

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 4 (2013)

УДК501.548

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ
ПОЛУЦИКЛИЧЕСКИХ n -АРНЫХ ГРУПП

В. М. Кусов (г. Волгоград)

Аннотация

В статье изучается взаимосвязь между представлениями абелевых групп и представлениями абелевых n -арных групп. Опираясь на эту взаимосвязь, описаны все представления абелевых полуциклических n -арных групп.

Ключевые слова: n -арная группа, гомоморфизм, представление

REPRESENTATIONS OF ABELIAN
SEMICYCLIC N -ARY GROUPS

V. M. Kusov (с. Volgograd)

Abstract

In this paper we study the relationship between representations of abelian groups and representations of abelian n -ary groups. Based on this relationship, described all the representations of abelian semicyclic n -ary groups.

Keywords: n -ary group, homomorphism, representation.

Алгебра $\langle G, [] \rangle$ с n -арной операцией $[] : G^n \rightarrow G$, $n \geq 2$, называется n -арной группой, если

1) операция $[]$ ассоциативна, т. е. верны тождества

$$[[a_1, \dots, a_n], a_{n+1}, \dots, a_{2n-1}] = [a_1, \dots, a_i, [a_{i+1}, \dots, a_{i+n}], a_{i+n+1}, \dots, a_{2n-1}]$$

для всех $i = 1, \dots, n - 1$, и

2) каждое из уравнений

$$[a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n] = b, \quad i = 1, \dots, n,$$

разрешимо для любых $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ и b из G .

Очевидно, при $n = 2$ алгебра $\langle G, [] \rangle$ является обычной (бинарной) группой.

Если, кроме того, в $\langle G, [] \rangle$ верны тождества

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$$

для любой подстановки $\sigma \in S_n$, то n -арная группа $\langle G, [] \rangle$ называется абелевой.

Для фиксированного элемента a n -арной группы $\langle G, [] \rangle$ решение уравнения $\underbrace{[a, \dots, a, x]}_{n-1} = a$ обозначают через \bar{a} и называют косым элементом для a .

В [1] показано, что на любой абелевой n -арной группе $\langle G, [] \rangle$ можно определить абелеву группу $\langle G, + \rangle = \text{red}_c G$ (называемую редуктом), в которой бинарная операция $+$ действует по правилу

$$a + b = [a, \underbrace{c, \dots, c}_{n-3}, \bar{c}, b], \quad (1)$$

где c – фиксированный элемент из G . Тогда

$$[a_1, \dots, a_n] = a_1 + \dots + a_n + d, \quad (2)$$

где $d = \underbrace{[c, \dots, c]}_n$, а элемент c является нулем в группе $\text{red}_c G$.

Верно и обратное: в любой абелевой группе $\langle G, + \rangle$ для произвольного фиксированного элемента d задается абелева n -арная группа $\langle G, [] \rangle = \text{abl}_d G$, где n -арная операция $[]$ действует по правилу (2). Если $\langle G, + \rangle = (a)$ – циклическая группа, то $\text{abl}_d G$ называется абелевой полуциклической n -арной группой [2].

В любой группе $\langle G, \circ \rangle$ (не обязательно абелевой) задается n -арная группа $\langle G, [] \rangle = \text{red}^n G$, где n -арная операция $[]$ действует по правилу

$$[a_1, \dots, a_n] = a_1 \circ \dots \circ a_n. \quad (3)$$

Эта n -арная группа $\langle G, [] \rangle = \text{red}^n G$ называется производной от группы $\langle G, \circ \rangle$. В частности, используемая далее n -арная группа $\text{red}^n GL_m(\mathbb{C})$ является производной от полной линейной группы $GL_m(\mathbb{C})$.

Имеется тесная связь между n -арными группами и обычными группами, и, в частности, между гомоморфизмами этих алгебр.

ТЕОРЕМА 1. Пусть φ – гомоморфизм абелевой n -арной группы $\langle G, [] \rangle$ в производную n -арную группу $\langle G', [] \rangle = \text{red}^n G'$. Тогда для любого фиксированного $c \in G$ существует гомоморфизм ψ абелевой группы $\text{red}_c G$ в группу G' , действующий по правилу $\psi(x) = \varphi(x) \circ \varphi^{-1}(c)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения косого элемента следует, что для $\varphi(c)$, $\bar{\varphi}(c) \in G'$ справедливо равенство $\varphi(c) = \underbrace{[\varphi(c), \dots, \varphi(c)]}_{n-1}, \bar{\varphi}(c)$. В производной

n -арной группе $\text{red}^n G'$ n -арная операция $[]$ связана с групповой операцией \circ правилом (3), поэтому

$$\varphi(c) = [\underbrace{\varphi(c), \dots, \varphi(c)}_{n-1}, \bar{\varphi}(c)] = \underbrace{\varphi(c) \circ \dots \circ \varphi(c)}_{n-1} \circ \bar{\varphi}(c) = \varphi^{n-1}(c) \circ \bar{\varphi}(c),$$

откуда $\bar{\varphi}(c) = \varphi(c)^{-(n-2)}$.

В редукте $red_c G$ групповая операция $+$ связана с n -арной операцией $[]$ правилом (1), поэтому для произвольно выбранных элементов $a, b \in G$ имеем

$$\begin{aligned} \psi(a + b) &= \varphi(a + b) \circ \varphi^{-1}(c) = \varphi([a, \underbrace{c, \dots, c}_{n-3}, \bar{c}, b]) \circ \varphi^{-1}(c) = \\ &= [\varphi(a), \underbrace{\varphi(c), \dots, \varphi(c)}_{n-3}, \bar{\varphi}(c), \varphi(b)] \circ \varphi^{-1}(c) = \varphi(a) \circ \varphi(c)^{n-3} \circ \bar{\varphi}(c) \circ \varphi(b) \circ \varphi^{-1}(c) = \\ &= \varphi(a) \circ \varphi(c)^{n-3} \circ \varphi(c)^{-(n-2)} \circ \varphi(b) \circ \varphi^{-1}(c) = \varphi(a) \circ \varphi(c)^{-1} \circ \varphi(b) \circ \varphi(c)^{-1} = \\ &= \psi(a) \circ \psi(b). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ψ — гомоморфизм абелевой группы $\langle G, + \rangle$ в группу $\langle G', \circ \rangle$ и для некоторых элементов d из G и b из G' выполнено условие

$$\psi(d) = \underbrace{b \circ \dots \circ b}_{n-1} = b^{n-1}. \quad (4)$$

Тогда отображение $\varphi : G \rightarrow G'$, действующее по правилу $\varphi(x) = \psi(x) \circ b$, является гомоморфизмом абелевой n -арной группы $\langle G, [] \rangle = abl_d$ в n -арную группу $\langle G', [] \rangle = red^n G'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть посылка теоремы выполнена. Тогда для произвольно выбранных элементов $a_1, \dots, a_n \in G$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi([a_1, \dots, a_n]) &= \psi([a_1, \dots, a_n]) \circ b = \psi(a_1 + \dots + a_n + d) \circ b = \\ &= \psi(a_1) \circ \dots \circ \psi(a_n) \circ \psi(d) \circ b = \psi(a_1) \circ \dots \circ \psi(a_n) \circ b^{n-1} \circ b = \psi(a_1) \circ \dots \circ \psi(a_n) \circ b^n = \\ &= (\psi(a_1) \circ b) \circ \dots \circ (\psi(a_n) \circ b) = \varphi(a_1) \circ \dots \circ \varphi(a_n) = [\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)]. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Гомоморфизм $\varphi : \langle G, [] \rangle \rightarrow red^n GL_m(\mathbb{C})$ называется (линейным) представлением n -арной группы $\langle G, [] \rangle$

(см. например [3],[4]).

Доказанные выше теоремы 1 и 2 позволяют установить связь между представлениями абелевых групп и представлениями абелевых n -арных групп. Так, из теоремы 1 имеем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть φ – представление абелевой n -арной группы $\langle G, [] \rangle$. Тогда найдется представление ψ группы $\text{red}_c \langle G, [] \rangle$, действующее по правилу $\psi(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(c)^{-1}$.

Из теоремы 2 имеем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть ψ – представление абелевой группы $\langle G, + \rangle$ и для некоторого элемента d из $\langle G, + \rangle$ и матрицы U из $GL_m(\mathbb{C})$ выполнено условие

$$\psi(d) = U^{n-1}. \quad (5)$$

Тогда отображение $\varphi : G \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$, действующее по правилу $\varphi(x) = \psi(x) \cdot U$, является представлением абелевой n -арной группы $\langle G, [] \rangle = \text{abl}_d G$.

С помощью следствий 1 и 2 изучим представления абелевых полумультипликативных n -арных групп.

Для конечных абелевых полумультипликативных n -арных групп верна

ТЕОРЕМА 3. Пусть конечная циклическая группа (a) порядка k имеет представление $\psi_r(sa) = \varepsilon^{rs}$, где ε – корень k -й степени из 1, $r = 0, 1, \dots, k-1$ [5, стр. 94]. Тогда абелева полумультипликативная n -арная группа $\text{abl}_{la}(a)$ имеет представление

$$\varphi_{r,t}(sa) = \varepsilon^{rs+t}, \quad (6)$$

где t – решение сравнения

$$x(n-1) \equiv lr \pmod{k}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условие теоремы выполнено. Тогда для ψ_r , la и ε^t имеют место равенства

$$\psi_r(la) = \varepsilon^{lr} = \varepsilon^{t(n-1)} = (\varepsilon^t)^{n-1},$$

т. е. выполнено условие (5) следствия 2. Следовательно, отображение

$$\varphi_{r,t} : \text{abl}_{la}(a) \rightarrow \text{red}^n GL_m(\mathbb{C}),$$

действующее по правилу

$$\varphi_{r,t}(sa) = \psi_r(sa) \cdot \varepsilon^t = \varepsilon^{rs} \cdot \varepsilon^t = \varepsilon^{rs+t},$$

является представлением n -арной группы $\text{abl}_{la}(a)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В том случае, когда сравнение (7) не разрешимо, абелева полумультипликативная n -арная группа $\text{abl}_{la}(a)$ не имеет представлений, описываемых формулой (6).

Известно (Лемма 1, [6]), что любые две абелевы полуциклические n -арные группы $abl_{sa}(a)$ и $abl_{ta}(a)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(s, n - 1, k) = \text{НОД}(t, n - 1, k)$, где $k = |(a)|$. Отсюда следует, что количество различных (с точностью до изоморфизма) конечных абелевых полуциклических n -арных групп одного и того же порядка k равно количеству натуральных делителей числа $\text{НОД}(n - 1, k)$.

В частности, когда делитель $\text{НОД}(n - 1, k)$ равен 1, получаем циклическую n -арную группу $abl_a(a)$, порождаемую элементом a . Если же делитель $\text{НОД}(n - 1, k)$ равен ему самому, получаем n -арную группу $abl_0(a) = red^n(a)$, являющуюся производной от циклической группы (a) .

Из теоремы 3 для конечных циклических n -арных групп имеем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть конечная циклическая группа (a) порядка k имеет представление $\psi_r(sa) = \varepsilon^{rs}$, где ε – корень k -й степени из 1, $r = 0, 1, \dots, k - 1$. Тогда для каждого r , кратного $\text{НОД}(n - 1, k)$, циклическая n -арная группа $abl_a(a)$ имеет $\text{НОД}(n - 1, k)$ представлений, построенных по правилу (6), где t – решение сравнения $x(n - 1) \equiv r \pmod k$.

Из теоремы 3 для производных n -арных групп от конечных циклических групп имеем

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть конечная циклическая группа (a) порядка k имеет представление $\psi_r(sa) = \varepsilon^{rs}$, где ε – корень k -й степени из 1, $r = 0, 1, \dots, k - 1$. Тогда производная n -арная группа $abl_0(a) = red^n(a)$ для каждого r имеет $\text{НОД}(n - 1, k)$ представлений, построенных по правилу (6), где t – решение сравнения $x(n - 1) \equiv 0 \pmod k$.

Для бесконечных абелевых полуциклических n -арных групп верна

ТЕОРЕМА 4. Пусть бесконечная циклическая группа (a) имеет представление $\psi(sa) = \lambda^s$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\lambda \neq 0$ [5, стр. 93]. Тогда бесконечная абелева полуциклическая n -арная группа $abl_{la}(a)$ имеет представление

$$\varphi(sa) = \lambda^s \cdot \mu, \tag{8}$$

где μ удовлетворяет условию $\lambda^l = \mu^{n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условие теоремы выполнено. Тогда для ψ , la и μ выполнено также условие (5) следствия 2, поскольку $\psi(la) = \lambda^l = \mu^{n-1}$. Следовательно, отображение $\varphi : abl_{la}(a) \rightarrow red^n GL_m(\mathbb{C})$, действующее по правилу

$$\varphi(sa) = \psi(sa) \cdot \mu = \lambda^s \cdot \mu,$$

является представлением n -арной группы $abl_{la}(a)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как уравнение $\lambda^l = x^{n-1}$ имеет $n - 1$ решений при $\lambda \neq 0$, то с помощью одного представления $\psi(sa) = \lambda^s$ бесконечной циклической группы (a) в теореме 4 строятся $n - 1$ не эквивалентных представлений бесконечной абелевой полуциклической n -арной группы $abl_{la}(a)$.

Известно (Предложение 7, [7]), что любые две бесконечные абелевы полуциклические n -арные группы $abl_{sa}(a)$ и $abl_{ta}(a)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $s \equiv t \pmod{n-1}$ либо $s \equiv -t \pmod{n-1}$. Отсюда следует, что количество различных (с точностью до изоморфизма) бесконечных абелевых полуциклических n -арных групп равно $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$, и каждая из них имеет вид $abl_{la}(a)$, где $l = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

В частности, для $l = 1$ получим бесконечную циклическую n -арную группу $abl_a(a)$, порождаемую элементом a . Если же $l = 0$, получим n -арную группу $abl_0(a) = red^n(a)$, являющуюся производной от бесконечной циклической группы (a) .

Из теоремы 4 для бесконечных циклических n -арных групп имеем

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть бесконечная циклическая группа (a) имеет представление $\psi(sa) = \lambda^s$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\lambda \neq 0$. Тогда бесконечная циклическая n -арная группа $abl_a(a)$ имеет представление

$$\varphi(sa) = \mu^{s(n-1)+1},$$

где μ удовлетворяет условию $\lambda = \mu^{n-1}$.

Из теоремы 4 для производных n -арных групп от бесконечных циклических групп имеем

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть бесконечная циклическая группа (a) имеет представление $\psi(sa) = \lambda^s$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\lambda \neq 0$. Тогда производная n -арная группа $abl_0(a)$ от бесконечной циклической группы (a) имеет представление по правилу (8), где μ является корнем $(n-1)$ -й степени из 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Timm J. Kommutative n -Gruppen. Diss. Hamburg, 1967.
2. Гальмак А. М. n -Арные группы. Ч. 1 // Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. 196 с.
3. Dudec W., Shahruari M. Representation theory of polyadic groups // Algebras and Representation Theory, 2010. DOI: 1007/S10468-010-9231-9.
4. Shahruari M. Representations of finite polyadic groups // arXiv.org e-Print archive, 2010. arXiv:1011.0954v1 [math.RT].
5. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. 3. Основные структуры // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 272 с.
6. Glazek K., Michalski J. and Sierocki I. On evaluation of some polyadic groups // Contribution to General Algebra 3, 1985, p. 159-171.
7. Щучкин Н. А. Полуциклические n -арные группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2009. №3(54). С. 186-194.

REFERENCES

1. Timm J. Kommutative n -Gruppen. Diss. Hamburg, 1967.
2. Gal'mak A. M. n -Ary groups. Part I. Gomel: GGU imeni F. Skoriny, 2003. 196 p. (*in Russian*).
3. Dudec W., Shahruari M. Representation theory of polyadic groups. Algebras and Representation Theory, 2010. DOI: 1007/S10468-010-9231-9.
4. Shahruari M. Representations of finite polyadic groups. arXiv.org e-Print archive, 2010. arXiv:1011.0954v1 [math.RT].
5. Kostrikin A. I. Introduction to algebra. Part III. Basic structure. Moskva: FIZMATLIT, 2004. 272 p. (*in Russian*).
6. Glazek K., Michalski J. and Sierocki I. On evaluation of some polyadic groups. Contribution to General Algebra 3, 1985, p. 159-171.
7. Shchuchkin A. M. Semicyclic n -ary groups. Izvestiya GGU imeni F. Skoriny, 2009. 3(54). p.186-194. (*in Russian*).

Волгоградский государственный социально-педагогический университет.

Поступило 14.09.2013