

5. Lyubetsky V.A., Zverkov O.A., Pirogov S.A., Rubanov L.I., Seliverstov A.V. Modeling RNA polymerase interaction: chordates mitochondrial DNA // *Biology Direct*. 2012. V. 7. № 26.

6. Imanian B., Pomert J.-F., Keeling P.J. The Complete Plastid Genomes of the Two 'Dinotoms' *Durinskia baltica* and *Kryptoperidinium foliaceum* // *PLoS ONE*. 2010. V. 5. № 5.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (госконтракт 14.740.11.1053 и соглашение 8481).

Zverkov O.A., Seliverstov A.V., Lyubetskiy V.A. AVERAGED ENTROPY AS CONSERVATIVITY MEASURE OF GENOME REGIONS

The averaged entropy criterion is introduced and used in large-scale searches for conserved sites in plastomes of algae.

Key words: entropy; conserved genome regions; plastomes.

УДК 517.938

БИФУРКАЦИИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В КОНСЕРВАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© Л.С. Ибрагимова

Ключевые слова: бифуркация; консервативные системы; вынужденные колебания.

Изучается задача о бифуркации вынужденных колебаний в консервативных динамических системах. Предложенный метод основан на конструировании вспомогательного двухпараметрического операторного уравнения. Данный способ позволяет определить решения исходной задачи о периодических решениях.

В настоящей работе рассматриваются консервативные [1] и близкие к консервативным системы, заданные дифференциальными уравнениями вида

$$x' = F(x; t; \mu), \quad x \in R^2, \quad (1)$$

где μ — скалярный или векторный параметр. Предполагается, что функция $F(x; t; \mu)$ является непрерывно дифференцируемой по совокупности аргументов и периодической по t , то есть $F(x; t + T; \mu) = F(x; t; \mu)$; пусть также система (1) имеет точку равновесия $x^* = 0$ при всех значениях μ . Изучается задача о бифуркации вынужденных колебаний в окрестности точки равновесия $x^* = 0$.

Обозначим через $V(x, \mu)$ оператор сдвига по траекториям системы (1) за время от $t = 0$ до $t = T > 0$. В силу периодичности функции $F(x; t; \mu)$ изучение задачи о T -периодических решениях системы (1) может быть сведено к изучению отображения $V(x, \mu)$, неподвижные точки которого определяют начальные значения T -периодических решений уравнения (1).

Систему (1) можно представить в виде

$$x' = A(\mu, t)x + a(x, t, \mu), \quad (2)$$

где $A(\mu, t) = F'_x(0; t; \mu)$, $a(x; t; \mu) = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \rightarrow 0$. Ниже для простоты будем считать, что $A(\mu, t)$ не зависит от t , т. е. $A(\mu) = F'_x(0; t; \mu)$. Тогда оператор V может быть

представлен в виде

$$V(x, \mu) = e^{TA(\mu)}x + e^{TA(\mu)} \int_0^T e^{-A(\mu)s} a(x(s); s; \mu) ds; \quad (3)$$

здесь $x(t)$ – это решение задачи Коши для дифференциального уравнения (2) при начальном условии $x(0) = x$.

Рассмотрим отображение W_μ , сопоставляющее каждому множеству $A \subset R^N$ новое множество $W_\mu(A) = \bigcup_{x \in A} V(x, \mu)$. Динамическую систему (1) называют консервативной, если отображение W_μ сохраняет объем (меру) любого множества $A \subset R^N$, т. е. множества A и $W_\mu(A)$ имеют одинаковый объем (меру). Систему (2) назовем близкой к консервативной, если система

$$x' = A(\mu)x \quad (4)$$

консервативна.

Имеет место следующая

Л е м м а 1. Система (4) консервативна тогда и только тогда, когда собственные значения матрицы $A(\mu)$ являются чисто мнимыми.

Значение μ_0 параметра μ называют точкой бифуркации qT – периодических решений системы (1), если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\mu = \mu(\varepsilon)$, при котором система (1) имеет ненулевое qT – периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, при этом $\max_t \|x(t, \varepsilon)\| \rightarrow 0$ и $\mu(\varepsilon) \rightarrow \mu_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

При $q = 1$ будем говорить о бифуркации вынужденных колебаний, а при $q \geq 2$ – о бифуркации субгармонических колебаний.

Верны следующие утверждения

Л е м м а 2. Пусть μ_0 – точка бифуркации вынужденных колебаний системы (2). Тогда матрица $A(\mu_0)$ имеет собственные значения $\pm \frac{2\pi ki}{T}$ при некотором целом k .

Л е м м а 3. Пусть μ_0 – точка бифуркации субгармонических колебаний периода qT системы (2). Тогда матрица $A(\mu_0)$ имеет собственные значения $\pm \frac{2\pi ki}{qT}$.

Пусть μ – скалярный параметр. Согласно необходимому условию бифуркации вынужденных колебаний, матрица $A(\mu_0)$ должна иметь собственные значения $\pm \frac{2\pi ki}{T}$.

Пусть для определенности матрица $A(\mu_0)$ имеет собственные значения $\pm \frac{2\pi i}{T}$. Рассмотрим вопрос о достаточном признаке бифуркации вынужденных колебаний. Для изучения этого вопроса перейдем к операторному уравнению $x = V(x, \mu)$, где $V(x, \mu)$ – оператор (3).

Положим $B(\mu) = e^{TA(\mu)}$, $b(x, \mu) = e^{TA(\mu)} \int_0^T e^{-A(\mu)s} a(x(s); s; \mu) ds$. Тогда получим уравнение

$$x = B(\mu)x + b(x, \mu), \quad x \in R^2. \quad (5)$$

Согласно условию консервативности, матрица $A(\mu)$ должна иметь собственные значения $\pm w(\mu)i$. Пусть для определенности матрица $A(\mu)$ имеет вид

$$A(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2(\mu) & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $w(\mu_0) = \frac{2\pi}{T}$. Далее верно равенство

$$B(\mu) = e^{TA(\mu)} = \begin{bmatrix} \cos Tw(\mu) & \frac{1}{w(\mu)} \sin Tw(\mu) \\ -w(\mu) \sin Tw(\mu) & \cos Tw(\mu) \end{bmatrix}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\mu_0 = 0$.

Решения уравнения (5) первоначально будем находить по методу малого параметра в виде $x = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 x_3 + \dots$, где $x_1, x_2, \dots$ требуют определения. Тогда получим уравнение

$$\mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots = B(\mu)(\mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots) + b(\mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots, \mu).$$

Отсюда для определения неизвестных $x_1, x_2, \dots$ получим систему уравнений

$$x_1 = B(0)x_1,$$

$$x_2 = B(0)x_2 + B'(0)x_1 + b_2(x_1, 0), \dots$$

Здесь $B'(0) = w'(0)T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B(0) = I$. Для первого уравнения любое x_1 является решением. Второе выражение представляет собой уравнение

$$B'(0)x_1 + b_2(x_1, 0) = 0, \quad (6)$$

которое имеет нулевое решение $x_1 = 0$. Здесь $b_2(x, \mu)$ – это квадратичные слагаемые нелинейности $b(x, \mu)$. Пусть оно имеет и ненулевое решение x_1^* . На следующем этапе перейдем к вспомогательному двухпараметрическому уравнению

$$x = (1 + \alpha)B(\mu)x + b(x, \mu), \quad x \in R^2, \quad (7)$$

где α – вспомогательный параметр. При $\alpha = 0$ уравнение (7) совпадает с уравнением (5). Применим для уравнения (7) операторный метод исследования правильной бифуркации, предложенный в [2]. Решения уравнения (7) будем искать по направлению вектора x_1^* .

Для бифурцирующих решений уравнения (7) в операторном методе известны асимптотические формулы:

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + \dots, \quad \alpha(\varepsilon) = \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \dots, \quad \mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \dots,$$

где $e = \frac{x_1^*}{\|x_1^*\|}$, а выражения $e_1, e_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots$ вычисляются по формулам, предложенным в [2]. Можно показать, что $\alpha(\varepsilon) \equiv 0$. Следовательно, бифурцирующие решения уравнения (7) совпадают с решениями основного уравнения (5). Таким образом, операторный метод исследования двухпараметрического уравнения (7) позволяет построить бифурцирующие решения однопараметрического уравнения (5).

Т е о р е м а. Пусть матрица $A(\mu)$ имеет собственные значения $\pm w(\mu)i$, где $w(\mu_0) = \frac{2\pi i}{T}$ и $w'(0) \neq 0$; пусть при этом уравнение (6) имеет ненулевое решение x_1^* . Тогда μ_0 – точка бифуркации вынужденных колебаний системы (2), при этом верны асимптотические формулы для бифурцирующих решений

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + \dots, \quad \mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \dots,$$

в которых векторы e_1, e_2 и числа μ_1 и μ_2 могут быть найдены по формулам операторного метода [2].

П р и м е р. Рассмотрим уравнение $x'' + (1 + \mu)x + x^2 \sin t = 0$.

Полагая $y_1 = x$, $y_2 = x'$, получим систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -(1 + \mu)y_1 + y_1^2 \sin t. \end{cases} \quad (8)$$

Задача о T -периодических решениях системы (8) равносильна интегральному уравнению

$$y = e^{A(\mu)T}y + e^{A(\mu)T} \int_0^T e^{-A(\mu)s} a(y(s); s) ds,$$

где $y(t)$ – решение задачи Коши для системы (8) с начальным условием $y(0) = y$. Здесь $A(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1+\mu) & 0 \end{bmatrix}$, $a(y, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1^2 \end{bmatrix} \sin t$. Положим $T = 2\pi$. Вычисления показывают, что T -периодические решения уравнения (8) возникают только по направлению вектора $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Магницкий Н.А.* Теория динамического хаоса. М.: Наука, 1985; ЛЕНАНД, 2011. - 320 с.
2. *Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г.* Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах. // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2. № 4. С. 3-26.

Ibragimova L.S. BIFURCATIONS OF FORCED OSCILLATIONS IN CONSERVATIVE DYNAMIC SYSTEMS

The problem about bifurcations of the forced oscillations in the conservative systems is studied. The method is based on construction of the subsidiary two-parameter operator equation. This method allows to define solutions of the initial problem about periodic solutions.

Key words: bifurcation; conservative systems; forced oscillations.

УДК 519.254

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА С ПОМЕХОЙ В ВЫХОДНОМ СИГНАЛЕ

© Д.В. Иванов

Ключевые слова: параметрическая идентификация; модель выходной ошибки; метод наименьших квадратов; разности дробного порядка.

Предложен алгоритм, являющийся обобщением метода наименьших квадратов, который позволяет получать сильно состоятельные оценки параметров линейных динамических систем нецелого порядка при наличии помех наблюдения в выходном сигнале в условиях отсутствия информации о законе распределения помех.

В настоящее время активно развиваются методы нелинейного оценивания параметров динамических систем [1, 2]. В статье предложено обобщение метода нелинейных наименьших квадратов на случай динамической системы нецелого порядка с помехой в выходном сигнале.

Рассмотрим линейную динамическую систему нецелого порядка, описываемую стохастическими уравнениями с дискретным временем $i = \dots - 1, 0, 1, \dots$:

$$z_i = \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i, y_i = z_i + \xi_i, \quad (1)$$