УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЦАГИ

Том XV 1984 № 5

УДК 517.9 : 532.5 : 533.7

СИЛЬНО НЕЯВНЫЙ ПОПЕРЕМЕННО-ТРЕУГОЛЬНЫЙ МЕТОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ *B*-СПЛАЙНОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Казаков

На основе метода неполной факторизации разрабатывается абсолютно устойчивый, сильно неявный алгоритм с применением *B*-сплайнов для решения уравнений Навье—Стокса в переменных вихрь — функция тока. Основными особенностями метода являются полная связь граничных условий для искомых функций, большая скорость сходимости и повышенная точность численного решения. В качестве примеров решается уравнение Лапласа и рассчитывается течение вязкой жидкости в каверне.

Большинство методов решения уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости являются итерационными, а уравнения для вихря и функции тока или для скорости и давления решаются отдельно по явным или неявным схемам. При этом возникает необходимость так или иначе задавать физически неопределенные значения вихря или давления на твердой поверхности, что приводит к дополнительному процессу и значительно снижает устойчивость и скорость сходимости численного решения (см., например, [1, 2]). Преодолению этой трудности способствовало введение «искусственной сжимаемости» [3, 4]. Развитие этой идеи описывается в [5]. Получающаяся система решается с помощью расщепления по физическим переменным, что в общем также требует итерационного расчета поля скоростей и поля давления.

В работе [6] предложен сильно неявный метод, в котором функция тока и вихрь связаны на границе, а уравнения движения, аппроксимируемые с помощью центральных разностей со вторым порядком точности, решаются совместно. Данный алгоритм основывается на сильно неявном попеременно-треугольном методе неполной факторизации, предложенном для решения параболических и эллиптических уравнений [7—11] и развитого в других работах (указания на них имеются в [6]). В [12] этим методом отдельно решались уравнения для вихря и функции тока в задаче о расчете течения вязкой жидкости около цилиндра. И в этом случае численное решение получалось в 2,5 раза быстрее, чем, например, при использовании метода переменных направлений. Совместное решение уравнений сильно неявным попеременно-треугольным методом еще более эффективно: повышается

устойчивость схемы, становится возможным вести расчеты с большим шагом по времени (до 10^6), число итераций уменьшается в десятки раз.

Дальнейшее улучшение свойств численных схем может быть связано с увеличением точности аппроксимационных формул. В настоящей работе разрабатывается сильно неявный метод, в котором приближенное решение ищется в виде двумерных кубических сплайнов, представленных через B-сплайны [13]. Как показано, например, в [14—17], применение сплайнов позволяет получать более точное решение и использовать более крупные сетки. Кроме того, существенно облегчается постановка граничных условий, связанных с производными. Число итераций и время счета уменьшаются. Основным недостатком описываемого алгоритма является необходимость дополнительных массивов для обращения матрицы.

1. Рассмотрим сначала сильно неявный метод для уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$ в прямоугольнике с расчетной сеткой $x_0<x_1<\ldots<x_N$, $y_0<y_1<\ldots<y_K$. Приближенное решение будем искать в виде кубического сплайна, представленного через B-сплайны. Для их построения дополним исходную сетку узлами с симметричными относительно x_0 и x_N значениями x:

$$x_{-3}<x_{-2}<x_{-1}<x, \quad x_N<x_{N+1}<x_{N+2}<x_{N+3},$$

и аналогично по оси y. Обозначим систему B-сплайнов на сетке $\{x_i\}$ через $B_i(x)$, $i=-1, 0, \ldots, N$, на сетке $\{y_j\}$ через $B_j(y)$, $j=-1, 0, \ldots, K+1$. Для функции $u(x, y)$ можно записать

$$u(x, y)\approx\sum_{i=-1}^{N+1}\sum_{j=-1}^{K+1}\beta_{ij}B_i(x)B_j(y). \tag{1}$$

Значения приближенного решения уравнения в точке (x_i, y_j) обозначим u_{ij}. Так как каждый B-сплайн $B_i(x)$ отличен от нуля лишь на интервале (x_{i-2}, x_{i+2}) [аналогично и для $B_j(y)$], то

$$u_{ij}=\sum_{l=-1}^{1}\sum_{m=-1}^{1}\beta_{i+l,\,j+m}B_{i+l}(x_i)B_{j+m}(y_j).$$

Таким же образом представляются производные $(u_x)_{ij}$, $(u_{xx})_{ij}$ и т. д. Удовлетворяя уравнению в узлах сетки, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов β_{ij}, которые по формуле (1) определяют приближенное решение:

$$\sum_{l=-1}^{1}\sum_{m=-1}^{1}\beta_{i+l,\,j+m}\left[B''_{i+l}(x_i)\,B_{j+m}(y_j)+B_{i+l}(x_i)B''_{j+m}(y_j)\right]=0, \tag{2}$$

$$i=1, 2, \ldots, N-1, \; j=1, 2, \ldots, K-1.$$

В общем случае вместо (2) можно рассмотреть систему уравнений относительно неизвестных Φ_{ij} следующего вида:

$$A_1\Phi_{i-1,\,j-1}+A_2\Phi_{i,\,j-1}+A_3\Phi_{i+1,\,j-1}+A_4\Phi_{i-1,\,j}+A_5\Phi_{ij}+$$
$$+A_6\Phi_{i+1,\,j}+A_7\Phi_{i-1,\,j+1}+A_8\Phi_{i,\,j+1}+A_9\Phi_{i+1,\,j+1}=Q_{ij}. \tag{3}$$

Здесь у коэффициентов A_1-A_9 индексы i, j опущены, для уравнения Лапласа $Q_{ij}=0$.

Определим вектор $\Phi = (\Phi_{00}, \Phi_{10}, \ldots, \Phi_{N0}, \Phi_{01}, \ldots, \Phi_{NK})^T$ и аналогично вектор Q. Тогда данную систему можно записать в матричной форме

$$\boldsymbol{A}\Phi = Q, \tag{4}$$

где матрица $\boldsymbol{A}$ имеет вид, показанный на рис. 1.

Прибавив к обеим частям уравнения (4) вектор $\boldsymbol{P}\Phi$, получим общую итерационную схему

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{P})\Phi^{n+1} = Q + \boldsymbol{P}\Phi^n. \tag{5}$$

Матрица $\boldsymbol{P}$ выбирается таким образом, чтобы матрица $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{P}$ факторизовалась — представлялась в виде произведения нижней $\boldsymbol{L}$ и верхней $\boldsymbol{U}$ треугольных разреженных матриц: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{LU}$. В результате получается система

$$\boldsymbol{LU}\Phi^{n+1} = Q' = Q + \boldsymbol{P}\Phi^n, \tag{6}$$

которая решается за два шага:

$$\boldsymbol{LZ} = Q', \quad \boldsymbol{U}\Phi^{n+1} = \boldsymbol{Z}.$$

Матрица $\boldsymbol{P}$ должна удовлетворять требованиям, чтобы при факторизации сохранялась определенная доля неявности по каждой координате, а также чтобы составляющие вектора $P\Phi$ были малы и стремились к нулю при уменьшении шага сетки [9]. Для этого определим

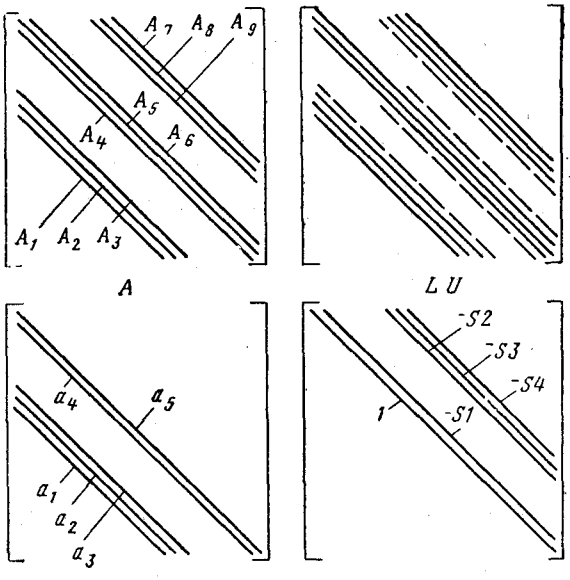


Рис. 1

матрицу $\boldsymbol{L}$ так, чтобы ее ненулевые элементы находились на тех же диагоналях, что и в нижней части исходной матрицы $\boldsymbol{A}$ (рис. 1). Аналогично составим верхнюю матрицу $\boldsymbol{U}$. Таким образом, получается следующий алгоритм решения системы (6):

$$\left.\begin{aligned} Z_{ij} &= a_5^{-1}(Q'_{ij} - a_1 Z_{i-1,\,j-1} - a_2 Z_{i,\,j-1} - a_3 Z_{i+1,\,j-1} - a_4 Z_{i-1,\,j}), \\ \Phi_{ij} &= Z_{ij} + S1_{ij}\Phi_{i+1,\,j} + S2_{ij}\Phi_{i-1,\,j+1} + S3_{ij}\Phi_{i,\,j+1} + S4_{ij}\Phi_{i+1,\,j+1}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Рекуррентные соотношения для коэффициентов $a_1 - a_5$, $S1_{ij}$ — $S4_{ij}$ и Z_{ij} приведены в приложении.

Произведение $\boldsymbol{LU}$ содержит ненулевые элементы также на дополнительных диагоналях, которых нет в $\boldsymbol{A}$ (см. рис. 1.). Обозначим матрицу с этими ненулевыми диагоналями $\boldsymbol{S}'$. Ее элементы являются коэффициентами в выражении $LU\Phi$ при неизвестных $\Phi_{i+2,\, j-1}$, $\Phi_{i-2,\, j}$, $\Phi_{i+2,\, j}$, $\Phi_{i-2,\, j+1}$, что легко увидеть, выразив Z_{ij} из второго уравнения (7) и подставив соответствующие значения в первое уравнение. Сравнение результата данной подстановки с уравнением (3) показывает, что исходный девятиточечный шаблон расширился. Разложив получившиеся неизвестные в ряд Тейлора с точностью $O(\Delta x + \Delta y)$ относительно ближайших неизвестных Φ с ненулевыми коэффициентами матрицы $\boldsymbol{A}$, которые входят в уравнение (3), получим $S'\Phi = S\Phi + O(\Delta x + \Delta y)$.

Положив $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}' - \alpha \boldsymbol{S}$, где α — итерационный параметр, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, будем иметь следующую систему для нахождения элементов матриц $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU} - (\boldsymbol{S}' - \alpha \boldsymbol{S}).$$

Вместо системы (6) целесообразнее решать уравнения относительно приращения $\Delta\Phi = \Phi^{n+1} - \Phi^n$:

$$\boldsymbol{LU}\Delta\Phi = G = Q - \boldsymbol{A}\Phi^n. \tag{8}$$

2. Уравнения Навье—Стокса для вязкой несжимаемой жидкости в переменных вихрь ω — функция тока Ψ имеют вид

$$\omega_t + u\omega_x + v\omega_y = \mathrm{Re}^{-1}(\omega_{xx} + \omega_{yy}), \tag{9}$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \omega, \tag{10}$$

где $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$.

Численное решение этих уравнений приближенно представим с помощью сплайнов

$$\left.\begin{aligned} \omega(x, y) &\approx \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{K=1} \alpha_{ij} B_i(x) B_j(y), \\ \psi(x, y) &\approx \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{K+1} \beta_{ij} B_i(x) B_j(y). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Воспользуемся неявной схемой

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} + (u\omega_x)^{n+1} + (v\omega_y)^{n+1} = \frac{1}{\mathrm{Re}}(\omega_{xx}^{n+1} + \omega_{yy}^{n+1}),$$

$$\psi_{xx}^{n+1} + \psi_{yy}^{n+1} = \omega^{n+1}.$$

Нелинейные конвективные члены квазилинеаризуем, сохранив тем самым члены с производными от функции ψ на $(n+1)$-м временно́м слое. Удовлетворяя эти уравнения в узлах сетки и используя выражения (11) для ω и ψ, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{ij}, β_{ij} следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{l=-1}^{1} \sum_{m=-1}^{1} A_{l+3m+5}^{11} \alpha_{i+l,\, j+m} + A_{l+3m+5}^{12} \beta_{i+l,\, j+m} = Q_{ij}^1, \\ &\sum_{l=-1}^{1} \sum_{m=-1}^{1} A_{l+3m+5}^{21} \alpha_{i+l,\, j+m} + A_{l+3m+5}^{22} \beta_{i+l,\, j+m} = Q_{ij}^2. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Введя векторы $\Phi_{ij}=(\alpha_{ij}, \beta_{ij})^T$, $Q_{ij}=(Q^1_{ij}, Q^2_{ij})^T$ и матрицы коэффициентов

$$A_l=[A_l^{k,p}]=\begin{bmatrix} A_l^{11} & A_l^{12} \\ A_l^{11} & A_l^{22} \end{bmatrix}, \quad l=1, 2, \ldots, 9, \quad k, p=1, 2,$$

систему (12) можно записать в матричном виде аналогично (3)

$$\sum_{l=-1}^{1} \sum_{m=-1}^{1} A_{l+3m+5}\, \Phi_{i+l,\, j+m} = Q_{ij} \tag{13}$$

и решать ее сильно неявным попеременно-треугольным методом, как было описано выше. Двухшаговый алгоритм дает решение

$$\Delta\Phi_{ij} = Z_{ij} + S1_{ij}\,\Delta\Phi_{i+1,\, j} + S2_{ij}\,\Delta\Phi_{i-1,\, j} + S3_{ij}\,\Delta\Phi_{i,\, j+1} + S4_{ij}\,\Delta\Phi_{i+1,\, j+1}.$$

Рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов приведены в приложении.

В данном алгоритме требуется 18 вспомогательных двумерных массивов коэффициентов — в два раза больше, чем для сильно неявного метода с аппроксимацией с помощью центральных разностей [6]. Однако благодаря высокой точности приближения с помощью сплайнов общее количество расчетных точек можно уменьшить в четыре раза. В результате общий объем памяти сокращается, стационарное решение получается за небольшое число итераций, а время счета невелико.

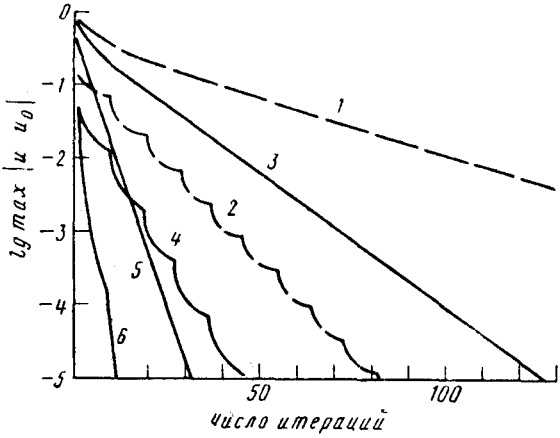
3. В качестве примера решалось уравнение Лапласа в квадрате $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ с заданными граничными значениями функции. Для полного определения сплайна необходимо также второе краевое условие, например задание нормальной второй производной, которую можно выразить из уравнения. Так, при $y=0$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{l=-1}^{1} \sum_{m=-1}^{1} \beta_{i+l,\, m} B_{i+l}(x_i)\, B_m(0) = u_{i\,0}, \\ &\sum_{l=-1}^{1} \sum_{m=-1}^{1} \beta_{i+l,\, m} B_{i+l}(x_i)\, B''_m(0) = (u_{yy})_{i\,0}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Из этих уравнений исключаются коэффициенты $\beta_{i,-1}$ и таким образом получаются замыкающие уравнения для системы (2). Начальное приближение полагалось нулевым.

Скорость сходимости зависит от значений итерационного параметра α. Наименьшая скорость получается при постоянном α. На рис. 2 показана сходимость численного решения u к точному решению u_0, $\max u_0=1$. При $\alpha=0$ на равномерной сетке с числом 15×15 численное решение через 18—25 итераций отличается от точного на 10^{-3}—10^{-4}; на сетке 30×30 — через 70—100 итераций. При циклическом равномерном уменьшении с итерациями величины α от $\alpha_9=1$ до $\alpha_1=0$ сходимость в несколько раз быстрее: для сетки 15×15 точность 10^{-3}—10^{-4} достигается за 5—9 итераций, на сетке 30×30 — за 20—30 итераций.

Благодаря лучшей аппроксимации с помощью сплайнов скорость сходимости численного решения к точному оказывается значительно выше, чем с использованием той же схемы с центральными разностями (рис. 2). При $\alpha=0$ на сетке 30×30 указанная выше точность конечно-разностного решения достигается за 160—220 итераций.



——————— — B-сплайны, — — — — конечные разности; 1 — 4 — сетка 30×30; 5, 6 — 15×15; 1, 3, 5 — $\alpha = 0$; 2, 4, 6 — равномерное распределение α_0, α_3, ..., α_1, $0 < \alpha_i < 1$

Рис. 2

Используя сплайны, можно получать приближенное решение той же точности, что и с конечными разностями, но на сетке с числом узлов, по каждому направлению в два раза меньшим [14]. Поэтому, хотя время счета на одной итерации для схемы с B-сплайнами в два-три раза больше, чем с конечными разностями, производя вычисления на более крупной сетке, можно сократить общее время счета в 13 раз. На вычислительной машине с быстродействием 1 млн. операций в секунду на сетке 30×30 на одну итерацию затрачивается около 1 с.

4. Уравнения Навье—Стокса решались в задаче о расчете течения в квадратной каверне. Жидкость приводится в движение за счет вязкости верхней стенкой, которая перемещается со скоростью $u=1$. На остальных стенках $u=v=0$. Таким образом, для функции ψ можно записать граничные условия вида (14). Значения вихря и функции тока на стенках в сильно неявном методе связываются точно с помощью уравнения (10). Например, на нижней стенке

$$\omega_{i0} = (\psi_{yy})_{i0},$$

откуда

$$\sum_{l=-1}^{1} \sum_{m=-1}^{1} \left[\alpha_{i+l,\,m}^{n+1} B_{i+l}(x_i) B_m(y_0) - \beta_{i+l,\,m}^{n+1} B_{i+l}(x_i) B_m''(y_0) \right] = 0.$$

Второе условие для исключения величин α_{i-1} получается из уравнения для ω и условия прилипания.

В начальный момент принималось $\omega=\psi=0$.

Расчеты проводились на сетках 14×14 и 28×28 для чисел Re=10, 100, 400 при $\Delta t=1$, 10, 10^6. При Re=400 первые 10 шагов делались с условием проскальзывания на движущейся стенке. Полученные решения близки к известным (см., например, [6, 14, 17]). При больших Δt решение получалось менее точным. Установление решения ($|\Delta\omega/\omega| < 10^{-3}$) для Re=100 на равномерной сетке 14×14 достигалось за 19 итераций, для Re=400 на неравномерной сетке 28×28 с минимальным шагом около стенки 0,02 и $\Delta t=1$ — за 49, — значительно быстрее, чем

другими методами [1, 6, 14, 15, 16, 17], в которых требуются сотни итераций. Время счета составляло 0,5—5 мин. Сокращение числа итераций на порядок происходит благодаря сильной неявности метода, связи ω и ψ на границах и высокой точности аппроксимации функций сплайнами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Рекуррентные формулы для решения систем (3), (8):

$$a_1 = A_1,\ a_2 = A_2 + a_1 S1_{i-1,\, j-1},$$

$$a_3 = (1 - \alpha S1_{i+1,\, j-1})^{-1} (A_3 + a_2 S1_{i,\, j-1}),$$

$$a_4 = A_4 + a_1 (S3_{i-1,\, j-1} + \alpha S2_{i-1,\, j-1}) + a_2 S2_{i,\, j-1},$$

$$a_5 = A_5 + a_1 S4_{i-1,\, j-1} + a_2 S3_{i,\, j-1} + a_3 S2_{i+1,\, j-1} + a_4 S1_{i-1,\, j},$$

$$S1_{ij} = a_5^{-1} [A_6 + a_2 S4_{i,\, j-1} + a_3 (S3_{i+1,\, j-1} + \alpha S4_{i+1,\, j-1})],$$

$$S2_{ij} = a_5^{-1} [A_7 + a_4 (S3_{i-1,\, j} + \alpha S2_{i-1,\, j})],$$

$$S3_{ij} = a_5^{-1} (A_8 + a_4 S4_{i-1,\, j}),\ S4_{ij} = a_5^{-1} A_9,$$

$$Z_{ij} = a_5^{-1} (G_{ij} - a_1 Z_{i-1,\, j-1} - a_2 Z_{i,\, j-1} - a_3 Z_{i+1,\, j-1} - a_4 Z_{i-1,\, j}).$$

2. Решение систем (12), (13) для уравнений производится с помощью приведенных выше формул, в которых коэффициенты теперь являются матрицами:

$$A_l = [A_l^{k,\, p}],\ l = 1,\ 2, \ldots,\ 9,\ a_l = [a_l^{k,\, p}],\ l = 1,\ 2, \ldots,\ 5,$$

$$S1_{ij} = [S1_{ij}^{k,\, p}], \ldots,\ S4_{ij} = [S4_{ij}^{k,\, p}],\ k,\ p = 1,\ 2,$$

$$Z_{ij} = (Z_{ij}^1,\ Z_{ij}^2)^T,\ (G_{ij} = G_{ij}^1,\ G_{ij}^2)^T.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Burgraff O. R. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. — J. Fluid Mech., 1966, vol. 24, p. 1.
2. Дайковский А. Г., Полежаев В. И., Федосеев А. И. О расчете граничных условий для нестационарных уравнений Навье—Стокса в переменных «вихря, функции тока». — В сб.: Численные методы механики сплошной среды, 1979, т. 10, № 2.
3. Владимирова Н. Н., Кузнецов Б. Г., Яненко Н. Н. Численные расчеты симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости. — В сб.: Некоторые вопросы вычисл. и прикл. матем. Новосибирск, СО АН СССР, 1966.
4. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. — J. Comput. Phys., 1967, vol. 2, N 1.
5. Белоцерковский О. М., Гущин В. А., Щенников В. В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 1.
6. Rubin S. G., Khosla P. K. Navier—Stokes calculations with a coupled strongly implicit method. Part 1: Finite-difference solutions. — AIAA Paper, N 0011, 1979.
7. Булеев Н. И. Численный метод решения двумерных и трехмерных уравнений диффузии. — Матем. сб., 1960, т. 51, № 2.
8. Булеев Н. И. Метод неполной факторизации для решения двумерных и трехмерных уравнений типа диффузии. — Ж. вычисл. матем. и математ. физ., 1970, т. 10, № 4.

9. Stone H. L. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial equations. — SIAM J. Numer. Anal., 1968, vol. 5.

10. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

11. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1980.

12. Lin C. L., Pepper D. W., Lee S. C. Numerical methods for separated flow solutions around a circular cylinder. — AIAA J., 1976, vol. 14, N 7.

13. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.

14. Rubin S. G., Graves R. A. Viscous flow solutions with a cubic spline approximation. — Int. J. Comp. and Fluids, 1975, vol. 3, N 1.

15. Rubin S. G., Khosla P. K. Navier—Stokes calculations with a coupled strongly implicit method. Part II: spline differred-corrector solutions. Lecture Notes in Math., N 771, Berlin efc., Springer—Verbog, 1980.

16. Казаков В. А. Применение сплайнов к численному решению уравнений Навье—Стокса при больших числах Рейнольдса. — Ученые записки ЦАГИ, 1982, т. XIII, № 5.

17. Казаков В. А. Расчет течения вязкой жидкости с помощью *B*-сплайнов. — Ученые записки ЦАГИ, 1983, т. XIV, № 4.

Рукопись поступила 22/III 1983 г.