

## ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ПРИ ВКЛЮЧЕНИИ ЭВМ В КОНТУР ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

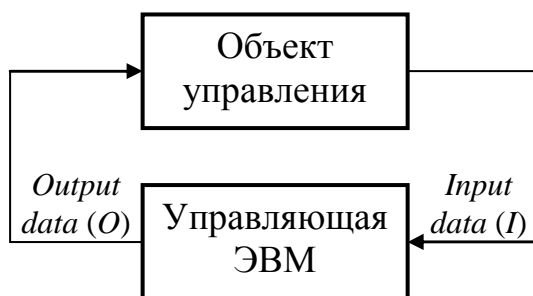
А.А. Аршакян, Е.В. Ларкин, М.Л. Савин

*Решена задача определения временной задержки между вводом данных в ЭВМ и выводом управляющего воздействия на исполнительный орган при включении ЭВМ в контур обратной связи. Алгоритм управления рассматривается как циклический алгоритм без зацикливаний. Построена полумарковская модель формирования транзакций для конкретного рассматриваемого случая. Показано, что при полинге возникает эффект случайности времени между двумя последовательными транзакциями. Получены зависимости для расчета плотности распределения, математического ожидания и дисперсии времени запаздывания.*

*Ключевые слова:* ЭВМ, управляющий алгоритм, обратная связь, ввод данных, вывод данных, полумарковский процесс, запаздывание, полинг, транзакция.

Одной из проблем цифрового управления объектами является проблема чистого запаздывания при расчетах воздействия на исполнительные органы относительно момента считывания сигнала с датчиков обратной связи [1, 2, 3]. Чистое запаздывание между транзакциями возникает вследствие последовательного характера интерпретации операторов алгоритма в ЭВМ Фон-неймановского типа [4, 5, 6]. Достаточно сложные алгоритмы обработки данных и управления, как правило, содержат несколько операторов опроса датчиков и несколько операторов опроса контроллеров периферийных исполнительных устройств.

Рассмотрим случай простейшей одноконтурной системы управления [2, 3], структура которой приведена на рис. 1.



**Рис. 1. Схема включения ЭВМ в контур обратной связи**

В систему входит объект управления, состояние которого оценивается с помощью сенсора, формирующего обрабатываемые с помощью ЭВМ данные (*input data*). Результаты обработки (*output data*) подаются с выхода ЭВМ на вход объекта управления. Управление вводом и выводом данных осуществляется с использованием процедуры полинга. Алгоритм,

порождающий полинг, является циклическим, но без зацикливаний. При этом он организован таким образом, что после процедуры ввода данных (*input data*) обязательно следует процедура вывода данных (*output data*), а после процедуры вывода данных обязательно следует процедура ввода данных.

Последовательная интерпретация подобного алгоритма рассматривается как полумарковский процесс [7, 8, 9]:

$$M = \{A, \mathbf{R}, \mathbf{h}(t)\}, \quad (1)$$

где  $A = \{a_1, \dots, a_j, \dots, a_J\} = A_I \cup A_O \cup A_B \cup A_F$  - множество состояний процесса, совпадающее с множеством операторов алгоритма;  $A_I = \{a_{1(I)}, \dots, a_{j(I)}, \dots, a_{J(I)}\}$  - подмножество операторов ввода данных в ЭВМ;  $A_O = \{a_{1(O)}, \dots, a_{j(O)}, \dots, a_{J(O)}\}$  - подмножество операторов вывода данных из ЭВМ;  $A_B = \{a_{1(B)}, \dots, a_{j(B)}, \dots, a_{J(B)}\}$  - подмножество операторов алгоритма, исполняемых между обращениями к операторам подмножества  $A_O$  и обращениями к операторам подмножества  $A_I$  (*backward*);  $A_F = \{a_{1(F)}, \dots, a_{j(F)}, \dots, a_{J(F)}\}$  - подмножество операторов алгоритма, исполняемых между обращениями к операторам подмножества  $A_I$  и обращениями к операторам подмножества  $A_O$  (*forward*);  $\mathbf{R} = [R_{jn}]$  - матрица смежности размером  $[J(I) + J(O) + J(B) + J(F)] \times [J(I) + J(O) + J(B) + J(F)]$ , отражающая структуру алгоритма;  $\mathbf{h}(t)$  - полумарковская матрица размером  $[J(I) + J(O) + J(B) + J(F)] \times [J(I) + J(O) + J(B) + J(F)]$ , задающая стохастические и временные параметры полумарковского процесса;

$$R_{jn} = \begin{cases} 1, & \text{если из состояния } a_j \text{ можно попасть в состояние } a_n; \\ 0, & \text{если из состояния } a_j \text{ нельзя попасть в состояние } a_n; \end{cases} \quad (2)$$

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{p} \otimes \mathbf{f}(t) = [p_{jn} \cdot f_{jn}(t)]; \quad (3)$$

$\mathbf{p} = [p_{jn}]$  - матрица вероятностей переключения в  $n$ -е состояние после завершения пребывания в  $j$ -м состоянии;  $\mathbf{f}(t) = [f_{jn}(t)]$  матрица плотностей распределения времени пребывания полумарковского процесса в  $j$ -м состоянии при условии последующего переключения в  $n$ -е состояние.

Без нарушения общности, операторы в множестве  $A$ , а также строки и столбцы в матрицах  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{h}(t)$  можно перенумеровать таким образом, что за номерами  $1 \leq j \leq J(I)$  следуют номера  $J(I) + 1 \leq j \leq J(I) + J(F)$ , затем номера  $J(I) + J(F) + 1 \leq j \leq J(I) + J(F) + J(O)$ , и наконец, номера

$J(I) + J(F) + J(O) + 1 \leq j \leq J(I) + J(F) + J(O) + J(B)$ . В этом случае матрицы  $R$  и  $h(t)$  будут иметь вид:

$$R = \begin{bmatrix} (0) & R_{IF} & R_{IO} & (0) \\ (0) & R_{FF} & R_{FO} & (0) \\ R_{OI} & (0) & (0) & R_{OB} \\ R_{BI} & (0) & (0) & R_{BB} \end{bmatrix} \begin{matrix} I \\ F \\ O \\ B \end{matrix}; \quad (4)$$

$$h(t) = \begin{bmatrix} (0) & h_{IF}(t) & h_{IO}(t) & (0) \\ (0) & h_{FF}(t) & h_{FO}(t) & (0) \\ h_{OI}(t) & (0) & (0) & h_{OB}(t) \\ h_{BI}(t) & (0) & (0) & h_{BB}(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} I \\ F \\ O \\ B \end{matrix}, \quad (5)$$

где  $(0)$  - нулевые подматрицы;  $R_{IF}$ ,  $h_{IF}(t)$  - ненулевые подматрицы размером  $J(I) \times J(F)$ ;  $R_{FF}$ ,  $h_{FF}(t)$  - ненулевые подматрицы размером  $J(F) \times J(F)$ ;  $R_{FO}$ ,  $h_{FO}(t)$  - ненулевые подматрицы размером  $J(F) \times J(O)$ ;  $R_{OI}$ ,  $h_{OI}(t)$  - ненулевые подматрицы размером  $J(O) \times J(I)$ ;  $R_{OB}$ ,  $h_{OB}(t)$  - ненулевые подматрицы размером  $J(O) \times J(B)$ ;  $R_{BI}$ ,  $h_{BI}(t)$  - ненулевые подматрицы размером  $J(B) \times J(I)$ ;  $R_{BB}$ ,  $h_{BB}(t)$  - ненулевые подматрицы размером  $J(B) \times J(B)$ .

При смене состояний полумарковского процесса (1) он через случайные моменты времени попадает с определенной вероятностью в состояния, соответствующие операторам запроса на ввод данных (*input*), затем через случайные моменты времени попадает с определенной вероятностью в состояния, соответствующие операторам запроса на вывод данных (*output*) (рис. 2). В [10, 11] показано, что полумарковский процесс, моделирующий работу алгоритма, обладающего вышеперечисленными свойствами, является эргодическим.

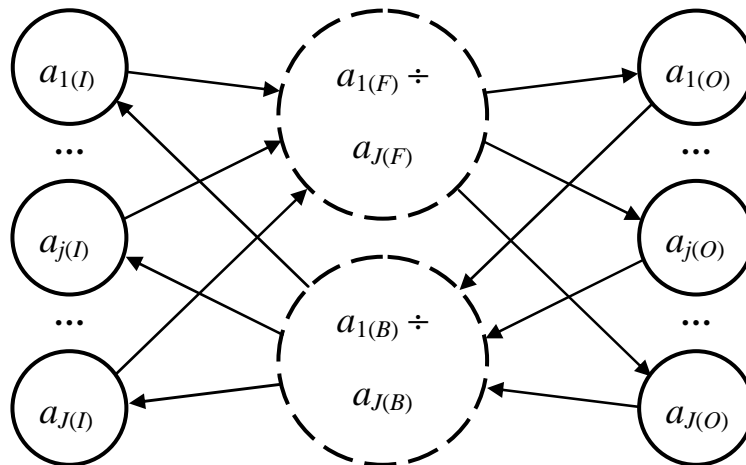


Рис. 2. Обобщенный граф управляющей программы

Полумарковский процесс, приведенный на рис. 2 может быть упрощен и сведен только к состояниям, моделирующим транзакции. Для упрощения выделим из матрицы (5) подматрицу вида:

$$\tilde{h}(t) = \begin{bmatrix} (0) & h_{IF}(t) & h_{IO}(t) \\ (0) & h_{FF}(t) & h_{FF}(t) \\ h_{OI}(t) & (0) & (0) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Подматрица  $\tilde{h}(t)$  определяет часть общего полумарковского процесса, переводящую его из состояний  $A_I = \{a_{1(I)}, \dots, a_{j(I)}, \dots, a_{J(I)}\}$  в состояния  $A_O = \{a_{1(O)}, \dots, a_{j(O)}, \dots, a_{J(O)}\}$ . Время переключения полумарковского процесса (6) из  $a_{j(I)}$  в  $a_{j(O)}$  представляет собой одну из составляющих общего времени чистого запаздывания. Взвешенная плотность распределения указанного времени определяется по зависимости [12, 13]:

$$\tilde{h}_{j(I),j(O)}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathfrak{Z}^{-1} \left[ \mathbf{I}_{j(I)} [\mathfrak{Z}[\tilde{h}(t)]^m \mathbf{I}_{j(O)}^{\theta}] \right], \quad (7)$$

где  $\mathfrak{Z}[\dots]$  - прямое преобразование Фурье;  $\mathfrak{Z}^{-1}$  - обратное преобразование Фурье;  $\theta$  - знак транспонирования;

$$\mathbf{I}_{j(I)} = [0, \dots, 0, \underset{j(I)}{1}, 0, \dots, 0];$$

$$\mathbf{I}_{j(O)} = [0, \dots, 0, \underset{J(I)+J(F)+j(I)}{1}, 0, \dots, 0];$$

Вероятность и плотность распределения времени переключения полумарковского процесса (6) из  $a_{j(I)}$  в  $a_{j(O)}$  равны, соответственно

$$\tilde{p}_{j(I),j(O)} = \int_0^{\infty} \tilde{h}_{j(I),j(O)}(t) dt; \quad (8)$$

$$\tilde{f}_{j(I),j(O)}(t) = \frac{\tilde{h}_{j(I),j(O)}(t)}{\tilde{p}_{j(I),j(O)}}. \quad (9)$$

Для плотности (9) распределения времени переключения из  $a_{j(I)}$  в  $a_{j(O)}$  могут быть найдены начальные и центральные моменты различных порядков, в частности, математическое ожидание и дисперсия:

$$\tilde{T}_{j(I),j(O)} = \int_0^{\infty} t \tilde{f}_{j(I),j(O)}(t) dt; \quad (10)$$

$$\tilde{D}_{j(I),j(O)} = \int_0^{\infty} (t - \tilde{T}_{j(I),j(O)})^2 \tilde{f}_{j(I),j(O)}(t) dt. \quad (11)$$

Для дальнейшего упрощения вычеркнем из матрицы (5) строки и столбцы, обозначенные через  $F$ , получим подматрицу вида:

$$\hat{h}(t) = \begin{bmatrix} (0) & h_{IO}(t) & (0) \\ h_{OI}(t) & (0) & h_{OB}(t) \\ h_{BI}(t) & (0) & h_{OB}(t) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Подматрица  $\hat{h}(t)$  определяет часть общего полумарковского процесса, переводящую его из состояний  $A_O = \{a_{1(O)}, \dots, a_{j(O)}, \dots, a_{J(O)}\}$  в состояния  $A_I = \{a_{1(I)}, \dots, a_{j(I)}, \dots, a_{J(I)}\}$ . Взвешенная плотность распределения времени переключения полумарковского процесса (6) из  $a_{j(O)}$  в  $a_{j(I)}$  определяется по зависимости [12, 13]:

$$\hat{h}_{j(O), j(I)}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathfrak{Z}^{-1} \left[ \mathbf{I}_{j(O)} [\mathfrak{Z}[\hat{h}(t)]]^m \mathbf{I}_{j(I)}^{\theta} \right]. \quad (12)$$

Вероятность и плотность распределения времени переключения полумарковского процесса (6) из  $a_{j(O)}$  в  $a_{j(I)}$  равны, соответственно

$$\hat{p}_{j(O), j(I)} = \int_0^{\infty} \hat{h}_{j(O), j(I)}(t) dt; \quad (13)$$

$$\hat{f}_{j(O), j(I)}(t) = \frac{\hat{h}_{j(O), j(I)}(t)}{\hat{p}_{j(O), j(I)}}. \quad (14)$$

Для плотности (9) распределения времени переключения из  $a_{j(O)}$  в  $a_{j(I)}$  могут быть найдены начальные и центральные моменты различных порядков, в частности, математическое ожидание и дисперсия:

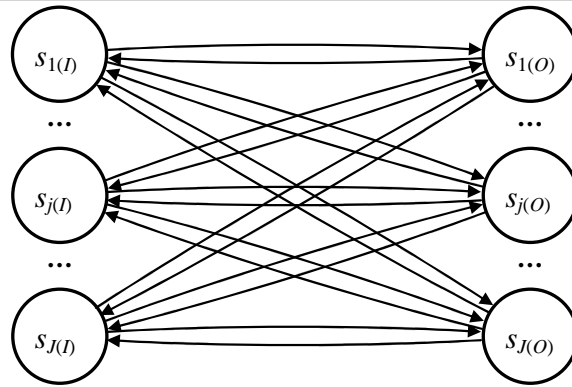
$$\hat{T}_{j(O), j(I)} = \int_0^{\infty} t \hat{f}_{j(O), j(I)}(t) dt; \quad (15)$$

$$\hat{D}_{j(O), j(I)} = \int_0^{\infty} (t - \hat{T}_{j(O), j(I)})^2 \hat{f}_{j(O), j(I)}(t) dt. \quad (16)$$

В результате приведенных упрощений полумарковский процесс (1), со структурой (6), приведенной на рис. 2, преобразуется в процесс (рис. 3)

$$M' = \{S, \mathbf{R}', \mathbf{h}'(t)\}, \quad (17)$$

где  $S = \{s_{1(I)}, \dots, s_{j(I)}, \dots, s_{J(I)}, s_{1(O)}, \dots, s_{j(O)}, \dots, s_{J(O)}\}$  - множество состояний, каждое из которых моделирует либо обращение к датчику ( $s_{j(I)}$ ), либо обращение к исполнительному устройству ( $s_{j(O)}$ );



**Рис. 3. Упрощенный полумарковский процесс, моделирующий работу управляющей программы**

$$\begin{aligned}
 R' &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \\
 h'(t) &= \begin{bmatrix} (0) & h_{IO}(t) \\ h_{OI}(t) & (0) \end{bmatrix}; \\
 h_{IO}(t) &= \begin{bmatrix} \tilde{h}_{1(I),1(O)} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & \tilde{h}_{j(I),j(O)} & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \tilde{h}_{J(I),J(O)} \end{bmatrix}; \\
 h_{OI}(t) &= \begin{bmatrix} \tilde{h}_{1(O),1(I)}(t) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & \tilde{h}_{j(O),j(I)}(t) & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \tilde{h}_{J(O),J(I)}(t) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Полумарковский процесс (17) является эргодическим, а каждое его переключение моделирует либо транзакцию ввода, либо транзакцию вывода данных. Плотность распределения времени запаздывания между вводом и выводом данных определяется в виде:

$$g_{IO}(t) = \frac{\sum_{j(I)=1(I)}^{J(I)} \pi_{j(I)} \sum_{j(O)=1(O)}^{J(O)} h_{j(I),j(O)}(t)}{\sum_{j(I)=1(I)}^{J(I)} \pi_{j(I)}}, \tag{19}$$

где  $\pi_{j(I)}$  - вероятность пребывания полумарковского процесса в состоянии  $s_{j(I)}$  для стороннего наблюдателя.

Известно [10, 11], что для эргодического полумарковского процесса вероятность  $\pi_{j(I)}$  пребывания в состоянии  $s_{j(I)}$  равна

$$\pi_{j(I)} = \frac{T_{j(I)}}{\tau_{j(I)}}, \quad (20)$$

где  $T_{j(I)}$  - математическое ожидание времени пребывания эргодического полумарковского процесса в состоянии  $s_{j(I)}$ ;  $\tau_{j(I)}$  - математическое ожидание времени возврата эргодического полумарковского процесса в состояние  $s_{j(I)}$ ;

$$T_{j(I)} = \sum_{j(O)=1(O)}^{J(O)} \tilde{p}_{j(I),j(O)} \tilde{T}_{j(I),j(O)}; \quad (21)$$

$$\tau_{j(I)} = \frac{\sum_{j(O)=1(O)}^{J(O)} \tilde{p}_{j(I),j(O)} \cdot \tilde{p}_{j(O),j(I)} \left( \tilde{T}_{j(I),j(O)} + T_{j(O),j(I)} \right)}{\sum_{j(O)=1(O)}^{J(O)} \tilde{p}_{j(I),j(O)} \cdot \tilde{p}_{j(O),j(I)}}. \quad (22)$$

Для (19) могут быть найдены числовые характеристики, в частности, математическое ожидание и дисперсия:

$$T_{IO} = \int_0^{\infty} t g_{IO}(t) dt;$$

$$D_{IO} = \int_0^{\infty} (t - T_{IO})^2 g_{IO}(t) dt.$$

Таким образом, в этой статье приведены аналитические математические модели расчета времени запаздывания между вводом данных в ЭВМ и выводом результата. Показано, что при полинге возникает эффект случайности времени между двумя последовательными транзакциями. Плотность распределения указанного времени, а также числовые характеристики могут быть рассчитаны, если процесс интерпретации алгоритма ЭВМ Фон-неймановского типа рассматривать как полумарковский процесс. Учет времени чистого запаздывания, вносимого управляющей ЭВМ, необходим при проектировании систем управления, поскольку рассчитываемый параметр оказывает существенное влияние на качество переходного

го процесса.

### **Список литературы**

1. Ларкин Е.В., Жуликова (Котова) Н.А. Оценка производительности бортовых управляющих ЭВМ // Известия ТулГУ. Сер. Проблемы специального машиностроения. Вып. 5. Ч. 2. Тула: ТулГУ, 2002. С. 266 – 271.
2. Котов В.В., Ларкин Е.В., Устинов Л.А. Основы проектирования наземных комплексов Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. 210 с.
3. Ларкин Е.В., Акименко Т.А., Аршакян А.А. Управление информационными процессами в робототехнических комплексах специального назначения. Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. 150 с.
4. Ивутин А.Н., Ларкин Е.В. Временные и вероятностные характеристики транзакций в цифровых системах управления // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. С. 252 - 258.
5. Ивутин А.Н., Ларкин Е.В. Прогнозирование времени выполнения алгоритма // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 3. Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. С. 301 - 315.
6. Ларкин Е.В. К вопросу об оптимизации времени выполнения алгоритмов // Алгоритмы и структуры систем обработки информации. Тула: ТулГУ, 1995. С. 41 - 48.
7. Ивутин А.Н., Ларкин Е.В. Обобщенная полумарковская модель алгоритма управления цифровыми устройствами // Известия ТулГУ. Сер. Технические науки. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. С. 221 - 228.
8. Ларкин Е.В., Гулимов М.В. Метод построения статических моделей процесса стохастической дискретизации по времени цифровых систем управления // Известия ТулГУ. Сер. Проблемы специального машиностроения. Вып. 4. Ч. 2. Тула: ТулГУ, 2001. С. 8 – 12.
9. Ларкин Е.В., Гулимов М.В. Стохастическая дискретизация при цифровом управлении объектами // Известия ТулГУ. Сер. Вычислительная техника. Автоматика. Управление. Т. 3. Вып. 1. Вычислительная техника. Тула: ТулГУ, 2001. С. 11 - 15.
10. Игнатьев В.М., Ларкин Е.В. Анализ производительности ЭВМ. Тула: Тула: ТГТУ, 1994. 104 с.
11. Игнатьев В.М., Ларкин Е.В. Сети Петри-Маркова. Тула: ТулГУ, 1997. 163 с.
12. Ларкин Е.В., Гулимов М.В. Вероятностный анализ цифровых систем управления со случайным периодом дискретизации // Известия ТулГУ. Сер. Проблемы специального машиностроения. Вып. 4. Ч. 2. Тула: ТулГУ, 2001. С. 12 - 16.
13. Ларкин Е.В. К вопросу о расчете временных характеристик сетей Петри-Маркова // Известия Тульского государственного университета. Сер. Вычислительная техника. Автоматика. Управление. Т. 1. Вып. 1. Вы-



числительная техника. Тула: ТулГУ, 1997. С. 68 - 75.

Аршакян Александр Агабегович канд. техн. наук, докторант, [elarkin@mail.ru](mailto:elarkin@mail.ru), Россия, Тула, Тульский государственный университет,

Ларкин Евгений Васильевич, зав. кафедрой, докт. техн. наук, проф., [elarkin@mail.ru](mailto:elarkin@mail.ru), Россия, Тула, Тульский государственный университет,

Савин Максим Леонидович, асп., [elarkin@mail.ru](mailto:elarkin@mail.ru), Россия, Тула, Тульский государственный университет

#### ESTIMATION OF TIME DELAY WHEN INSERTING OF A COMPUTER TO THE FEEDBACK CIRCUIT

A.A. Arsakyan, E.V.Larkin, M.L. Savin

*The problem of determining the time delay between data input to a computer and output of control signal on the executive device, when computer is inserted to the feedback contour is solved. The control algorithm is considered as a cyclical one without looping. Semi-Markov model of transactions generation for considered specific case is worked out. It is shown, that when polling is organized then effect of randomization of time between two consecutive transactions takes place. The dependences for the density, the expectation and the variance of time lag are obtained.*

*Key words: computer, control algorithm, feedback, input data, output data, semi-Markov process, lag, polling, transaction*

*Arshakyan Alexander Agabegovich, candidate of technical science, postgraduate, [elarkin@mail.ru](mailto:elarkin@mail.ru), Russia, Tula, Tula State University,*

*Larkin Eugene Vasilyevich, head of chair, doctor of technical science, professor, [elarkin@mail.ru](mailto:elarkin@mail.ru), Russia, Tula, Tula State University,*

*Savin Maxim Leonidovich, postgraduate, [elarkin@mail.ru](mailto:elarkin@mail.ru), Russia, Tula, Tula State University*