

Е.С. РОЕНКО, асс., ДГТУ, Каменское,
А.В. САДОВОЙ, д-р техн. наук., проф., ДГТУ, Каменское

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАЯТНИКА ФУРУТЫ

Управление структурно неустойчивыми объектами с помощью классических методов не позволяет достичь необходимой стабилизации в большом. Использование модели маятника Фуруты, описанного с помощью уравнения Эйлера – Лагранжа второго порядка, позволяет определить нелинейные законы управления, которые обеспечат необходимое качество стабилизации. Полученная модель линеаризованной системы записана в форме, удобной для аналитического конструирования регуляторов. Ил.: 2. Библиогр.: 10 назв.

Ключевые слова: структурно неустойчивые объекты; маятник Фуруты; линеаризация; нелинейные законы управления.

Постановка проблемы и анализ литературы. Современный уровень развития вычислительной техники позволяет синтезировать системы управления высокоточными сложными системами в реальном времени, учитывая множество параметров. Пренебрегая некоторыми из них, невозможно в полной мере оценить адекватность объекта, что может служить источником ошибок при моделировании и создании системы управления. Поэтому работа, устраняющая указанные недостатки, является актуальной.

Синтез систем управления классическими методами не гарантирует устойчивости в большом и может привести к негативным последствиям, в то время как нелинейные законы управления позволяют с достаточной степенью точности управлять маятниковоподобными системами [1 – 9].

Реальные маятниковоподобные системы удобно исследовать на прототипах, к которым относятся обратный маятник [1 – 3] и маятник Фуруты [4 – 9]. Эти маятники характеризуются наличием точек неустойчивого и устойчивого равновесия. Причем любое сколь угодно малое внешнее воздействие выводит маятник из положения неустойчивого равновесия и переводит его в положение устойчивого равновесия, в окрестностях которого возникают слабодемпфированные колебания.

Математическое описание известных моделей маятника Фуруты [4, 6 – 9] не содержит информации о силах трения в суставах маятника, что не позволяет в полной мере оценить характер движения и может вносить погрешности при моделировании и синтезе системы

управления. Кроме того, в указанных моделях не учитывается динамика электропривода управляющего маятником.

Цель статьи. Приведение математической модели маятника Фуруты к виду, удобному для синтеза оптимальных управлений путем решения задачи аналитического конструирования регуляторов (АКР).

Математическая модель маятника Фуруты. Маятник Фуруты состоит из руки, которая приводится во вращение в горизонтальной плоскости электродвигателем, и рычага, который вращается в вертикальной плоскости.

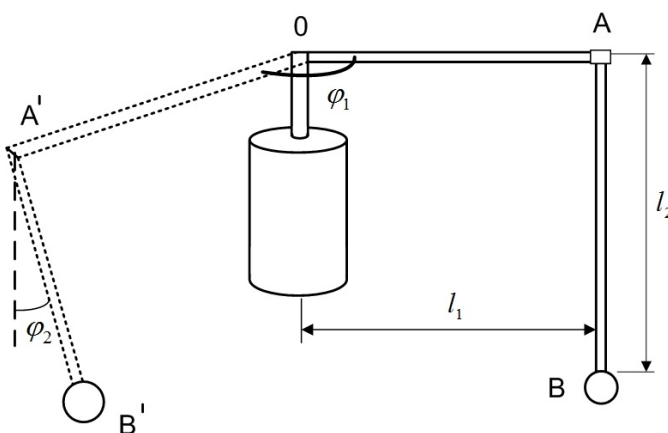


Рис. 1. Маятник Фуруты

Как видно из рис. 1, маятник Фуруты обладает двумя степенями свободы и для описания его динамики удобно использовать уравнение Эйлера-Лагранжа, которое имеет следующий вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \omega_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = W, \quad (1)$$

где L – функция Лагранжа; ω_i ($i = 1, 2$) – скорость движения плеча и рычага; $W = M - M_{mp}$ – вектор обобщенных внешних воздействий; φ_i ($i = 1, 2$) – соответствующие углы поворота плеча и рычага.

Для объекта с двумя степенями свободы уравнение (1) принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \omega_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= M_{\text{ДВ}} - M_{\text{Т}}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \omega_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= -M_{\text{Т}},\end{aligned}\quad (2)$$

где ω_1 – скорость движения плеча; φ_1 – угол поворота плеча; $M_{\text{ДВ}}$ – момент развиваемый двигателем; $M_{\text{Т}}$ – момент трения в суставах; ω_2 – скорость движения рычага; φ_2 – угол поворота рычага.

При составлении функции Лагранжа будем считать что плечо, не обладающее потенциальной энергией, и двигатель связаны между собой абсолютно жестко. Тогда математическое описание маятника Фуруты на основе уравнений (2) может быть найдено в виде [10]:

$$\begin{aligned}& (J_{\text{ДВ}} + \frac{1}{3}m_1l_1^2 + m_2l_1^2 + m_3l_1^2 + m_3l_2^2 - m_3l_2^2 \sin^2 \varphi_2) p\omega_1 + \\& + m_3l_1l_2(\omega_2^2 \sin \varphi_2 - p\omega_2 \cos \varphi_2 + 2m_3l_2^2\omega_1\omega_2 \sin 2\varphi_2 + M_{\text{Т}} = M_{\text{ДВ}}; \\& p\omega_2(\frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_3l_2^2) + p\omega_1m_3l_1l_2 \cos \varphi_2 - \\& - \frac{1}{2}(m_2 + 2m_3)l_2g \sin \varphi_2 - \frac{1}{2}m_3l_2^2\omega_1^2 \sin 2\varphi_2 + M_{\text{Т}} = 0,\end{aligned}\quad (3)$$

где $J_{\text{ДВ}}$ – момент инерции двигателя; m_1 – масса плеча; m_2 – масса рычага; m_3 – масса груза, подвешенного на вершине рычага; l_1 и l_2 – длина плеча и рычага соответственно; $M_{\text{Т}} = \frac{R\omega_i}{((R\omega_i/a)^2 + 1)^{0.5}} + C_0\omega_i$; R – тангенс угла наклона аппроксимированной прямой; C_0 и a – весовые коэффициенты.

Приводной двигатель воздействует на маятник посредством изменения момента на валу, который определяется параметрами двигателя, его скоростью и приложенным напряжением

$$\frac{d}{dt} M_{\text{ДВ}} = -\frac{1}{T_{\text{Я}}} M_{\text{ДВ}} - \frac{(k\Phi)^2}{R_{\text{Я}}T_{\text{Я}}} \omega_1 + \frac{k\Phi}{R_{\text{Я}}T_{\text{Я}}} U_y, \quad (4)$$

где $T_{\text{Я}}$ – постоянная времени якоря; $R_{\text{Я}}$ – сопротивление якоря; $k\Phi$ – конструктивная постоянная двигателя; U_y – управляющее воздействие, подаваемое на двигатель.

В операторном виде система уравнений маятнικοподобного электромеханического объекта будет следующей:

$$\begin{aligned}
 p\varphi_2 &= \omega_2; \\
 p\omega_2 &= \frac{3}{2} \left(-2m_3 l_1 l_2 \cos \varphi_2 p\omega_1 - \frac{1}{2} l_2 g \sin \varphi_2 \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot (m_2 + 2m_3) + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 \sin 2\varphi_2 \omega_1^2 - 2M_T \right) / (l_2^2 (m_2 + 3m_3)); \\
 p\varphi_1 &= \omega_1;
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 p\omega_1 &= 3(m_3 l_1 l_2 (\sin \varphi_2 \omega_2^2 - \cos \varphi_2 p\omega_2) - m_3 l_2^2 \sin 2\varphi_2 \omega_1^2 - \\
 &\quad - M_T + M_{ДВ}) / (3J_{ДВ} + m_1 l_1^2 + 3m_2 l_1^2 + 3m_3 l_1^2 + 3m_3 l_2^2 - m_3 l_2^2 \cos^2 \varphi_2); \\
 pM_{ДВ} &= -\frac{1}{T_{Я}} M_{ДВ} - \frac{(k\Phi)^2}{R_{Я} T_{Я}} \omega_1 + \frac{k\Phi}{R_{Я} T_{Я}} U_{ДВ}.
 \end{aligned}$$

Для упрощения записи уравнений (5) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 3J_{ДВ} + m_1 l_1^2 + 3m_2 l_1^2 + 3m_3 l_1^2 + 3m_3 l_2^2; \\
 A_2 &= m_3 l_2^2; \quad A_3 = m_3 l_1 l_2; \quad A_4 = \frac{R^2}{a^2}; \quad A_5 = m_2 + 3m_3; \\
 A_6 &= gm_2; \quad A_7 = gm_3; \quad A_8 = l_2^2 A_5; \quad A_9 = \frac{C_0}{A_8},
 \end{aligned} \tag{6}$$

с учетом, которых уравнения динамики (5) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 p\varphi_2 &= \omega_2; \\
 p\omega_2 &= \frac{-3A_3 \cos \varphi_2 p\omega_1}{A_8} - \frac{3l_2 \sin \varphi_2 (A_6 + 2A_7)}{4A_8} + \\
 &\quad + \frac{A_2 \frac{\sin 2\varphi_2}{2} \omega_1^2}{2A_8} - \frac{R\omega_1}{2A_8 (A_4 \omega_1^2 + 1)^{0.5}} - \frac{1}{2} A_9 \omega_1; \\
 p\varphi_1 &= \omega_1; \\
 p\omega_1 &= \frac{3A_3 (\sin \varphi_2 \omega_2^2 - \cos \varphi_2 p\omega_2)}{A_1 + A_2 \cos^2 \varphi_2} - \frac{A_2 \sin 2\varphi_2 \omega_1 \omega_2}{A_1 + A_2 \cos^2 \varphi_2} + \\
 &\quad + \frac{M_{ДВ}}{A_1 + A_2 \cos^2 \varphi_2} - \frac{R\omega_1}{(A_1 + A_2 \cos^2 \varphi_2) (A_4 \omega_1^2 + 1)^{0.5}} - \frac{C_0 \omega_1}{A_1 + A_2 \cos^2 \varphi_2}; \\
 pM_{ДВ} &= -\frac{1}{T_{Я}} M_{ДВ} - \frac{k\Phi^2}{R_{Я} T_{Я}} \omega_1 + \frac{k\Phi}{R_{Я} T_{Я}} U_{ДВ}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом разработанная математическая модель учитывает динамику электромеханической системы, состоящей из маятника и приводного двигателя. Эта модель является существенно нелинейной в то время как известные методы решения задачи АКР разработаны для линейных динамических объектов. Поэтому разработанная модель подлежит линеаризации. В настоящей статье рассмотрим простейший случай линеаризации путем разложения правых частей уравнений (7) в ряд Тейлора.

Линеаризация маятника Фуруты. При линеаризации считается, что рычаг находится в вертикальном положении, т.е. ряд Тейлора строится в окрестностях рабочей точки π рад.

Авторами работы [10] доказано, что характер движения маятника Фуруты зависит от угла поворота плеча φ_1 . Поэтому линеаризацию будем выполнять по трем координатам: скорость движения плеча, угол и скорость движения рычага.

Математическая модель (7) в рабочей точке с учетом разложения в ряд Тейлора принимает вид:

$$\begin{aligned} p\varphi_2 &= \omega_2; \\ p\omega_2 &= \frac{-A_3 p\omega_1 + \frac{1}{2} l_2 g (m_2 + 2m_3) \varphi_2 + (R + C_0) \omega_2}{A_8}; \\ p\varphi_1 &= \omega_1; \\ p\omega_1 &= \frac{-A_3 p\omega_2 - M_{\text{ДВ}} + (R + C_0) \omega_1}{A_1}; \\ pM_{\text{ДВ}} &= -\frac{1}{T_{\text{Я}}} M_{\text{ДВ}} - \frac{k\Phi^2}{R_{\text{Я}} T_{\text{Я}}} \omega_1 + \frac{k\Phi}{R_{\text{Я}} T_{\text{Я}}} U_{\text{ДВ}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Линеаризованная модель не имеет нелинейностей типа $\sin$, $\cos$ и ее переходные процессы показаны на рис. 2. На первых трех графиках показаны изменения ускорения, скорости и угла поворота плеча. Другие три графика демонстрируют колебательное движение рычага.

Для приведения линеаризованной модели (8) к виду удобному для синтеза регулятора необходимо записать уравнения с явно выраженными коэффициентами при переменных:

$$\begin{aligned}
 p\varphi_2 &= b_{12}\omega_2; \\
 p\omega_2 &= b_{21}\varphi_2 + b_{22}\omega_1 + b_{24}\omega_2 - b_{2M}M_{ДВ}; \\
 p\varphi_1 &= b_{32}\omega_1; \\
 p\omega_1 &= b_{41}\varphi_2 + b_{42}\omega_1 + b_{44}\omega_2 - b_{4M}M_{ДВ}; \\
 pM_{Д} &= -\frac{1}{T_{я}}M_{Д} - \frac{k\Phi^2}{R_{я}T_{я}}\omega_1 + \frac{k\Phi}{R_{я}T_{я}}U_{ДВ},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где $b_{12}, b_{21}, \dots, b_{44}, b_{4M}$ – постоянные коэффициенты.

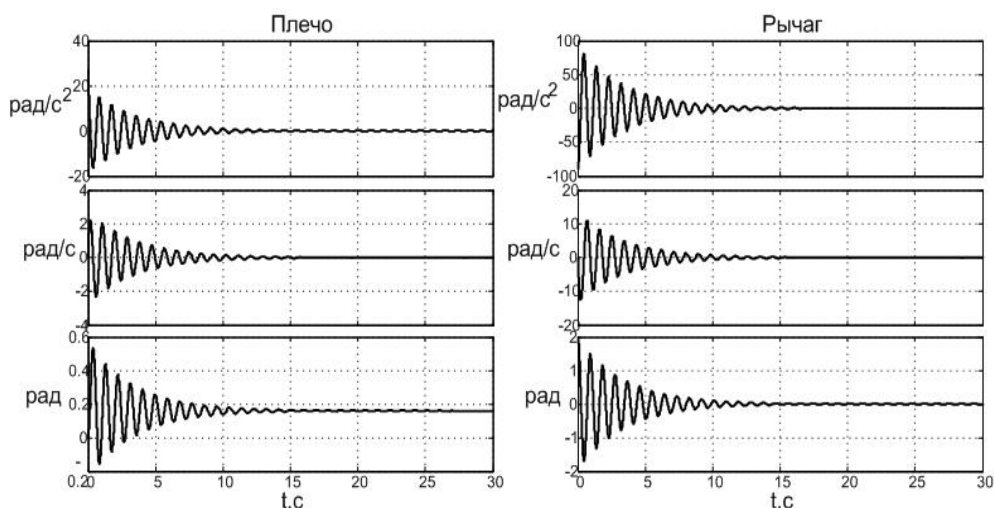


Рис. 2. Переходные процессы линеаризованной системы

Решение задачи АКР осуществляется с помощью уравнений вида

$$pY = BY + MU, \tag{10}$$

где Y – вектор фазовых координат маятника Фуруты; B – матрица коэффициентов; M – вектор коэффициентов при управляющих воздействиях; U – вектор управлений.

Для маятника Фуруты имеем:

$$Y = \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \omega_2 \\ \varphi_1 \\ \omega_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} \\ 0 & b_{32} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & b_{44} \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_{ДВ} \\ 0 \\ -M_{ДВ} \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{2M} \\ 0 \\ b_{4M} \end{bmatrix}.$$

Выводы. В работе получена математическая модель маятника Фуруты, которая учитывает характер движения его трех элементов: плеча, рычага и приводного двигателя. Полученные уравнения линеаризованной системы (8) представлены в нормальной форме и могут быть использованы для синтеза оптимального регулятора путем решения задачи АКР. В отличие от исходной нелинейной системы линеаризованная система является двухканальной и управление можно осуществлять одновременно углом поворота плеча и рычага.

Список литературы: 1. *Aracil J.* Kinetic energy shaping in the inverted pendulum / *J. Aracil, J.A. Acosta, F. Gordillo* // *IFAC Nonlinear Control Systems*, Stuttgart. – Germany. – 2004. – P. 1063-1067. 2. *Wachinger C.* Simulation of the inverted pendulum / *C. Wachinger, M. Pock*. – Munchen, 2004. – 33 p. 3. *Aracil J.* A controller for swinging-up and stabilizing the inverted pendulum / *J. Aracil, J.A. Acosta, F. Gordillo* // *Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control* Seoul, Korea, July 6-11, 2008. – P. 7695-7699. 4. *Arnolds M.B.* Identification and control of the Rotary Inverted Pendulum / *M.B. Arnolds* // *TU e Traineeship Report*. – 2003. – 55 p. 5. *Cazzolato B.S.* On the dynamics of the Furuta pendulum / *B.S. Cazzolato; Z. Prime* // *Journal of Control Science and Engineering*, 2011. – Article ID 528341. – 8 p. 6. *Kats C.J.A.* Nonlinear control of a Furuta rotary inverted pendulum / *C.J.A. van Kats* // *TU/e Bachelor Final Project Report*. – 2004. – Vol. 2004.069. – Technische Universiteit Eindhoven. – 23 p. 7. *Akesson J.* Safe manual control of the Furuta pendulum / *J. Akesson, K.J. Astrom* // *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications*. – 2001. – (CCA '01). – IEEE–Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2001. – P. 890-895. 8. *Acosta J.A.* Swing up the Furuta pendulum by the speed gradient method / *J.A. Acosta, F. Cordillo, J. Aracil* // *European Control Conference (ECC)*. – 2001 – 7 p. 9. *Ling K.V.* Robust predictive control of the Furuta Pendulum / *K.V. Ling, P. Falugi, J.M. Maciejowski, L. Chisci* // *15th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control*. – Barcelona, 2002. – 13 p. 10. *Росенко Ю.* Уточнення рівнянь динаміки маятника Фурути / *Ю. Росенко, Р. Волянський, О. Садовой* // *Engineering mechanics & transport*, Lviv Polytechnic National University Institutional Repository <http://ena.lp.edu.ua>, 2013. – P. 98-101,

References:

1. Aracil, J., Acosta, J.A., and Gordillo, F. (2004), "Kinetic energy shaping in the inverted pendulum", *IFAC Nonlinear Control Systems*, Stuttgart. Germany, 2004, pp. 1063-1067.
2. Wachinger, C., and Pock, M. (2004), *Simulation of the inverted pendulum*, Munchen, 33 p.
3. Aracil, J., Acosta, J.A., and Gordillo, F. (2008), "A controller for swinging-up and stabilizing the inverted pendulum", *Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control*. Seoul, Korea, July 6-11, 2008, pp. 7695-7699.
4. Arnolds, M.B. (2003), "Identification and control of the Rotary Inverted Pendulum". *TU/ e Traineeship Report*, 2003, 55 p.
5. Cazzolato, B.S., and Prime, Z. (2011), "On the dynamics of the Furuta pendulum". *Journal of Control Science and Engineering*, Article ID 528341, 8 p.
6. Kats, C.J.A. (2004), "Nonlinear control of a Furuta rotary inverted pendulum". *TU/e Bachelor Final Project Report*, Vol, 2004.069, Technische Universiteit Eindhoven, 23 p.

7. Akesson, J., and Astrom, K.J., (2001), "Safe manual control of the Furuta pendulum", *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications*. (CCA '01). IEEE--Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2001, pp. 890-895.
8. Acosta, J.A., Acosta, J.A., and Gordillo, F. (2001), "Swing up the Furuta pendulum by the speed gradient method", *European Control Conference (ECC)*, 7 p.
9. Ling, K.V., Falugi, P., Maciejowski, J.M., and Chisci, L. (2002), "Robust predictive control of the Furuta Pendulum", *15th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control*, Barcelona, 13 p.
10. Roenko, E. Volianskij, R., and Sadovoy, O. (2013), "Clarifying the dynamics equations of the Furuta pendulum", *Engineering mechanics & transport*, Lviv Polytechnic National University Institutional Repository <http://ena.lp.edu.ua>, pp. 98-101.

Статью представил д-р техн. наук. заведуючий кафедри електротехники и электромеханики Днепровского государственного технического университета Низимов В.Б.

Поступила (received) 11.08.2017

Roenko Efim, Assistant
Dneprovskiy state technical university
Dneprostroevska street, 2, city Kamenskoe, Ukraine, 51918
Tel.: +38 098 2223015 E-mail: efim.mail@gmail.com

Sadovoy Oleksandr, Dr. Sci. Tech., Professor
Dneprovskiy state technical university
Dneprostroevska street, 2, city Kamenskoe, Ukraine, 51918
Tel.: +38 067 7791248 E-mail: sadovoyav@ukr.net

УДК 519.7+681.5

Лінеаризація математичної моделі маятника Фурути / Рощенко Ю.С., Садовой О.В. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2017. – № 50 (1271). – С. 46 – 54.

Керування структурно нестійкими об'єктами за допомогою класичних методів не дозволяє досягти необхідної стійкості у великому. Використання моделі маятника Фурути, описаного за допомогою рівняння Ейлера – Лагранжа другого порядку, дозволяє вивести нелінійні закони керування, які забезпечать необхідну якість стабілізації. Отримана модель лінеаризованої системи записана у зручній формі для аналітичного конструювання регуляторів. Іл.: 2. Бібліогр.: 10 назв.

Ключові слова: структурно нестійкі об'єкти, маятник Фурути, лінеаризація, нелінійні закони керування.

УДК 519.7+681.5

Линеаризация математической модели маятника Фуруты / Рощенко Ю.С., Садовой А.В. // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2017. – № 50 (1271). – С. 46 – 54.

Управление структурно неустойчивыми объектами с помощью классических методов не позволяет достичь необходимой стабилизации в большом. Использование модели маятника Фуруты, описанного с помощью уравнения Эйлера – Лагранжа второго порядка, позволяет определить нелинейные законы управления, которые обеспечат необходимое качество стабилизации. Полученная модель линеаризованной системы записана в форме, удобной для аналитического конструирования регуляторов. Ил.: 2. Библиогр.: 10 назв.

Ключевые слова: структурно неустойчивые объекты, маятник Фуруты, линеаризация, нелинейные законы управления.

UDC 519.7+681.5

Linearization of the mathematical model of the Furuta pendulum / Roenko E.S., Sadovoy O.V. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2017. – №. 50 (1271). – P. 46 – 54.

Managing structurally unstable objects using classical methods does not achieve the required stability. Using the Furuta pendulum model described by the second-order Euler-Lagrange equation allows us to derive non-linear control laws that will provide the required stabilization quality. The obtained model of the linearized system is written down in a convenient form for the analytical design of the controllers. Figs.: 2. Refs.: 10 titles.

Keywords: structurally unstable objects, Furuta pendulum, linearization, nonlinear control laws.