

УДК 518.9

П. В. Строкан, Т. Матсухиса

ИНФОРМАЦИОННЫЕ РАВНОВЕСИЯ В КОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

1. Введение. В последнее время многие исследователи в области экономики, теории искусственного интеллекта и компьютерных наук стали заниматься моделированием доверия и знания. Одним из направлений работ стало знание группы игроков. Игроки группы принимают во внимание не только свои знания о происходящих событиях, но и знания других игроков.

В некоторых случаях необходимо рассмотреть ситуации, где игроки имеют общее знание о событии, т. е. «каждый игрок знает о событии», «каждый знает, что каждый знает о событии» В 1976 г. Ауманном [1] была представлена модель, основанная на общем знании, и выведена теорема о невозможности ситуации, когда игроки, имеющие общее начальное разбиение на множестве элементарных событий, но при этом обладающие различной персональной информацией (разным взглядом на происходящие события), не придут к согласию при условии общего знания апостериоров (апостериорных вероятностей некоего события) игроков. В дальнейшем было рассмотрено несколько расширений этой модели (см. [2, 3]).

Предположение об общем знании накладывало существенные ограничения на построение моделей взаимодействия игроков, потому от него начали отказываться. Авторы статьи [4] рассмотрели коммуникационный процесс, в котором игроки рассказывают о своих апостериорах друг другу, в процессе общения они их пересматривают и таким образом достигают равновесия. В [5] показано, что игроки всегда приходят к согласию, если коммуникационный протокол (правило, по которому игроки обмениваются сообщениями) не имеет циклов.

Информационные множества игроков в моделях [1, 4, 5] определяются разбиением пространства состояний. В [2] обобщены результаты для стандартной модели знания и показано, что она эквивалентна модели оператора знания при выполнении трех условий, накладываемых на оператор каждого игрока. Матсухиса и Камияма [6] рассмотрели модель со структурой знания, в которой выполнение трех условий модели [2] не требуется, но при этом в их модели оператор знания должен удовлетворять условию монотонности.

Позднее была разработана модель осведомленности [7], где на операторы не накладываются ограничения монотонности, и обобщена теорема Ауманна на эту модель при условии общего знания (общего доверия) апостериоров игроков.

Строкан Павел Владимирович – ассистент кафедры математической теории игр и статистических решений факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Научное направление: компьютерное моделирование математических моделей. E-mail: stron@rambler.ru.

Матсухиса Такаши – профессор факультета естественных наук национального технологического колледжа Ибараки (Япония). Количество опубликованных работ: более 15. Научные направления: теория игр, коммуникационные процессы. E-mail: mathisa@ge.ibaraki-ct.ac.jp.

© П. В. Строкан, Т. Матсухиса, 2009

В [8] рассмотрен коммуникационный процесс, основанный на модели осведомленности [7], и обобщена теорема Ауманна без условия общего знания (общего доверия) апостериоров игроков.

В рамках настоящей работы разработано программное обеспечение (ПО), моделирующее коммуникационный процесс [8]. Расчет модели процесса без использования компьютера является достаточно трудоемкой задачей, требующей чрезвычайной аккуратности. Разработанное ПО позволяет значительно ускорить время расчета модели, а также снизить влияние человеческого фактора на правильность результата.

2. Модель. Опишем коммуникационный процесс [8] и приведем теорему Ауманна [1] о согласии, рассмотренную в контексте данной модели.

2.1. Доверие и осведомленность. Пусть N – конечное множество игроков, $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Через i будем обозначать игрока. Пространство состояний Ω – это конечное непустое множество, элементы которого ω будем называть состояниями. Событие – подмножество пространства состояний Ω , 2^Ω – множество всех событий. Будем говорить, что событие F произошло в состоянии ω , если $\omega \in F$.

Структура доверия – это пара $\langle \Omega, (B_i)_{i \in N} \rangle$, где Ω – пространство состояний, а $(B_i)_{i \in N}$ – класс операторов доверия игрока i на множестве 2^Ω . Оператор доверия интерпретируется как событие «игрок i верит в F ». Оператор совместного доверия B_E определим как $B_E F = \bigcap_{i \in N} B_i F$, где $F \in \Omega$.

Структура осведомленности – это тройка $\langle \Omega, (A_i), (B_i) \rangle$, где $\langle \Omega, (B_i) \rangle$ – структура доверия, а (A_i) – класс операторов осведомленности игрока i на множестве 2^Ω , такой, что выполняется

$$B_i F \cup B_i(\Omega \setminus B_i F) \subseteq A_i F, \quad F \in 2^\Omega, \quad i \in N.$$

Оператор осведомленности $A_i F$ интерпретируется как событие «игрок i осведомлен о событии F », т. е. игрок i доверяет событию F или доверяет тому, что он не доверяет событию F . Оператор совместной осведомленности A_E определим следующим образом: $A_E F = \bigcap_{i \in N} A_i F$. Здесь $A_E F$ означает событие, что все игроки осведомлены о событии F , но при этом никто из них не знает, что другие осведомлены о нем.

Информационная структура (P_i) – это класс отображений из Ω в 2^Ω , которые определяются следующим образом:

$$P_i(\omega) = \bigcap_{T \in 2^\Omega} \{T | \omega \in T \subseteq B_i T\}.$$

Если не существует события T , для которого $\omega \in T \subseteq B_i T$, то множество $P_i(\omega)$ будем считать не определенным для элемента ω . Будем называть событие F самоосведомленным для игрока i , если $F \subseteq A_i F$, и общеосведомленным, если $F \subseteq A_E F$. Событие T будем называть очевидным для игрока i , если $T \subseteq B_i T$, и общеочевидным, если $T \subseteq B_E T$, т. е. событие является общеочевидным, когда все игроки доверяют ему, когда оно происходит.

2.2. Функция принятия решений. Обозначим через I отрезок $[0, 1]$. Множеством принятия решений назовем слабоупорядоченную I -аддитивную полугруппу $Z = (Z, +, \cdot, \geq)$, где $(Z, +, \cdot)$ – аддитивная полугруппа, на которой $I^\times = (0, 1]$ образует мультипликативную группу $\alpha(z_1 + z_2) = \alpha z_1 + \alpha z_2$ для $\forall \alpha \in I, z_1, z_2 \in Z$ и $(Z, \geq)$ – непустое множество с отношением порядка $\geq$, для которого

- 1) $\forall x, y \in Z$, выполняется хотя бы одно из условий $x \geq y, y \geq x$;
- 2) $\forall x, y, z \in Z$, если $x \geq y$ и $y \geq z$, то $x \geq z$;
- 3) x и y равны, т. е. $x = y$, если одновременно выполняется $x \geq y$ и $y \geq x$.

Функция принятия решения игрока i – это отображение f_i из 2^Ω в R . Будем говорить, что функция принятия решения удовлетворяет принципу деловой стабильности, если для двух непересекающихся событий S и T таких, что если $f_i(S) = f_i(T) = d$, выполняется $f_i(S \cup T) = d$. Функция принятия решений называется выпуклой, если для двух непересекающихся событий S и T существуют положительные числа $\lambda, \delta \in (0, 1)$, такие, что $f_i(S \cup T) = \lambda f_i(S) + \delta f_i(T)$, $\lambda + \delta = 1$.

Если функцию принятия решения сузить до апостериора и предположить, что задана некая вероятностная мера μ , общая для всех игроков, и событие X , то функцию принятия решения можно определить следующим образом:

$$f_i(F) = \mu(X \cap A_i(X)|F), \mu(F) > 0.$$

2.3. Коммуникационный процесс. Игроки общаются путем обмена сообщениями. Процесс коммуникации происходит согласно некому протоколу(правилу).

Протокол – это отображение из множества целых неотрицательных чисел Z_+ в $N \times N$, т. е. каждому неотрицательному числу t ставится в соответствие пара $(s(t), r(t))$. В данном случае t – время, $s(t)$ и $r(t)$ – это отправитель сообщения и получатель соответственно.

Определение 1. Коммуникационный процесс π пересмотра значений функции принятия решения $(f_i)_{i \in N}$ – это тройка $\langle Pr, (Q_i^t)_{(i,t) \in N \times Z_+}, (f_i)_{i \in N} \rangle$, в которой

1. $Pr(t) = (s(t), r(t))$ – протокол, где для любого t , $r(t) = s(t+1)$. Коммуникационный процесс периодичен, т. е. существует натуральное число r такое, что для всех неотрицательных t выполняется $s(t) = s(t+r)$.

2. Q_i^t – отображение из Ω в 2^Ω для игрока i в момент времени t , определяемое индуктивно:

а) $Q_i^0 = P_i$;

б) предположим, что Q_i^t определено. Через $d_i^t(\omega)$ обозначим значение $f_i(Q_i^t(\omega))$.

W_i^t – это отображение, которое ставит в соответствие каждой ω событие $W_i^t(\omega)$, состоящее из таких состояний ξ , для которых $d_i^t(\xi) = d_i^t(\omega)$.

B_i^t – оператор доверия, который рассчитывается следующим образом:

$$B_i^t(F) = \{\omega \in \Omega | Q_i^t(\omega) \subseteq F\}.$$

A_i^t – оператор осведомленности – определим так:

$$A_i^t(F) = B_i^t(F) \cup B_i^t(\Omega \setminus B_i^t(F)).$$

Игрок-отправитель $i = r(t)$ отправляет сообщение $B_i^t(W_i^t(\omega))$ в момент времени $t+1$, когда $\omega \in B_i^t(W_i^t(\omega))$, и не отправляет в противном случае.

Тогда Q_i^{t+1} можно вычислить следующим образом:

1. Если игрок i не является получателем сообщения в момент $t+1$, то $Q_i^{t+1} = Q_i^t$.

2. Если игрок i – получатель, то $Q_i^{t+1} = Q_i^t \cap B_i^t(W_i^t(\omega))$. Процесс коммуникации прерывается в состоянии ω , если $\omega \notin B_i^t(W_i^t(\omega))$.

2.4. Согласие. Множество Ω конечно, семейство $\{Q_i^t(\omega) | t = 0, 1, 2, \dots\}$ является убывающей цепочкой, поэтому во всех состояниях, в которых процесс коммуникации никогда не прерывается, существует предельное Q_i^∞ . Назовем $d_i^\infty(\omega) = f(Q_i^\infty)$ предельным значением функции принятия решения игрока i в ω .

Авторы работы [8] показали, что согласие (ситуация, когда информационные множества игроков перестают изменяться в процессе коммуникации) достигается,

если $d_i^\infty(\omega) = d_j^\infty(\omega)$ для любых игроков i и j во всех состояниях ω , где процесс коммуникации не прерывается. Они доказали следующую теорему:

Теорема. *Предположим, что все игроки имеют общее априорное распределение. Согласие в предельных значениях апостериоров события, о котором осведомлены все игроки, будет гарантировано в процессе коммуникации, даже если протокол содержит циклы.*

3. Пример. Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий коммуникационный процесс, описанный в статье. Зададим структуру осведомленности трех игроков $< \Omega, (A_i)_{i=A,B,C}, (B_i)_{i=A,B,C} >$, где A, B, C – игроки, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$ – пространство состояний. Определим оператор доверия $B_i^t(F) = \{\omega \in \Omega | Q_i^t(\omega) \subseteq F\}$ и оператор осведомленности $A_i^t(F) = B_i^t(F) \cup B_i^t(\Omega \setminus B_i^t(F))$.

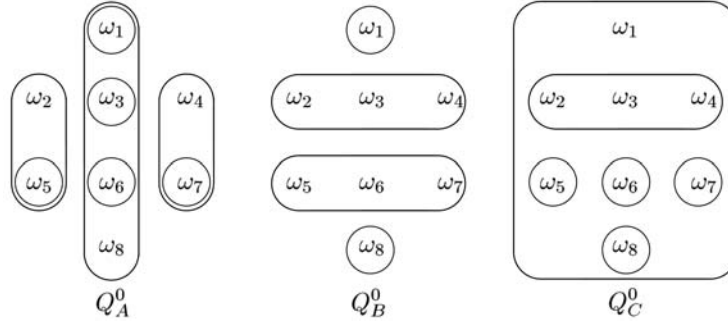


Рис. 1. Начальные информационные множества игроков

Отображение $Q_i^0 : \Omega \rightarrow 2^\Omega$ найдем согласно рис. 1:

$Q_A^0(\omega_1) = \{\omega_1\}$, $Q_A^0(\omega_2) = \{\omega_2, \omega_5\}$, $Q_A^0(\omega_3) = \{\omega_3\}$, $Q_A^0(\omega_4) = \{\omega_4, \omega_7\}$, $Q_A^0(\omega_5) = \{\omega_5\}$, $Q_A^0(\omega_6) = \{\omega_6\}$, $Q_A^0(\omega_7) = \{\omega_7\}$, $Q_A^0(\omega_8) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_6, \omega_8\}$;

$Q_B^0(\omega_1) = \{\omega_1\}$, $Q_B^0(\omega_2) = Q_B^0(\omega_3) = Q_B^0(\omega_4) = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $Q_B^0(\omega_5) = Q_B^0(\omega_6) = Q_B^0(\omega_7) = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7\}$, $Q_B^0(\omega_8) = \{\omega_8\}$;

$Q_C^0(\omega_1) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$, $Q_C^0(\omega_2) = Q_C^0(\omega_3) = Q_C^0(\omega_4) = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $Q_C^0(\omega_5) = \{\omega_5\}$, $Q_C^0(\omega_6) = \{\omega_6\}$, $Q_C^0(\omega_7) = \{\omega_7\}$, $Q_C^0(\omega_8) = \{\omega_8\}$.

Игроки имеют одинаковые начальные распределения: $\mu(\omega_1) = \mu(\omega_2) = \mu(\omega_6) = 1/16$, $\mu(\omega_3) = \mu(\omega_4) = 1/8$, $\mu(\omega_5) = \mu(\omega_7) = \mu(\omega_8) = 3/16$ и функцию принятия решения $f(E) = \mu(X|E)$.

Предположим, что произошло событие $X = \{\omega_2, \omega_5, \omega_6, \omega_8\}$. Игроки начинают обмениваться сообщениями согласно протоколу, изображенному на рис. 2.

Построим сообщение игрока A , которое он пошлет игроку B в момент времени $t = 1$ (для простоты будем обозначать ω_1 через 1):

$t = 1$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
d_A^0	0	1	0	0	1	1	0	1/7
W_A^0	1347	256	1347	1347	256	256	1347	8
$B_A^0(W_A^0)$	1347	256	1347	1347	256	256	1347	x

В данном случае $d_A^0(\omega) = \mu(X \cap A_A(X) | Q_A^0(\omega))$, где $A_A^0(X) = B_A^0(X) \cup B_A^0(\Omega \setminus B_A^0(X))$, $B_A^0(X) = \{\omega_2, \omega_5, \omega_6\}$, $B_A^0(\Omega \setminus B_A^0(X)) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_7\}$.

Таким образом, $A_A^0(X) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ и $d_A^0(\omega) = \mu(X \cap \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\} | Q_A^0(\omega))$.

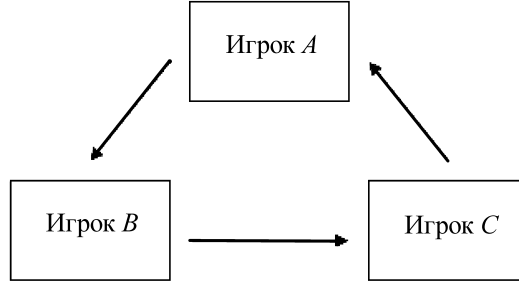


Рис. 2. Протокол

После получения сообщения игрок B перестраивает свое информационное множество согласно полученной информации (рис. 3):

$Q_B^1(\omega_1) = \{\omega_1\}$, $Q_B^1(\omega_2) = \{\omega_2\}$, $Q_B^1(\omega_3) = \{\omega_3, \omega_4\}$, $Q_B^1(\omega_4) = \{\omega_3, \omega_4\}$, $Q_B^1(\omega_5) = \{\omega_5, \omega_6\}$, $Q_B^1(\omega_6) = \{\omega_5, \omega_6\}$, $Q_B^1(\omega_7) = \{\omega_7\}$.

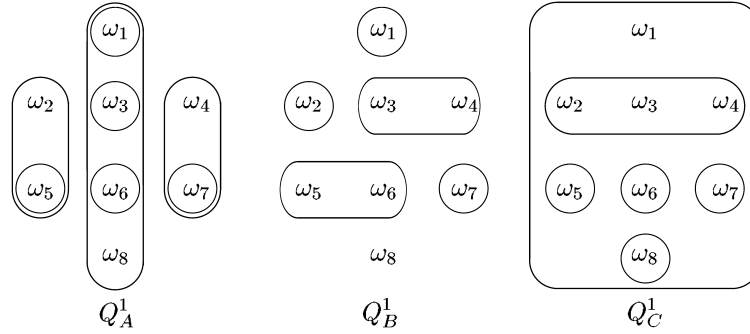


Рис. 3. Информационные множества игроков $t = 1$

Аналогичным образом рассчитываются остальные шаги. Игрок B посылает сообщение игроку C в момент времени $t = 2$:

$t = 2$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
d_B^1	0	1	0	0	1	1	0	x
W_B^1	1347	256	1347	1347	256	256	1347	x
$B_B^1(W_B^1)$	1347	256	1347	1347	256	256	1347	x

После получения сообщения игрок C перестраивает свое информационное множество согласно полученной информации (рис. 4):

$Q_C^2(\omega_1) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_7\}$, $Q_C^2(\omega_2) = \{\omega_2\}$, $Q_C^2(\omega_3) = \{\omega_3, \omega_4\}$, $Q_C^2(\omega_4) = \{\omega_3, \omega_4\}$, $Q_C^2(\omega_5) = \{\omega_5\}$, $Q_C^2(\omega_6) = \{\omega_6\}$, $Q_C^2(\omega_7) = \{\omega_7\}$.

Игрок C посылает сообщение игроку A в момент времени $t = 3$:

$t = 3$	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
d_B^1	0	1	0	0	1	1	0	x
W_B^1	1347	256	1347	1347	256	256	1347	x
$B_B^1(W_B^1)$	1347	256	1347	1347	256	256	1347	x

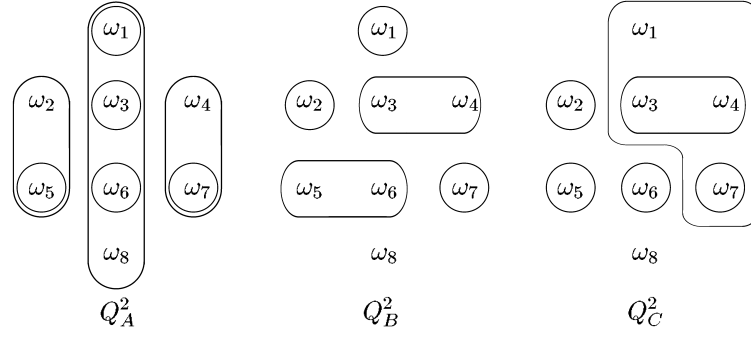


Рис. 4. Информационные множества игроков $t = 2$

После получения сообщения игрок C перестраивает свое информационное множество согласно полученной информации (рис. 5):

$Q_A^3(\omega_1) = \{\omega_1\}$, $Q_A^3(\omega_2) = \{\omega_2, \omega_5\}$, $Q_A^3(\omega_3) = \{\omega_3\}$, $Q_A^3(\omega_4) = \{\omega_4, \omega_7\}$, $Q_A^3(\omega_5) = \{\omega_5\}$, $Q_A^3(\omega_6) = \{\omega_6\}$, $Q_A^3(\omega_7) = \{\omega_7\}$.

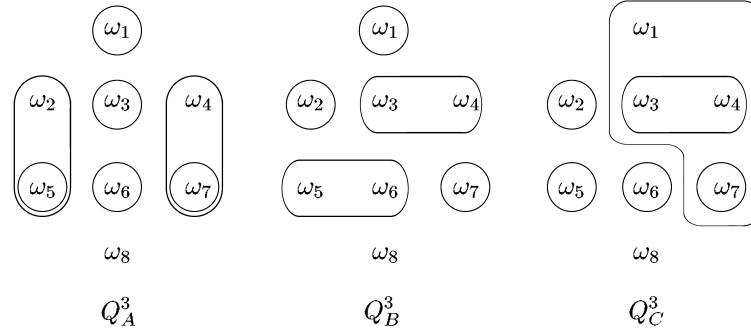


Рис. 5. Информационные множества игроков $t = 3$

Обратим внимание, что для любого из игроков множества $\{Q_i^t(\omega) \mid t = 3, 4, \dots\}$ стали неизменными, т. е. при дальнейшей коммуникации информационные множества игроков не изменяются, значения всех функции принятия решения одинаковы, поэтому равновесие достигнуто.

4. Заключение. Для приведенной модели коммуникационного процесса было разработано ПО, которое позволяет производить расчеты на компьютере. Результаты приведенного в статье контрольного примера, рассчитанного с использованием ПО, подтверждаются расчетами, сделанными вручную.

ПО было построено с помощью языка программирования Java 1.5 для реализации алгоритмической части и графической библиотеки Swing для интерфейса пользователя. Эти технологии дали возможность использовать приложение на практически любой платформе ЭВМ. Алгоритмическая часть базируется на механизме инверсии зависимостей, что позволяет сравнительно легкую адаптацию под другие схожие математические модели. Фактически авторами реализована библиотека, с помощью которой можно рассчитывать собственные модели. Разработанное ПО приводит к дальнейшему исследованию и адаптации модели для ее практического применения.

Литература

1. *Aumann R. J.* Agreeing to disagree // Annals of Statistics. 1976. Vol. 4. P. 1236–1239.
2. *Bacharach M.* Some extensions of a claim of Aumann in an axiomatic model of knowledge // J. of Economic Theory. 1985. Vol. 37. P. 167–190.
3. *Samet D.* Ignoring ignorance and agreeing to disagree // J. of Economic Theory. 1990. Vol. 52. P. 190–207.
4. *Geanakoplos J. D., Polemarchakis H. M.* We can't disagree forever // J. of Economic Theory. 1982. Vol. 28. P. 192–200.
5. *Krasucki P.* Protocol forcing consensus // J. of Economic Theory. 1996. Vol. 70. P. 266–272.
6. *Matsuhisa T., Kamiyama K.* Lattice structure of knowledge and agreeing to disagree // J. of Mathematical Economics. 1997. Vol. 27. P. 389–410.
7. *Matsuhisa T., Usami S.-S.* Awareness, belief and agreeing to disagree // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2000. Vol. 2, N 6. P. 833–844.
8. *Horie K., Matsuhisa T.* Communication in Awareness Reaching Consensus Without Acyclic Condition II // Lecture Notes in Computer Science. 2004. N 3314. P. 745–751.

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья принята к печати 25 декабря 2008 г.