

ВЫБОР ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗУБЧАТО-ПОВОДКОВЫХ ПЕРЕДАЧ

Б. П. ТИМОФЕЕВ, М. Ю. САЧКОВ

Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: Urie2006@yandex.ru

Исследована приближенная передача на параллельных осях, для которой получены функция положения, координаты точек контакта, ошибка функции положения и зависимость передаточного отношения от угла поворота. Решена задача выбора геометрических параметров из условия ограничения циклической погрешности зубцовой частоты и величины удара при пересопряжении. Обоснован выбор числа поводков по условию отсутствия кромочного контакта и обеспечению минимизации кинематической погрешности приближенной передачи на параллельных осях. Определены минимальные числа поводков исходя из математического моделирования зубчато-поводковой передачи с передаточным отношением, равным единице, обладающей наибольшей длиной активной действующей линии. Проанализировано влияние передаточного отношения на ошибку функции положения для области рациональных передаточных отношений. Разработка защищена патентом РФ.

Ключевые слова: зубчато-поводковая передача, ошибка функции положения, кромочный контакт, активная действующая линия, ошибка по скорости, геометрические параметры, характеристики зацепления.

Введение. Зубчатые передачи используются не одну тысячу лет, исторически первые передачи были несопряженными, поскольку основная теорема зацепления (теорема Виллиса) была сформулирована в 1841 г. Многие приближенные передачи были получены еще в начале XX века. В частности, для производства конических зубчатых колес дифференциалов задних мостов автомобилей Э. Вильдгабером был предложен один из самых производительных и по сей день способ кругового протягивания Revacycle [1, 2]. Передачи с приближенным зацеплением принципиально не могут передавать вращательное движение с постоянным передаточным отношением в процессе зацепления одной пары зубьев.

Важной задачей синтеза приближенного зацепления является локализация пятна контакта на поверхности зубьев. В случае приближенного зацепления (для жесткой модели) контакт точечный, для упругой модели зацепления точка контакта преобразуется в мгновенную площадку, совокупность таких площадок представляет собой пятно контакта.

Локализация пятна контакта приводит к снижению нагрузочной способности сопряженных передач. Вследствие интерференции (при обработке и эксплуатации) может быть образовано пятно контакта неприемлемой формы: „диагональность“, „мостовой контакт“, „рыбий хвост“ и т.д. Применительно к коническим передачам этот вопрос рассматривался, например, в работах В. Н. Кедринского и К. М. Писманника [3].

В различных приборах применялись поводковые передаточные механизмы, их расчету посвящены работы Ф. В. Дроздова, С. И. Пантелеева, П. А. Лебедева, Ф. Л. Литвина [4] и Е. И. Гутмана.

Для механизмов, кинематическими элементами передачи которых являются плоскость и цилиндр, цилиндр и цилиндр, были получены качественные характеристики передачи с параллельными осями [5]. Такая приближенная передача может быть использована как повышающая, так и как понижающая.

В настоящей работе решается задача выбора геометрических параметров передачи из условия ограничения циклической погрешности зубцовой частоты и величины удара при пересопряжении.

Геометрия зубчато-поводковой передачи. Рассмотрим зубчато-поводковую передачу, состоящую из зубчато-поводковых колес. На рис. 1 представлена схема расположения осей координат, связанных с зубчато-поводковыми колесами (рассматривается частный случай, когда колеса расположены на параллельных осях, а оси поводков пересекаются под углом 90°) [6].

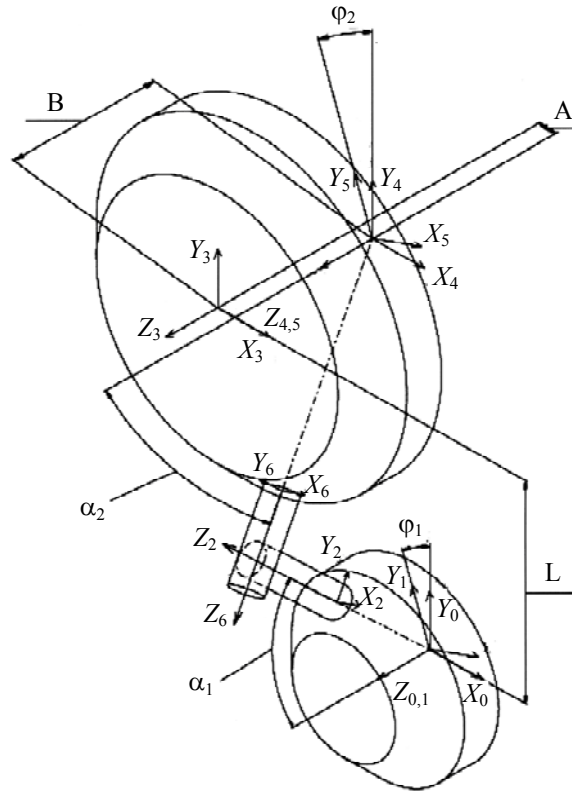


Рис. 1

Определение функции положения в неявном виде. Для получения функции положения зубчато-поводковой передачи используем равенство радиусов-векторов и ортов нормалей в точках касания поверхностей Σ_1 и Σ_2 . Эти поверхности образуют высшую кинематическую пару, элементами которой являются цилиндрические поверхности поводков.

Уравнения поверхностей Σ_1 и Σ_2 в системах координат S_2 и S_6 можно записать как

$$x_2 = u_1; \quad y_2 = \rho_1 \sin \theta_1; \quad z_2 = \rho_1 \cos \theta_1; \quad x_6 = u_2; \quad y_6 = \rho_2 \sin \theta_2; \quad z_6 = \rho_2 \cos \theta_2,$$

где ρ_i — радиус i -го поводка.

Орты нормалей поверхностей Σ_1 и Σ_2 запишем в виде:

$$e_{x2} = \cos \theta_1; \quad e_{y2} = \sin \theta_1; \quad e_{z2} = 0; \quad e_{x6} = \cos \theta_2; \quad e_{y6} = \sin \theta_2; \quad e_{z6} = 0.$$

Для преобразования координат воспользуемся следующими матричными уравнениями:

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{M}_{01} \mathbf{M}_{12} \mathbf{r}_2 = \mathbf{M}_{02} \mathbf{r}_2; \quad \mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{M}_{03} \mathbf{M}_{34} \mathbf{M}_{45} \mathbf{M}_{56} \mathbf{r}_6 = \mathbf{M}_{06} \mathbf{r}_6,$$

здесь $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_6$ — матрицы радиусов-векторов поверхностей Σ_1, Σ_2 , а $\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}$ — матрицы радиусов-векторов этих же поверхностей в неподвижной системе координат S_0 .

На основании рис. 1 получим следующие матрицы перехода из одной системы координат в другую:

$$\mathbf{M}_{02} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varepsilon_1 \sin \varphi_1 & -\cos \varepsilon_1 \sin \varphi_1 & -R_1 \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \sin \varepsilon_1 & \cos \varphi_1 \cos \varepsilon_1 & R_1 \cos \varphi_1 \\ 0 & -\cos(\varepsilon_1) & \sin(\varepsilon_1) & R_1 \operatorname{tg} \varepsilon_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{06} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varepsilon_2 \sin \varphi_2 & \cos \varepsilon_2 \sin \varphi_2 & A + R_2 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \sin \varepsilon_2 & -\cos \varphi_2 \cos \varepsilon_2 & L - R_2 \cos \varphi_2 \\ 0 & \cos \varepsilon_2 & \sin \varepsilon_2 & R_2 \operatorname{tg} \varepsilon_2 - B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_i = 90 - \alpha_i$.

Проекции ортов нормалей в системе O_0 определяются с помощью матричных равенств:

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{12} \mathbf{e}_2 = \mathbf{L}_{02} \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{L}_{03} \mathbf{L}_{34} \mathbf{L}_{45} \mathbf{L}_{56} \mathbf{e}_6 = \mathbf{L}_{06} \mathbf{e}_6.$$

Матрицы $\mathbf{L}_{01}, \mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{03}, \mathbf{L}_{34}, \mathbf{L}_{45}, \mathbf{L}_{56}$ получены из матриц $\mathbf{M}_{01}, \mathbf{M}_{12}, \mathbf{M}_{03}, \mathbf{M}_{34}, \mathbf{M}_{45}, \mathbf{M}_{56}$ „зачеркиванием“ четвертого столбца и четвертой строки. Следует отметить, что из трех уравнений для проекций ортов нормалей два являются независимыми, поскольку наложена связь: $|\mathbf{e}^{(1)}| = |\mathbf{e}^{(2)}| = 1$.

После всех преобразований поверхностей Σ_1, Σ_2 и ортов нормалей получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} &\rho_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_1 - u_1 \cos \varepsilon_1 \sin \varphi_1 - R_1 \sin \varphi_1 - \rho_1 \sin \varphi_1 \sin \varepsilon_1 \sin \theta_1 - \\ &\quad - (A + R_2 \sin \varphi_2 + u_2 \cos \varphi_2 \sin \varepsilon_2 + \rho_2 \cos \varphi_2 \cos \theta_2 - \rho_2 \sin \varphi_2 \sin \varepsilon_2 \sin \theta_2) = 0, \\ &R_1 \cos \varphi_1 + u_1 \cos \varphi_1 \cos \varepsilon_1 + \rho_1 \cos \theta_1 \sin \varphi_1 + \rho_1 \cos \varphi_1 \sin \varepsilon_1 \sin \theta_1 - \\ &\quad - (L - R_2 \cos \varphi_2 - u_2 \cos \varphi_2 \cos \varepsilon_2 + \rho_2 \cos \theta_2 \sin \varphi_2 + \rho_2 \cos \varphi_2 \sin \varepsilon_2 \sin \theta_2) = 0, \\ &R_1 \operatorname{tg} \varepsilon_1 + u_1 \sin \varepsilon_1 - \rho_1 \cos \varepsilon_1 \sin \theta_1 - (R_2 \operatorname{tg} \varepsilon_2 - B + u_2 \sin \varepsilon_2 + \rho_2 \cos \varepsilon_2 \sin \theta_2) = 0, \\ &\cos \varphi_1 \cos \theta_1 - \sin \varphi_1 \sin \varepsilon_1 \sin \theta_1 + (\cos \varphi_2 \cos \theta_2 - \sin \varphi_2 \sin \varepsilon_2 \sin \theta_2) = 0, \\ &\cos \theta_1 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 \sin \varepsilon_1 \sin \theta_1 + (\cos \theta_2 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varepsilon_2 \sin \theta_2) = 0, \\ &-\cos \varepsilon_1 \sin \theta_1 + \cos \varepsilon_2 \sin \theta_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В пять независимых уравнений системы (1) входят шесть неизвестных $\varphi_1, \varphi_2, u_1, u_2, \theta_1, \theta_2$. Варьируя параметр φ_1 , получим значения для остальных неизвестных системы. С использованием численных методов программной оболочки MathCad были получены графики зависимостей $\varphi_2 = f_1(\varphi_1)$, $\Delta \varphi_2 = f_2(\varphi_1)$, где $\Delta \varphi_2 = \varphi_{2д} - \varphi_{2н} = \varphi_{2д} - \varphi_{1i_{12}}$ (индекс „д“ обозначает действительную величину φ_2 , „н“ — номинальную), $i_{21} = f_3(\varphi_1)$, $\Delta i_{21} = f_4(\varphi_1)$. Зависимости $\Delta i_{21} = i_{21д} - i_{21н}$ и $u_1 = f_5(\theta_1)$, $u_2 = f_6(\theta_2)$ описывают графики координат точек контакта на поверхностях Σ_1, Σ_2 (рис. 2—4). Для получения численных значений функции положения, функций i_{21} и Δi_{21} , а также координат точек контакта на поверхностях были при-

няты следующие значения основных параметров: $m = 2$ мм, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ рад, $\rho_2 = \rho_1 = 1,171$ мм, число поводков — 15.

На рис. 2, а приведена зависимость $\varphi_2 = f_1(\varphi_1)$, б — $i_{21} = f_3(\varphi_1)$.

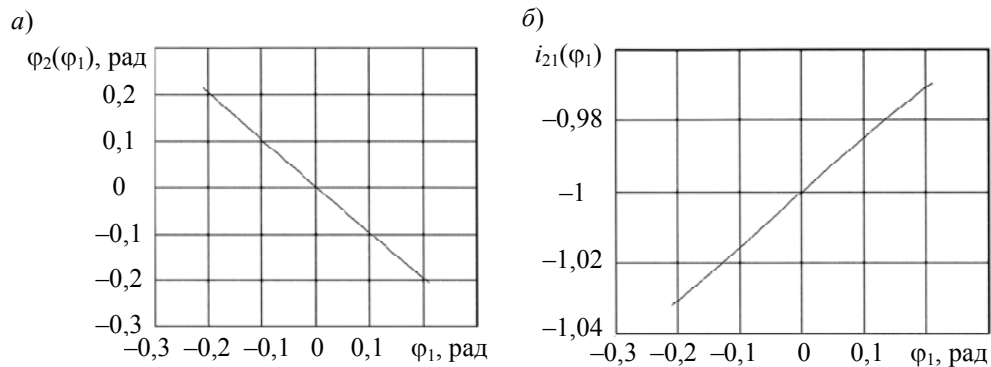


Рис. 2

На рис. 3 представлены координаты точек контакта на поверхностях Σ_1 (а), Σ_2 (б).

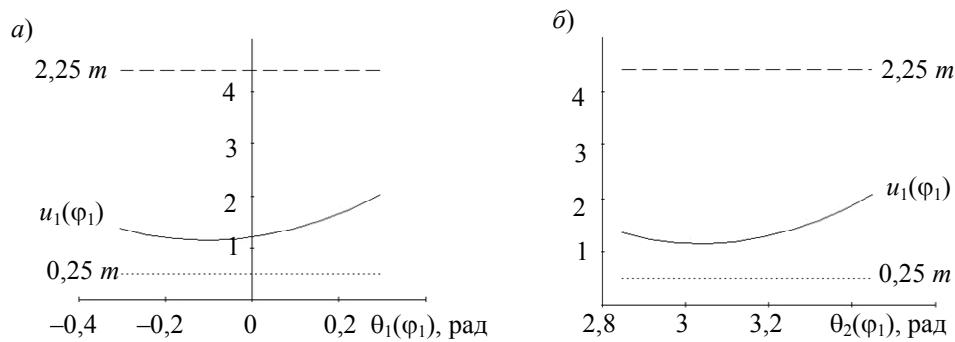


Рис. 3

На рис. 4, а приведена зависимость $\Delta i_{21} = f_4(\varphi_1)$, б — $\Delta \varphi_2 = f_2(\varphi_1)$.

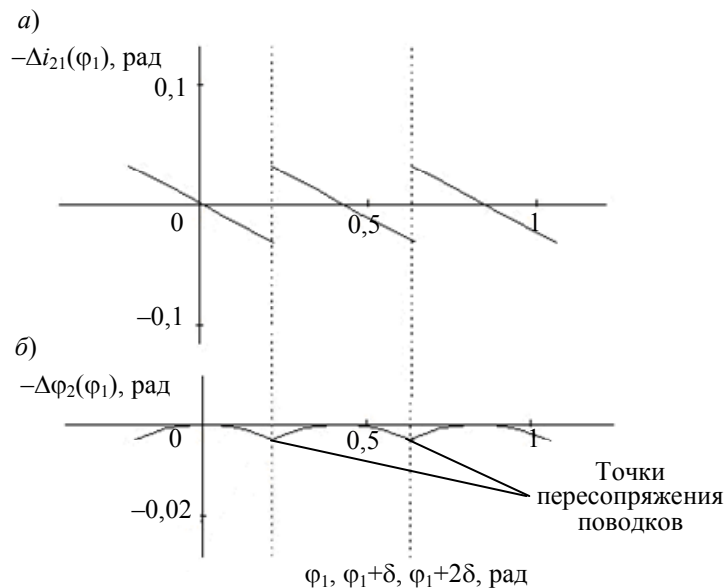


Рис. 4

Как можно заметить, функция положения близка к линейной, а координаты точек сопряжения на поверхности поводков не выходят на кромку, это является свойством зубчато-поводковой передачи.

Выбор геометрических параметров зубчато-поводковых колес. Как видно из рис. 3, координаты точек контакта не выходят на верхнюю кромку поводка и нижнюю линию (границу радиального зазора). Однако с уменьшением числа поводков, в пределах одного передаточного отношения, увеличивается угловой шаг и как следствие — длина линии контакта на поверхностях поводков. Для определения рационального числа поводков в пределах одного передаточного отношения был проведен расчет значений качественных характеристик зубчато-поводковых передач с различным числом поводков. Полученные расчетные данные для $m = 2$ мм, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ рад, $\rho_2 = \rho_1 = 1,171$ мм, $u_{\min} = 0,25m = 0,5$ мм, $u_{\min} = (0,25 + 2 \cdot 1)m = 4,5$ мм, $i_{21} = 1$ представлены в таблице.

Качественные характеристики зубчато-поводковых передач

Число поводков											
8						15					
φ_1	$\varphi_2(\varphi_1)$	$\Delta\varphi_2(\varphi_1)$	$\Delta i_{21}(\varphi_1)$	$u_1(\varphi_1)$	$u_2(\varphi_1)$	φ_1	$\varphi_2(\varphi_1)$	$\Delta\varphi_2(\varphi_1)$	$\Delta i_{21}(\varphi_1)$	$u_1(\varphi_1)$	$u_2(\varphi_1)$
-0,393	0,414	0,022	-0,104	2,773	1,563	-0,349	0,364	0,015	-0,084	2,587	1,495
-0,313	0,327	0,014	-0,087	2,288	1,295	-0,269	0,278	$9,342 \cdot 10^{-3}$	-0,068	2,116	1,252
-0,233	0,241	$7,94 \cdot 10^{-3}$	-0,067	1,896	1,14	-0,189	0,194	$4,667 \cdot 10^{-3}$	-0,049	1,742	1,123
-0,153	0,156	$3,442 \cdot 10^{-3}$	-0,045	1,585	1,082	-0,109	0,111	$1,559 \cdot 10^{-3}$	-0,029	1,456	1,095
-0,073	0,073	$7,794 \cdot 10^{-4}$	-0,021	1,35	1,109	-0,029	0,029	$1,103 \cdot 10^{-4}$	$-7,598 \cdot 10^{-3}$	1,253	1,157
$7,301 \cdot 10^{-3}$	$-7,293 \cdot 10^{-3}$	$7,792 \cdot 10^{-6}$	$2,133 \cdot 10^{-3}$	1,188	1,212	0,051	-0,051	$3,348 \cdot 10^{-4}$	0,013	1,132	1,3
0,087	-0,086	$1,097 \cdot 10^{-3}$	0,025	1,099	1,385	0,131	-0,129	$2,172 \cdot 10^{-3}$	0,033	1,094	1,519
0,167	-0,163	$3,938 \cdot 10^{-3}$	0,046	1,084	1,622	0,211	-0,205	$5,5 \cdot 10^{-3}$	0,05	1,141	1,811
0,247	-0,239	$8,364 \cdot 10^{-3}$	0,064	1,148	1,923	0,291	-0,281	0,01	0,066	1,28	2,179
0,327	-0,313	0,014	0,08	1,296	2,29	0,371	-0,355	0,016	0,078	1,519	2,627
0,407	-0,386	0,021	0,093	1,536	2,73	0,451	-0,428	0,023	0,088	1,868	3,164
0,487	-0,458	0,029	0,103	1,88	3,252	0,531	-0,501	0,03	0,096	2,342	3,807
0,567	-0,53	0,037	0,109	2,341	3,872	—	—	—	—	—	—

Как видно из таблицы, при восьми поводках линия контакта не выходит за верхнюю границу поводка, но меньше чем при пяти поводках некоторые значения выходят из интервала $[u_{\min}; u_{\max}]$. Данные расчеты производились для различных передаточных отношений в пределах одного модуля, их результаты подтвердили, что с увеличением передаточного отношения минимальное теоретическое значение числа поводков ведущего колеса можно снизить за счет уменьшения длины активной линии зацепления. При этом уменьшается ошибка функции положения и передаточного отношения. Минимальное число поводков ведущего колеса зависит от требований изготовителя привода.

Следует отметить, что при увеличении передаточного отношения циклическая погрешность и скачок скорости в момент пересопряжения уменьшаются. Следовательно, минимальное рациональное число поводков ведущего колеса также уменьшается с увеличением передаточного отношения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pat. 2 267 181 USA. Gear cutter / E. Wildhaber. Patented Dec. 22, 1937.
2. Pat. 2 357 153 USA. Method of cutting gears / E. Wildhaber. Patented Aug. 27, 1944.
3. Кедринский В. Н., Писманик К. М. Станки для обработки конических зубчатых колес. М.: Машиностроение, 1967. 584 с.
4. Литвин Ф. Л. Проектирование механизмов и деталей приборов. Л.: Машиностроение, 1973. 696 с.
5. Тимофеев Б. П., Уланов А. А. Кинематика традиционных передач // Теория механизмов и машин. СПб: СПбГПУ, 2013. Т. 11, № 2(22). С. 73—88.
6. Пат. 146159 РФ. Колесо для передачи вращательного движения / Б. П. Тимофеев, М. Ю. Сачков. Заявл. 19.05.2014; опубл. 10.10.2014. Бюл. № 28.

Сведения об авторах**Борис Павлович Тимофеев**— д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, кафедра мехатроники;
E-mail: timofeev@mail.ifmo.ru**Михаил Юрьевич Сачков**— аспирант; Университет ИТМО, кафедра мехатроники;
E-mail: Urie2006@yandex.ruРекомендована кафедрой
мехатроникиПоступила в редакцию
27.01.15 г.**Ссылка для цитирования:** Тимофеев Б. П., Сачков М. Ю. Выбор геометрических параметров зубчато-поводковых передач // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 6. С. 492—497.**THE CHOICE OF GEOMETRIC PARAMETERS OF A ROD-TOOTHED TRANSMISSION****B. P. Timofeev, M. Yu. Sachkov***ITMO University, 197101, Saint Petersburg, Russia**E-mail: Urie2006@yandex.ru*

A parallel-axis toothed gear with approximate tooth profile is studied. The problem of optimal choice of geometric parameters in the absence of edge contact is solved with the use of calculations performed on the base of developed model of rod-toothed transmission.

Keywords: rod-toothed transmission, number of rods, edge contact, active action line, speed error, engagement characteristics and geometrical parameters.

Data on authors**Boris P. Timofeev**— Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Mechatronics;
E-mail: timofeev@mail.ifmo.ru**Mikhail Yu. Sachkov**

— Post-Graduate Student; ITMO University, Department of Mechatronics; E-mail: Urie2006@yandex.ru

Reference for citation: Timofeev B. P., Sachkov M. Yu. The choice of geometric parameters of a rod-toothed transmission // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroyeniye. 2015. Vol. 58, N 6. P. 492—497 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-6-492-497