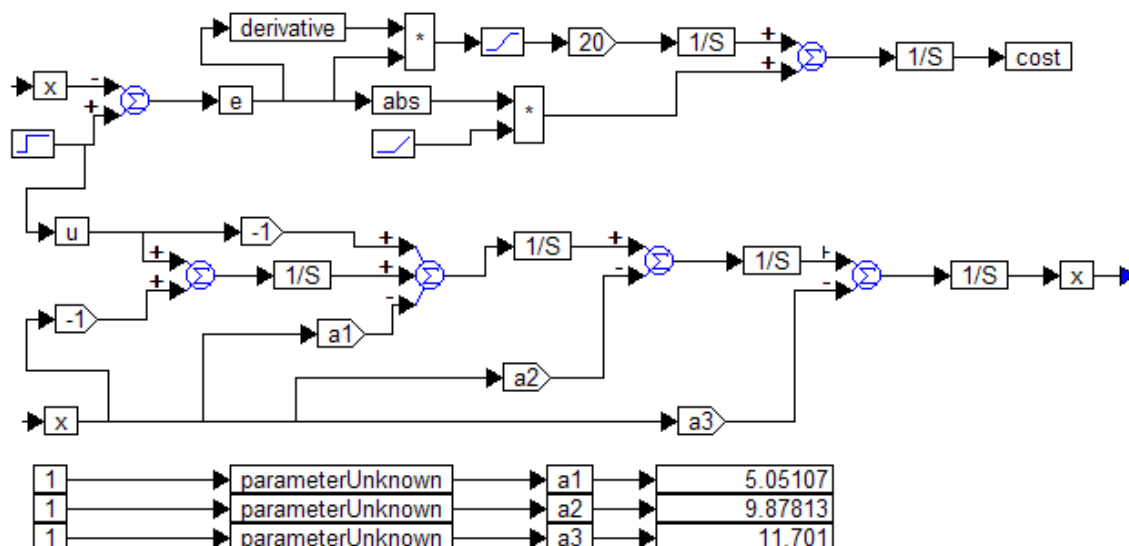


Рис. 3. Устройство для оптимизации фильтра четвертого порядка по критерию (6), (7)

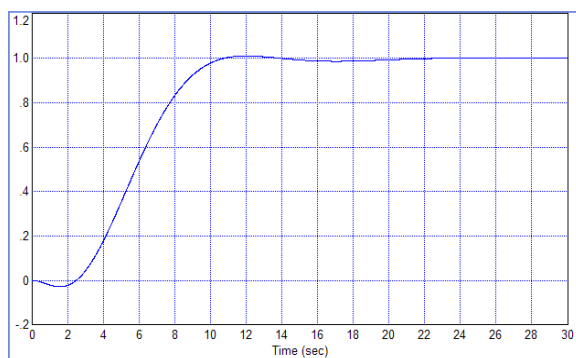


Рис. 4. Полученный переходный процесс в структуре по Рис. 3 с весовым коэффициентом $k = 20$

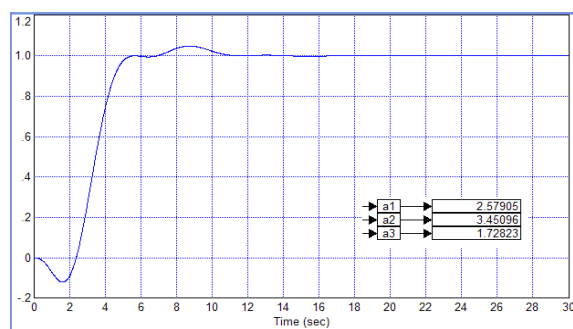


Рис. 6. Полученный переходный процесс в структуре по Рис. 3 по целевой функции (4)

Для сравнения на Рис. 6 показан аналогичный результат по целевой функции (4). Внешне эти результаты отличаются не существенно, хотя в целевой функции (5) существенное значение имеет скорость затухания модуля ошибки, а в целевой функции (4) значение имеет накопленный интеграл от модуля ошибки, вне зависимости от того, в какой момент времени эта ошибка имеет место.

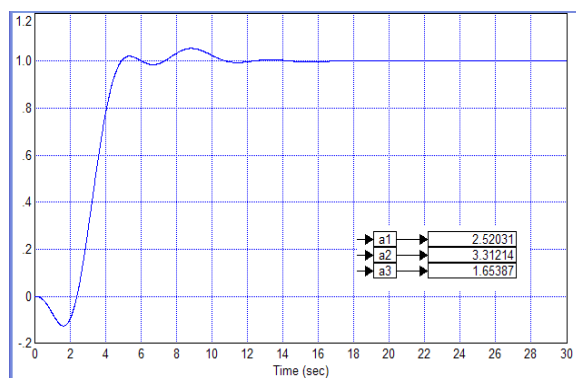


Рис. 5. Полученный переходный процесс в структуре по Рис. 3 с весовым коэффициентом $k = 0$, то есть по целевой функции (5)

На Рис. 7 показаны результаты исследований зависимости результата от коэффициента k в соотношении (7).

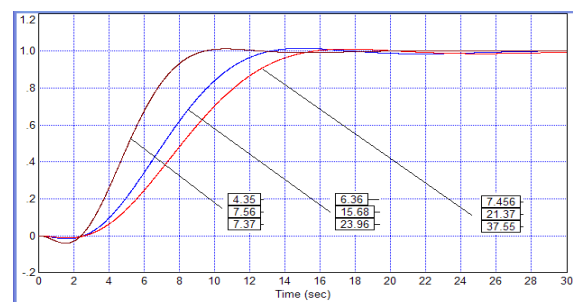


Рис. 7. Полученный переходный процесс в структуре по Рис. 3 с весовым коэффициентом $k = 10$ (черная линия), $k = 20$ (синяя линия) и $k = 100$ (красная линия)

Видно, что выбором большого коэффициента можно полностью исключить оба вида перерегулирования (обратное и прямое), при небольшом коэффициенте эти перерегулирования имеются, но могут быть сделаны несущественными, что позволяет увеличить скорость переходного процесса. Соответственно, выбором промежуточного значения этого

коэффициента можно обеспечить достижение требуемого компромисса между требованиями высокого быстродействия и малого перерегулирования.

4.2. Полиномы третьего порядка

Поставленная задача для полиномов третьего порядка решается упрощением структуры по Рис. 4. Из неё следует исключить лишний коэффициент, лишний интегратор и лишний сумматор, после чего восстановить целостность петли. Также следует удалить лишний блок оптимизации неизвестного параметра. Полученная структура показана на Рис. 8.

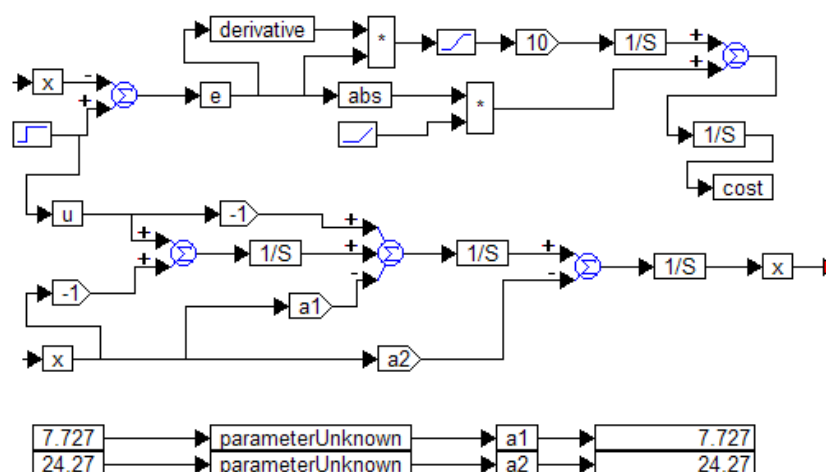


Рис. 8. Устройство для оптимизации фильтра четвертого порядка по критерию (6), (7)

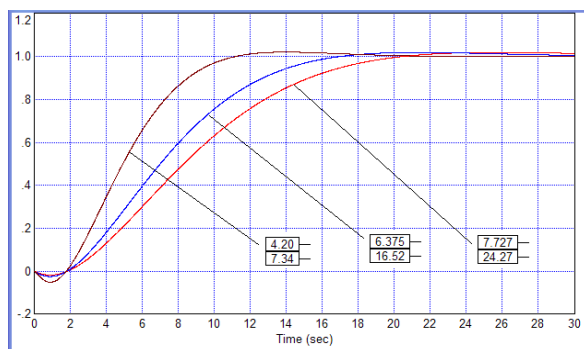


Рис. 9. Полученный переходный процесс в структуре по Рис. 8 с весовым коэффициентом $k = 10$ (черная линия), $k = 20$ (синяя линия) и $k = 100$ (красная линия)

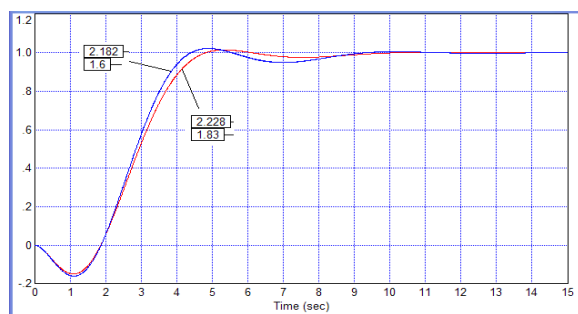


Рис. 10. Полученный переходный процесс в структуре по Рис. 8 по критерию (4) (синяя линия) и по критерию (5) (красная линия)

Результаты оптимизации по критерию (6), (7) с использованием этой структуры показаны на Рис. 9. На этом основании можно сделать аналогичные выводы о том, что выбором весового коэффициента можно обеспечить компромисс между требуемыми быстродействием и малым перерегулированием. На Рис. 10 показаны результаты оптимизации по критериям (4) и (5), видно, что результаты отличаются не существенно, в обоих случаях обратное перерегулирование достигает приблизительно 15 %.

4.3. Полиномы пятого порядка

Поставленная задача для полиномов пятого порядка решается усложнением структуры по Рис. 4. В неё следует включить дополнительный коэффициент a_4 , дополнительный интегратор и дополнительный сумматор, а также дополнительный блок оптимизации нового неизвестного параметра. Полученная структура показана на Рис. 11. Результаты оптимизации по критерию (6), (7) с использованием этой структуры показаны на Рис. 12. Результаты с коэффициентами $k = 10$ и $k = 50$ мало отличаются, графики сливаются, поэтому осуществлено дополнительное моделирование с коэффициентом $k = 75$.

На этом основании можно сделать аналогичные выводы о том, что выбором весового коэффициента можно обеспечить компромисс между требуемыми быстродействием и малым перерегулированием. На Рис. 13 показаны результаты оптимизации по критериям (4) и (5). Эти результаты неотличимы друг от друга. Коэффициенты отличаются в четвертом знаке, графики сливаются. Обратное перерегулирование отсутствует, графики и коэффициенты полинома похожи на графики и коэффициенты, полученные при $k = 100$.

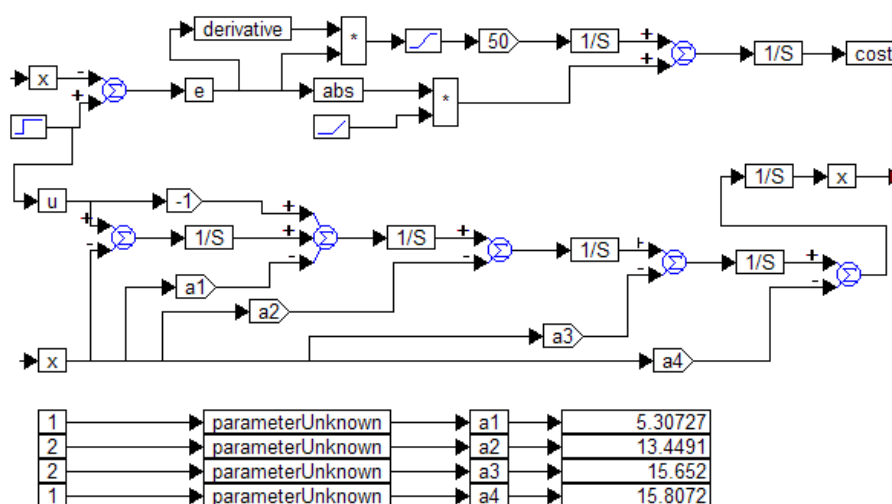


Рис. 11. Устройство для оптимизации фильтра пятого порядка по критерию (6), (7)

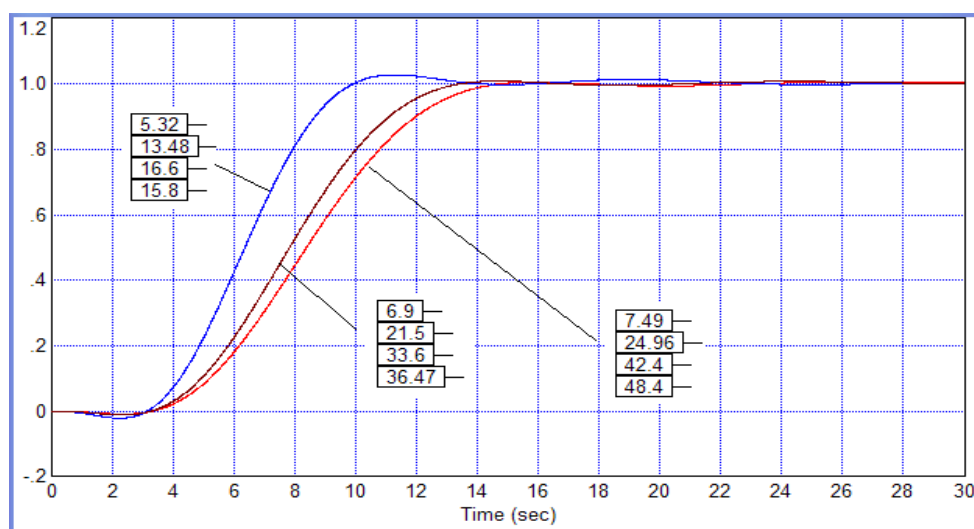


Рис. 12. Полученный переходный процесс в структуре по Рис. 11 с весовым коэффициентом $k = 10$ (синяя линия), $k = 75$ (черная линия) и $k = 100$ (красная линия); при весовых коэффициентах 10 и 50 результат практически один и тот же (линии сливаются)

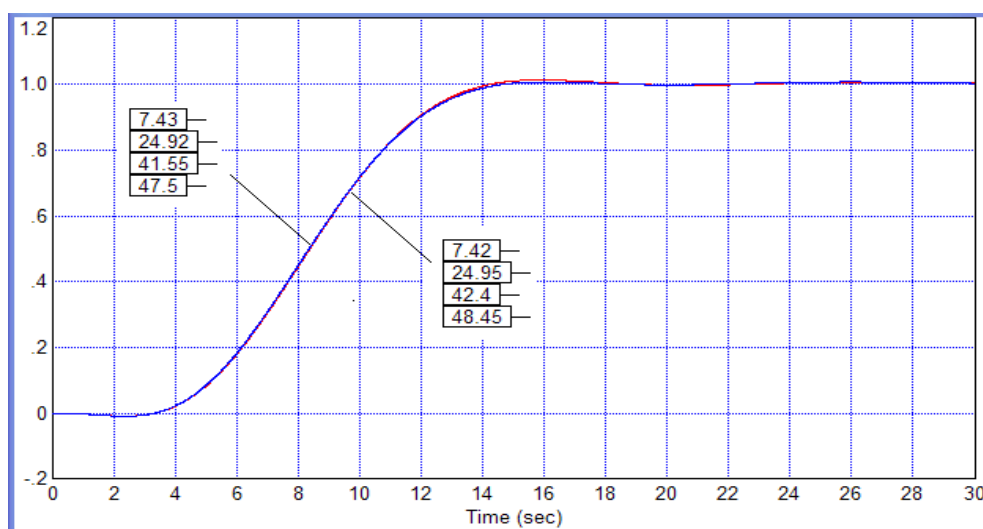


Рис. 13. Полученный переходный процесс в структуре по Рис. 11 по критерию (4) и по критерию (5) (графики сливаются)

5. СВОДНЫЕ ТАБЛИЦЫ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты исследований можно свести в таблицы, аналогичные тем, в которых сведены результаты, полученные в работе [3]. Эти результаты показаны в Таблицах 5–7. Аналогичные таблицы можно при необходимости рассчитать и составить для полиномов более высокого порядка (шестой и выше).

Таблица 5. Результаты расчета коэффициентов для полиномов третьего порядка

Значение k	a_1	a_2	Обозначение
10	4,2	7,34	Е
50	6,375	16,52	Ф
100	7,727	24,27	Г
0	2,23	1,83	Н

Таблица 6. Результаты расчета коэффициентов для полиномов четвертого порядка

Значение k	a_1	a_2	a_3	Обозначение
10	4,35	7,56	7,37	Е
20	5,05	9,87	11,7	Ж
50	6,36	15,68	23,96	Ф
100	7,456	21,37	37,55	Г
0	2,52	3,32	1,65	Н

Таблица 7. Результаты расчета коэффициентов для полиномов пятого порядка

Значение k	a_1	a_2	a_3	a_4	Обозначение
10	5,32	13,48	16,6	15,8	Е
75	6,9	21,5	33,6	36,47	Ф
100	7,49	24,96	42,2	48,4	Г
0	7,42	24,95	42,4	48,4	Н

Полученные полиномы в большей степени соответствуют определению «желаемый характеристический полином замкнутой динамической системы». Переходные процессы в системах с такими характеристическими полиномами характеризуются пренебрежимо малым перерегулированием, или полным отсутствием перерегулирования. Особенно это важно в отношении обратного перерегулирования, которому в работе [3] не было уделено внимания. От предписанных коэффициентов полиномов легко можно перейти к положению корней полиномов на комплексной плоскости, если это потребуется. Для этого достаточно учесть, что во всех случаях $a_0 = 1$, $a_N = 1$. Вычисление корней полинома по его коэффициентам для случая $N = 2$ может быть сделано по известному соотношению, для полиномов более высокого порядка это можно сделать с помощью, например, программы *MATLAB*. По результатам можно графически оценить желаемое положение корней и построить область их расположения. Однако, для решения

задач автоматического управления этого не требуется, поскольку известные методики как раз опираются на задание желаемого характеристического полинома через его коэффициенты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России по государственному заданию №2014/138, тема проекта «Новые структуры, модели и алгоритмы для прорывных методов управления техническими системами на основе наукоемких результатов интеллектуальной деятельности», проект № 471.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А.С. Востриков, Г.А. Французова. Теория автоматического регулирования: учебник. М.: Высшая школа, 2006. - 365 с..
- [2] В. А. Жмудь, Г. А. Французова, А. С. Востриков. Динамика мехатронных систем: учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. - 176 с.
- [3] В.А. Жмудь. Выбор желаемых полиномов характеристического уравнения замкнутой динамической системы. http://zhurnal.lib.ru/editors/z/zhmudx_w_a/polinom.shtml
- [4] В.А. Жмудь, В.М. Семибаламут, Л.В. Димитров. Структуры и методы цифрового управления колебательными объектами. Автоматика и программная инженерия. 2016. № 1 (15). С. 19–30.
- [5] В.А. Жмудь, Л.В. Димитров. Адаптивные системы на основе конкурентных критериев оптимума. Автоматика и программная инженерия. 2015. № 4 (14). Р. 19–25. ISSN 2312-4997.
- [6] В.А. Жмудь. Моделирование, исследование и оптимизация замкнутых систем автоматического управления. Монография. Новосибирск. Издательство НГТУ. 2012. – 335 р. ISBN 978-5-7782-2162-8



Вадим А. Жмудь, заведующий кафедрой Автоматики в Новосибирском государственном техническом университете, <http://en.nstu.ru/>, автор более чем 300 научных работ, включая более 20 патентов, 12 учебных пособий. E-mail: zhmud@corp.nstu.ru



Любомир В. Димитров, декан машиностроительного факультета Технического университета Софии (София, Болгария), доктор наук, профессор, автор более 200 научных статей. Область исследований: мехатроника, автоматика, микроэлектронные модули и системы и их применение (MEMS). E-mail: lyubomir.dimitrov@tu-sofia.bg

Calculation of the Desired Coefficients of the Characteristic Equation of the Locked Control System

V.A. Zhmud, L.V. Dimitrov

Abstract: The choice of the desired polynomial is very relevant in the design of regulators. In the literature devoted to this problem are very few publications tend to this problem is solved at a primitive level, i.e. the selected polynomial having set equal multiple negative roots (binomial theorem), or the roots of the polynomial are set in a certain region of the negative half-plane (trapezoid, sphere, rectangle) . This choice is not only justified, but also far from optimal. The paper solves the problem of the selection on the basis of the requirements for dynamic and static properties of the control loop. For the first time in the solution of this problem among the criteria it effectiveness introduced in consideration of the reverse overshoot.

Key words: control, regulation, dynamic accuracy, the static accuracy of the characteristic polynomial of the system, the polynomial of desired dynamics

REFERENCES

- [1] A.S. Vostrikov, G.A. Francuzova. Teoriya avtomaticheskogo regulirovaniya: uchebnik. M.: Vysshaja shkola, 2006. - 365 s.
- [2] V. A. Zhmud', G. A. Francuzova, A. S. Vostrikov. Dinamika mehatronnyh sistem: ucheb. posobie. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2014. - 176 s.
- [3] V.A. Zhmud. Vybór zhelaemyh polinómov harakteristicheskogo uravnenija zamknutoj dinamicheskoy sistemy. http://zhurnal.lib.ru/editors/z/zhmudx_w_a/polinom.shtm
- [4] V.A. Zhmud, V.M. Semibalamut, L.V. Dimitrov. Structure and Methods of Control of Oscillating Objects. Automatics & Software Engineering. 2016. № 1 (15). C. 19–30.
- [5] V.A. Zhmud, L.V. Dimitrov. "Adaptive feedback systems on the base of Concurrent Criteria of Optimum". Automatics & Software Engineering. 2015. № 4 (14). P. 19–25. ISSN 2312-4997.
- [6] V.A. Zhmud. "Simulation, research and optimization of locked system of automatic control". Monograph. Novosibirsk. Publishing house of NSTU. 2012. – 335 p. ISBN 978-5-7782-2162-8