

## ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ МЯГКОЙ АРМИРОВАННОЙ НИЯМИ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ\*

*Е. В. Полякова<sup>1</sup>, П. Е. Товстик<sup>2</sup>, С. Б. Филиппов<sup>3</sup>*

1. С.-Петербургский государственный университет технологии и дизайна,  
д-р техн. наук, профессор, ekpol@mail.ru

2. С.-Петербургский государственный университет,  
д-р физ.-мат. наук, профессор, peter.tovstik@mail.ru

3. С.-Петербургский государственный университет,  
д-р физ.-мат. наук, профессор, s\_b\_filippov@mail.ru

**1. Введение.** Рассматривается осесимметричная деформация тороидальной оболочки, образованной сворачиванием в тор мягкой цилиндрической оболочки длины  $L$  и радиуса  $R$ . Оболочка подкреплена равномерной сетью из двух систем нитей, расположенных по параллелям и меридианам. В нерастянутом положении длины всех нитей, расположенных по параллелям и меридианам, соответственно равны  $L$  и  $2\pi R$ . Торобразная оболочка находится под действием внутреннего давления. Данная работа является продолжением работы [1]. В отличие от [1] учитывается как жесткость на растяжение нитей, так и жесткость самой оболочки, которые считаются нелинейно упругими. Как и в [1], предполагаем, что нити расположены достаточно часто, поэтому после осреднения получаем двухмерную упругую среду, которая является мягкой оболочкой. Теория мягких оболочек описана в работах [2–4], в [4, 5] рассматриваются мягкие оболочки, образованные системами нитей.

Основная особенность мягкой оболочки заключается в том, что она не выдерживает сжимающих напряжений. В связи с этим при ее деформации могут появляться зоны с одноосным напряженным состоянием. В частности, в рассматриваемых ниже задачах в равновесном положении все нити, идущие по меридианам, натянуты, а часть нитей, идущих по параллелям, может быть ненатянутой.

**2. Основные уравнения.** Введем обозначения:  $s_0$  — длина дуги меридиана до деформации, отсчитываемая от крайнего правого положения  $O$  (основная независимая переменная),  $0 \leq s_0 \leq l$ ;  $s(s_0)$  — длина дуги после деформации;  $r(s_0)$  — радиус параллели;  $\hat{z}(s_0)$  — высота параллели над точкой  $O$ ;  $\lambda_1(s_0)$ ,  $\lambda_2(s_0)$  — кратности удлинений меридианов и параллелей. Имеют место геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{ds}{ds_0}, & \lambda_2 &= \frac{r}{R}, & R &= \frac{L}{2\pi}, \\ \frac{dr}{ds} &= -\sin \theta, & \frac{d\hat{z}}{ds} &= \cos \theta, & \frac{1}{R_1} &= \frac{d\theta}{ds}, & \frac{1}{R_2} &= \frac{\cos \theta}{r}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $R_1$ ,  $R_2$  — радиусы кривизны поверхности,  $\theta$  — угол между касательной к меридиану и вертикальным направлением (рис. 1).

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10.01.00240а) и Федерального агентства по образованию Минобрнауки РФ (проект 2.1.2./13091).

© Е. В. Полякова, П. Е. Товстик, С. Б. Филиппов, 2011

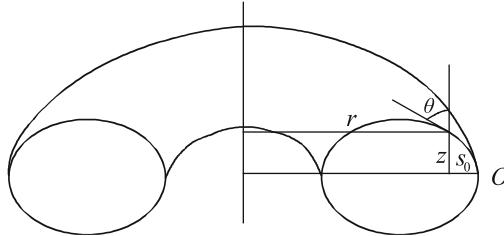


Рис. 1. Тороидальная оболочка.

Уравнения равновесия в проекции на касательную к меридиану и нормаль к оболочке дают

$$\frac{d(rT_1)}{ds} + T_2 \sin \theta = 0, \quad \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = q, \quad (2.2)$$

где  $q$  — внутреннее давление, а усилия  $T_1$  и  $T_2$  отнесены к единице длины после деформации. Эти усилия складываются из сил натяжения нитей и усилий, возникающих при деформации оболочки.

Как оболочку, так и нити считаем изготовленными из нелинейно упругих несжимаемых однородных изотропных материалов с упругими потенциалами [6, 7]

$$G_i \Phi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

где  $G_i$  — константы материала, в общем случае различные для нитей и оболочки. В случае малых деформаций  $G_i$  — модуль сдвига. Для нитей, идущих по меридианам и параллелям, считаем  $i = 1$  и  $i = 2$  соответственно, а для материала оболочки —  $i = 3$ .

Примем, что нити находятся в одноосном напряженном состоянии. Тогда для нитей, идущих по меридианам, с учетом несжимаемости материала ( $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ ) имеем  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2}$  и потенциал (2.3) принимает вид

$$G_1 \Phi_1(\lambda_1, \lambda_1^{-1/2}, \lambda_1^{-1/2}) = G_1 \hat{\Phi}_1(\lambda_1), \quad (2.4)$$

а сила натяжения нитей

$$T_1^f = S_1 G_1 \frac{d\hat{\Phi}_1}{d\lambda_1}, \quad (2.5)$$

где  $S_1$  — площадь поперечного сечения нитей до деформации.

Для нитей, идущих по параллелям, в формулах (2.4) и (2.5) индекс 1 следует заменить на 2.

Для участков оболочки, находящихся в условиях плоского напряженного состояния, потенциал (2.3) принимает вид

$$G_3 \Phi_3(\lambda_1, \lambda_2, (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}) = G_3 \hat{\Phi}_3(\lambda_1, \lambda_2), \quad (2.6)$$

и истинные напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_i = \lambda_i G_3 \frac{\partial \hat{\Phi}_3}{\partial \lambda_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.7)$$

Теперь усилия, входящие в уравнения (2.2), равны

$$T_1 = \frac{G_3 h_0}{\lambda_2} \frac{\partial \hat{\Phi}_3}{\partial \lambda_1} + \frac{G_1 N_1 S_1}{\lambda_2} \frac{d\hat{\Phi}_1}{d\lambda_1}, \quad T_2 = \frac{G_3 h_0}{\lambda_1} \frac{\partial \hat{\Phi}_3}{\partial \lambda_2} + \frac{G_2 N_2 S_2}{\lambda_1} \frac{d\hat{\Phi}_2}{d\lambda_2}, \quad (2.8)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — число нитей (на единицу длины в поперечном направлении) в положении до деформации для меридианов и параллелей соответственно,  $h_0$  — толщина оболочки до деформации.

Если на некотором участке формула (2.8) дает  $T_2 < 0$ , то на этом участке реализуется одноосное напряженное состояние и в соответствии с гипотезами мягких оболочек в системе (2.2) следует считать  $T_2 = 0$ .

Найдем массу газа  $m$ , заключенного внутри тора. Предположим, что заполнение оболочки происходит при постоянной температуре. Тогда в соответствии с законом Бойля—Мариотта величина  $m$  пропорциональна произведению давления газа  $p$  на объем  $v$ , заключенный внутри оболочки после деформации:

$$m = kp v = k(p_0 + q)v, \quad v = -2\pi \oint r \hat{z} dr, \quad (2.9)$$

где  $p_0$  — атмосферное давление,  $k$  — коэффициент пропорциональности, а интегрирование осуществляется по контуру меридионального сечения.

**3. Безразмерные переменные.** Для удобства интегрирования системы уравнений, приведенных в п. 2, введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} z &= \frac{\hat{z}}{R}, \quad s_0 = \rho\varphi, \quad \rho = \frac{l}{2\pi}, \quad \mu = \frac{\rho}{R}, \quad Q = \frac{qR}{G_0 h_0}, \quad P_0 = \frac{p_0 R}{G_0 h_0}, \\ t_1 &= \frac{T_1 \lambda_2}{G_0 h_0}, \quad t_2 = \frac{T_2 \lambda_1}{G_0 h_0}, \quad g_i = \frac{G_i N_i S_i}{G_0 h_0}, \quad i = 1, 2, \quad g_3 = \frac{G_3}{G_0}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $G_0$  — произвольно задаваемый модуль сдвига,  $\mu < 0.5$ , а параметры  $g_i$  характеризуют относительную жесткость нитей по сравнению с оболочкой. При этом без нарушения общности за счет выбора  $G_0$  любая из величин  $g_i$  может быть принята равной 1.

Считая основными неизвестными величины  $\theta(\varphi), t_1(\varphi), \lambda_2(\varphi), z(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , запишем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{\mu}{t_1} (\lambda_1 \lambda_2 Q - \hat{t}_2 \cos \theta), & \frac{dt_1}{d\varphi} &= -\mu \hat{t}_2 \sin \theta, \\ \frac{d\lambda_2}{d\varphi} &= -\mu \lambda_1 \sin \theta, & \frac{dz}{d\varphi} &= \mu \lambda_1 \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$t_1 = f_1(\lambda_1, \lambda_2) = g_3 \frac{\partial \hat{\Phi}_3}{\partial \lambda_1} + g_1 \frac{d\hat{\Phi}_1}{d\lambda_1}, \quad t_2 = g_3 \frac{\partial \hat{\Phi}_3}{\partial \lambda_2} + g_2 \frac{d\hat{\Phi}_2}{d\lambda_2}, \quad \hat{t}_2 = \max\{t_2, 0\}. \quad (3.3)$$

При численном интегрировании системы (3.2) при вычислении правых частей приходится находить величину  $\lambda_1$  из уравнения  $t_1 = f_1(\lambda_1, \lambda_2)$ .

В силу симметрии задачи относительно плоскости  $z = 0$  при отыскании периодического решения системы (3.2) достаточно удовлетворить граничным условиям

$$\theta(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \theta(\pi) = \pi, \quad z(\pi) = 0. \quad (3.4)$$

В безразмерных переменных величина (2.9) равна

$$m = 4\pi k R^2 G_0 h_0 (P_0 + Q) V, \quad V = - \int_0^\pi z \lambda_2 \frac{d\lambda_2}{d\varphi} d\varphi. \quad (3.5)$$

Рассмотрим частный вид упругих потенциалов в (2.3). Пусть функции  $\Phi_i$  одинаковы и имеют вид

$$\Phi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.6)$$

что соответствует неогуковскому потенциальному [7]. Тогда безразмерные усилия  $t_1, t_2$  будут равны

$$t_1 = f_1 = g_3 \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} \right) + g_1 \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right), \quad t_2 = g_3 \left( \lambda_2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^3} \right) + g_2 \left( \lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2^2} \right). \quad (3.7)$$

Функция  $f_1(\lambda_1, \lambda_2)$  является монотонно возрастающей функцией  $\lambda_1$ , поэтому уравнение  $t_1 = f_1(\lambda_1, \lambda_2)$  относительно  $\lambda_1$  имеет единственное решение.

Если в системе (3.2) за счет выбора  $G_0$  положить

$$g_1 = \frac{1}{3}, \quad g_2 = \frac{\eta}{3}, \quad g_3 = 0, \quad \lambda_i = 1 + \varepsilon_i, \quad \lambda_i - \frac{1}{\lambda_i^2} \simeq 3\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.8)$$

то эта система перейдет в рассмотренную в [1] систему, описывающую деформацию торообразной оболочки с нитями, в которой нити деформируются по линейному закону, а жесткость оболочки игнорируется.

**4. Алгоритм численного интегрирования и некоторые результаты.** Используем тот же алгоритм пристрелки в сочетании с движением по параметру, что и в [1, 8]. Задавая величины  $\lambda_2^0$  и  $t_1^0$ , численно решаем задачу Коши для системы уравнений (3.2) с начальными условиями

$$\theta(0) = 0, \quad t_1(0) = t_1^0, \quad \lambda_2(0) = \lambda_2^0, \quad z(0) = 0. \quad (4.1)$$

После этого величины  $\lambda_2^0$  и  $t_1^0$  определяем из уравнений

$$\theta(\pi) = \pi, \quad z(\pi) = 0. \quad (4.2)$$

Пусть нити, идущие вдоль меридианов и параллелей, одинаковы, т. е. возьмем  $g_1 = g_2$ . Для удобства сравнения относительного влияния жесткости нитей и самой оболочки будем считать, что  $g_1 + g_3 = 1$ . Возьмем  $\mu = 0.3$  и рассмотрим три случая:

$$(1) \quad g_1 = 1, \quad g_3 = 0; \quad (2) \quad g_1 = g_3 = 1/2; \quad (3) \quad g_1 = 0, \quad g_3 = 1. \quad (4.3)$$

В случае (1) учитывается только жесткость нитей, в случае (2) влияние жесткости нитей и оболочки одинаково и в случае (3) нити отсутствуют.

Расчеты показали, что результаты в трех названных случаях различаются незначительно, поэтому подробнее рассмотрим случай (2), для которого результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1. Деформация тора в зависимости от давления  $Q$  при  $g_1 = g_3 = 1/2$

$Q$	$t_1(0)$	$\lambda_2(0)$	$\lambda_2(\pi)$	$t_2(\pi)$	$t_1(0)$	$\lambda_2(0)$	$\lambda_2(\pi)$	$t_2(\pi)$
0.4	0.100	1.092	0.513	-3.636	14.622	12.197	5.207	2.189
0.7	0.196	1.148	0.551	-2.944	9.342	6.959	2.977	2.920
1.0	0.308	1.202	0.588	-2.394	5.778	4.852	2.086	1.962
1.5	0.547	1.304	0.652	-1.629	3.683	3.180	1.394	1.108
2.0	0.936	1.468	0.741	-0.862	2.406	2.257	1.038	0.441
2.2	1.318	1.645	0.823	-0.361	1.780	1.883	0.912	0.042
2.223	1.509	1.741	0.862	-0.170				

Существует предельное давление  $Q = Q_p = 2.223$ , при превышении которого равновесные положения отсутствуют. При  $Q < Q_p$  имеются два равновесных положения — докритическое и закритическое. Результаты для них приведены в левой и в правой частях таблицы соответственно. Для докритических положений равновесия деформации растут с ростом давления, а для закритических положений наблюдается обратная зависимость. У докритических положений равновесия вблизи точки  $\varphi = \pi$  напряженное состояние односно, о чём говорит знак величины  $t_2(\pi)$ .

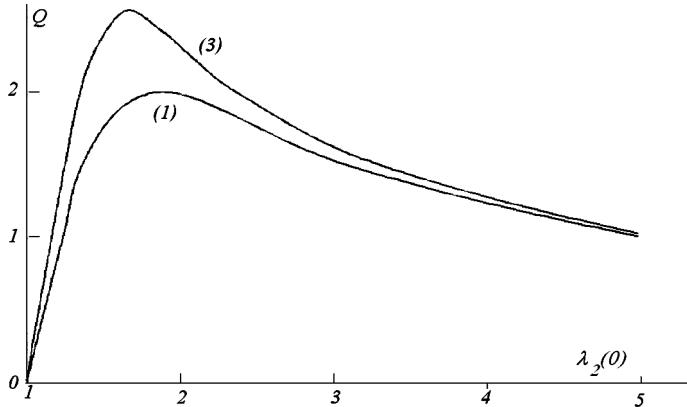


Рис. 2. Зависимость между кратностью удлинения  $\lambda_2(0)$  и давлением.

Для сравнения результатов в случаях, указанных в (4.3), на рис. 2 для двух предельных случаев (1) и (3) (при которых учитывается жесткость либо только оболочки, либо только нитей) приведены графики зависимости между кратностью удлинения  $\lambda_2(0)$  крайней параллели и безразмерным давлением  $Q$ . Для промежуточного случая (2) график располагается примерно посередине между кривыми, показанными на рис. 2.

Есть основания предполагать, что докритические положения равновесия устойчивы (по крайней мере в классе осесимметричных деформаций). Что касается закритических положений равновесия, то их устойчивость зависит от способа нагружения. Если при нагружении выдерживается постоянное внутреннее давление  $Q$ , то они неустойчивы. Если же в оболочку закачивается фиксированное количество газа, то, по-видимому, устойчивыми могут быть и закритические положения равновесия. Эти утверждения нуждаются в строгой проверке, особенно с учетом возможной бифуркации в неосесимметричные формы равновесия.

**5. Приближенное решение для полностью растянутой тороидальной оболочки.** Предположим, что  $t_2 \geq 0$  при  $\varphi \in [0, \pi]$ , и введем новые переменные по формулам

$$t_1 = \mu\alpha, \quad \lambda_1 = 1 + \mu\beta, \quad \lambda_2 = 1 + \mu\gamma, \quad t_2 = \mu\delta, \quad z = \mu\zeta.$$

Система уравнений (3.2), (3.7) и граничные условия (3.4) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\varphi} &= -\mu\delta \sin \theta, & \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{1}{\alpha}[(1 + \mu\beta)(1 + \mu\gamma)Q - \mu\delta \cos \theta], \\ \frac{d\zeta}{d\varphi} &= (1 + \mu\beta) \cos \theta, & \frac{d\gamma}{d\varphi} &= -(1 + \mu\beta) \sin \theta, \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\mu\alpha &= (g_1 + g_3)(1 + \mu\beta) - \frac{g_1}{(1 + \mu\beta)^2} - \frac{g_3}{(1 + \mu\beta)^3(1 + \mu\gamma)^2}, \\ \mu\delta &= (g_2 + g_3)(1 + \mu\gamma) - \frac{g_2}{(1 + \mu\gamma)^2} - \frac{g_3}{(1 + \mu\gamma)^3(1 + \mu\beta)^2}, \\ \theta(0) &= \zeta(0) = \zeta(\pi) = 0, \quad \theta(\pi) = \pi.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Рассмотрим случай  $\mu \ll 1$ . Подставим в (5.1)–(5.3) асимптотические разложения

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + \mu\alpha_1, \quad \beta = \beta_0 + \mu\beta_1, \quad \gamma = \gamma_0 + \mu\gamma_1, \\ \delta &= \delta_0 + \mu\delta_1, \quad \theta = \theta_0 + \mu\theta_1, \quad \zeta = \zeta_0 + \mu\zeta_1.\end{aligned}\quad (5.4)$$

В нулевом приближении получим

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= Q, \quad \theta_0 = \varphi, \quad \zeta_0 = \sin \varphi, \quad \gamma_0 = \cos \varphi + a_0, \\ \beta_0 &= A_1 - A_2\gamma_0, \quad \delta_0 = A_3\gamma_0 + A_4,\end{aligned}$$

где

$$A_1 = \frac{Q}{4g_3 + 3g_1}, \quad A_2 = \frac{2g_3 A_1}{Q}, \quad A_3 = 4g_3 + 3g_2 - 2g_3 A_2, \quad A_4 = QA_2,$$

$a_0$  — произвольная постоянная, которая находится при построении первого приближения.

Решение системы уравнений первого приближения

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_1}{d\varphi} &= -\delta_0 \sin \varphi, \quad \frac{d\theta_1}{d\varphi} = \beta_0 + \gamma_0 - \frac{\alpha_1}{Q} - \frac{\delta_0}{Q} \cos \varphi, \\ \frac{d\zeta_1}{d\varphi} &= \beta_0 \cos \varphi - \theta_1 \sin \varphi, \quad \frac{d\gamma_1}{d\varphi} = -\beta_0 \sin \varphi - \theta_1 \cos \varphi\end{aligned}\quad (5.5)$$

удовлетворяет граничным условиям

$$\theta_1(0) = \zeta_1(0) = \theta_1(\pi) = \zeta_1(\pi) = 0. \quad (5.6)$$

Первое уравнение системы (5.5) имеет решение

$$\alpha_1 = (A_3 a_0 + A_4) \cos \varphi + \frac{A_3}{2} \cos^2 \varphi + a_1 Q, \quad (5.7)$$

где  $a_1$  — произвольная постоянная. Подставляя выражение для  $\alpha_1$  во второе уравнение (5.5), с учетом первого условия (5.6) находим

$$\theta_1 = (A - 3c)\varphi + B \sin \varphi - \frac{c}{2} \sin 2\varphi, \quad (5.8)$$

где

$$A = A_1 + a_0(1 - A_2) - a_1, \quad B = 1 - A_2 - \frac{2(a_0 A_3 + A_4)}{Q}, \quad c = \frac{A_3}{4Q}.$$

Равенство  $\theta_1(\pi) = 0$  будет выполняться, если

$$A = 3c. \quad (5.9)$$

Из третьего уравнения (5.5) и граничного условия  $\zeta_1(0) = 0$  следует, что

$$\zeta_1 = -\frac{1}{2}(B + A_2)\varphi + (A_1 - a_0 A_2) \sin \varphi + \frac{B - A_2}{4} \sin 2\varphi + c \sin^3 \varphi.$$

Принимая во внимание граничное условие  $\zeta_1(\pi) = 0$ , получаем равенство  $B + A_2 = 0$ , из которого вытекает, что

$$a_0 = \frac{Q - 2A_4}{2A_3}.$$

Подстановка выражения для  $a_0$  в формулу (5.9) позволяет найти  $a_1$ :

$$a_1 = A_1 + \frac{(1 - A_2)(Q - 2A_4)}{2A_3} - 3c.$$

Функция  $\gamma_1$  определяется с точностью до постоянного слагаемого  $a_2$ , которое можно найти, построив второе приближение.

Условие  $t_2 \geq 0$  при  $\varphi \in [0, \pi]$  является необходимым для корректности полученного решения. Подставив в неравенство  $t_2 \geq 0$  приближенное выражение  $t_2 \simeq \mu\delta_0$ , получим  $Q \geq Q_0^*$ , где  $Q_0^* = 2A_3$ . Если выполняются равенства (3.8), то  $Q_0^* = 2\eta$ , что совпадает со значением, найденным в работе [1].

Величина  $Q^*$ , для которой асимптотическим методом получено приближенное выражение  $Q_0^*$ , представляет собой характерное значение безразмерного давления  $Q$ . В случае  $Q < Q^*$  часть оболочки покрыта складками, а при  $Q > Q^*$  оболочка полностью растянута.

В табл. 2 приведены значения  $Q^*$  для трех случаев (4.3). Во втором и третьем столбцах содержатся значения, полученные с помощью численного интегрирования системы (3.2) при  $\mu = 0.1$  и  $\mu = 0.01$ . В четвертом столбце приведены результаты, найденные по формуле  $Q^* = 2A_3$ .

Таблица 2. Значения  $Q^*$  для случаев (4.3)

Случай	$Q^*$		
	$\mu = 0.1$	$\mu = 0.01$	Асимптотика
(1)	4.12	5.71	6.00
(2)	4.59	6.15	6.43
(3)	4.71	5.78	6.00

Результаты, приведенные в табл. 2, показывают, что погрешность асимптотических формул уменьшается с уменьшением параметра  $\mu$ .

**6. Приближенное решение для частично растянутой торобразной оболочки.** Пусть  $t_2 > 0$  при  $\varphi \in [0, \varphi_*]$ ,  $t_2 < 0$  при  $\varphi \in [\varphi_*, \pi]$ . Тогда в области  $\varphi \in [0, \varphi_*]$  идущие по параллелям нити растянуты, а область  $\varphi \in [\varphi_*, \pi]$  покрыта поперечными складками. При сделанных предположениях имеют место равенства

$$t_2(\varphi_*) = 0, \quad \delta(\varphi_*) = 0. \quad (6.1)$$

При  $\varphi \in [0, \varphi_*]$  осесимметричную деформацию торобразной оболочки описывает система уравнений (5.1), (5.2). Система уравнений для функций  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\theta'$  и  $\zeta'$ , заданных в интервале  $\varphi \in [\varphi_*, \pi]$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha'}{d\varphi} &= 0, \quad \frac{d\theta'}{d\varphi} = \frac{Q}{\alpha'}[(1 + \mu\beta')(1 + \mu\gamma'), \\ \frac{d\zeta'}{d\varphi} &= (1 + \mu\beta') \cos \theta', \quad \frac{d\gamma'}{d\varphi} = -(1 + \mu\beta') \sin \theta', \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\mu\alpha' = (g_1 + g_3)(1 + \mu\beta') - \frac{g_1}{(1 + \mu\beta')^2} - \frac{g_3}{(1 + \mu\beta')^3(1 + \mu\gamma')^2}. \quad (6.3)$$

Решения систем (5.1), (5.2) и (6.2), (6.3), удовлетворяющие граничным условиям

$$\theta(0) = \zeta(0) = 0, \quad \theta'(\pi) = \pi, \quad \zeta'(\pi) = 0, \quad (6.4)$$

$$\alpha(\varphi_*) = \alpha'(\varphi_*), \quad \theta(\varphi_*) = \theta'(\varphi_*), \quad \gamma(\varphi_*) = \gamma'(\varphi_*), \quad \zeta(\varphi_*) = \zeta'(\varphi_*), \quad (6.5)$$

ищем в виде (5.4). Для приближенного определения неизвестного параметра  $\varphi_*$  используем асимптотическое разложение  $\varphi_* = \varphi_0 + \mu\varphi_1$ .

В нулевом приближении получаем те же результаты, что и в случае полностью растянутой торобразной оболочки:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha'_0 = Q, & \theta_0 &= \theta'_0 = \varphi, & \zeta_0 &= \zeta'_0 = \sin \varphi, \\ \gamma_0 &= \gamma'_0 = \cos \varphi + a_0, & \beta_0 &= \beta'_0 = A_1 - A_2 \gamma_0. \end{aligned}$$

Из второго равенства (6.1) вытекает, что

$$a_0 = -\cos \varphi_0 - \frac{A_4}{A_3}.$$

Величина  $\varphi_0$  определяется при построении первого приближения.

При  $\varphi \leq \varphi_0$  система уравнений первого приближения совпадает с системой (5.5). Для  $\varphi \geq \varphi_0$  она принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha'_1}{d\varphi} &= 0, & \frac{d\theta'_1}{d\varphi} &= \beta_0 + \gamma_0 - \frac{\alpha'_1}{Q}, \\ \frac{d\zeta'_1}{d\varphi} &= \beta_0 \cos \varphi - \theta'_1 \sin \varphi, & \frac{d\gamma'_1}{d\varphi} &= -\beta_0 \sin \varphi - \theta'_1 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Решения систем (5.5) и (6.6) удовлетворяют граничным условиям

$$\theta_1(0) = \zeta_1(0) = \theta'_1(\pi) = \zeta'_1(\pi) = 0, \quad (6.7)$$

$$\alpha_1(\varphi_0) = \alpha'_1(\varphi_0), \quad \theta_1(\varphi_0) = \theta'_1(\varphi_0), \quad \zeta_1(\varphi_0) = \zeta'_1(\varphi_0), \quad \gamma_1(\varphi_0) = \gamma'_1(\varphi_0). \quad (6.8)$$

В рассматриваемом случае для определения функций  $\alpha_1(\varphi)$  и  $\theta_1(\varphi)$  годятся формулы (5.7) и (5.8).

Принимая во внимание первое уравнение (6.6) и первое условие (6.8), получаем

$$\alpha'_1 = \alpha_1(\varphi_0) = -\frac{A_3}{2} \cos^2 \varphi_0 + a_1 Q.$$

Из второго уравнения (6.6) и третьего условия (6.7) следует, что

$$\theta'_1 = (A + 2c \cos^2 \varphi_0)(\varphi - \pi) + (1 - A_2) \sin \varphi, \quad (6.9)$$

Подстановка выражений (5.8) и (6.9) во второе условие (6.8) дает формулу

$$(A/c + 2 \cos^2 \varphi_0)\pi = 3\varphi_0 - 5 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + 2\varphi_0 \cos^2 \varphi_0. \quad (6.10)$$

Ввиду того, что для частично растянутой торобразной оболочки равенство (5.9) не выполняется, выражение для функции  $\zeta_1(\varphi)$  отличается от полученного в предыдущем разделе:

$$\zeta_1 = (A_1 - a_0 A_2) \sin \varphi + (A - 3c)(\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{1}{2}(B + A_2)\varphi + \frac{B - A_2}{4} \sin 2\varphi + c \sin^3 \varphi. \quad (6.11)$$

Решение  $\zeta'_1(\varphi)$  третьего уравнения (6.6), удовлетворяющее последнему граничному условию (6.7), имеет вид

$$\zeta_1 = (A_1 - a_0 A_2) \sin \varphi + (A - 2c \cos^2 \varphi_0) [(\varphi - \pi) \cos \varphi - \sin \varphi] + \frac{1 - 2A_2}{2} (\pi - \varphi) + \frac{1 - 2A_2}{4} \sin 2\varphi. \quad (6.12)$$

Подставим равенства (6.11) и (6.12) в третье граничное условие (6.8). После преобразований с учетом формулы (6.10) получим уравнение для определения  $\varphi_0$ :

$$\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0 = \pi p, \quad p = \frac{Q}{Q_0^*}. \quad (6.13)$$

Уравнение (6.13) не имеет аналитического решения, однако его корень  $\varphi_0 \in [0, \pi]$  зависит только от одного параметра  $p \in [0, 1]$ , поэтому для оценки величины этого корня можно использовать график, изображенный на рис. 3.

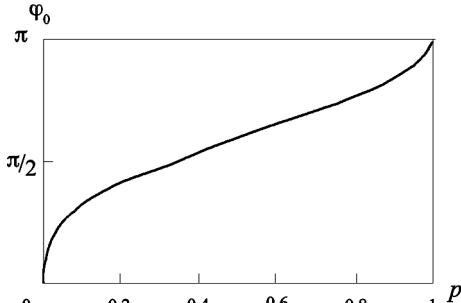


Рис. 3. Зависимость  $\varphi_0$  от  $p$ .

При малых  $p$  можно найти  $\varphi_0$  по приближенной формуле

$$\varphi_0 = (3p\pi)^{1/3}. \quad (6.14)$$

Для  $p < 0.1$  формула (6.14) дает относительную погрешность менее 3%.

В табл. 3 приведены значения  $\varphi_*$  для разных  $Q$ . Во втором и третьем столбцах содержатся результаты, полученные с помощью численного интегрирования системы (3.2) при  $\mu = 0.1$  и  $\mu = 0.01$ . В четвертом столбце приведено значение корня  $\varphi_0$  уравнения (6.13).

Таблица 3. Значения  $\varphi_*$  для разных  $Q$

Q	$\varphi_*$		
	$\mu = 0.1$	$\mu = 0.01$	Асимптотика
1	1.28	1.20	1.19
2	1.67	1.58	1.56
3	2.04	1.87	1.85
4	2.51	2.16	2.12

Погрешность асимптотических результатов уменьшается с уменьшением  $\mu$  и  $Q$ .

## 7. Приближенное решение для закритических положений равновесия.

Предположим, что  $\mu \ll 1$ , и построим асимптотические разложения решений системы (3.2), (3.7), описывающих закритические положения равновесия. Численные расчеты показывают, что в этом случае  $t_2 > 0$  для  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . После замены переменных

$$t_1 = \mu^{-1}\alpha, \quad \lambda_1 = \mu^{-1}\beta, \quad \lambda_2 = \mu^{-1}\gamma, \quad t_2 = \mu^{-1}\delta$$

система уравнений (3.2), (3.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\varphi} &= -\mu\delta \sin \theta, & \frac{d\gamma}{d\varphi} &= -\mu\beta \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{1}{\alpha}(\beta\gamma Q - \mu\delta \cos \theta), & \frac{dz}{d\varphi} &= \beta \cos \theta, \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\alpha = B_1\beta + O(\mu^3), \quad \delta = B_2\gamma + O(\mu^3), \quad B_1 = g_1 + g_3, \quad B_2 = g_2 + g_3. \tag{7.2}$$

Будем искать приближенное решение системы (7.1), (7.2), удовлетворяющее граничным условиям (3.4). Подставив

$$\beta = B_1^{-1}\alpha + O(\mu^3), \quad \delta = B_2\gamma + O(\mu^3)$$

в уравнения (7.1), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\varphi} &= -\mu B_2\gamma \sin \theta + O(\mu^3), & \frac{d\gamma}{d\varphi} &= -\mu \frac{\alpha}{B_1} \sin \theta + O(\mu^3), \\ \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{\gamma Q}{B_1} - \mu \frac{B_2\gamma}{\alpha} \cos \theta + O(\mu^3), & \frac{dz}{d\varphi} &= \frac{\alpha}{B_1} \cos \theta + O(\mu^3). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Ограничимся построением двух первых приближений:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \mu\alpha_1, & \beta &= \beta_0 + \mu\beta_1, & \gamma &= \gamma_0 + \mu\gamma_1, \\ \delta &= \delta_0 + \mu\delta_1, & \theta &= \theta_0 + \mu\theta_1, & z &= z_0 + \mu z_1. \end{aligned}$$

Тогда в формулах (7.2), (7.3) можно пренебречь величинами  $O(\mu^3)$ , и для решения системы (7.1), (7.2) с точностью до величин  $O(\mu^2)$  достаточно найти два первых приближения к решению системы (7.3).

В нулевом приближении получим

$$\alpha_0 = a_0, \quad \gamma_0 = B_1/Q, \quad \theta_0 = \varphi, \quad z_0 = \frac{a_0}{B_1} \sin \varphi,$$

где  $a_0$  — произвольная постоянная, которая находится при построении первого приближения.

Решение системы уравнений первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{d\varphi} &= -B_2\gamma_0 \sin \varphi, & \frac{d\gamma_1}{d\varphi} &= -\frac{\alpha_0}{B_1} \sin \varphi, \\ \frac{d\theta_1}{d\varphi} &= \frac{\gamma_1 Q}{B_1} - \frac{B_2\gamma_0}{a_0} \cos \varphi, & \frac{dz_1}{d\varphi} &= \frac{\alpha_1}{B_1} \cos \varphi - \frac{a_0}{B_1} \theta_1 \sin \varphi \end{aligned} \tag{7.4}$$

удовлетворяет граничным условиям

$$\theta_1(0) = 0, \quad \theta_1(\pi) = 0, \quad \zeta_1(0) = 0, \quad z_1(\pi) = 0. \tag{7.5}$$

Два первых уравнения системы (7.3) имеют решения

$$\alpha_1 = B_2 \gamma_0 \cos \varphi + a_1, \quad \gamma_1 = \frac{a_0}{B_1} \cos \varphi + b_1,$$

где  $a_1$  и  $b_1$  — произвольные постоянные. Подставляя выражение для  $\alpha_1$  и  $\gamma_1$  в третье уравнение (7.4), с учетом первого условия (7.5) находим

$$\theta_1 = \frac{Qb_1}{B_1} \varphi + \left( \frac{Qa_0}{B_1^2} - \frac{B_1 B_2}{Qa_0} \right) \sin \varphi.$$

Второе граничное условие (7.5) будет выполнено, если  $b_1 = 0$ .

Из четвертого уравнения (7.4) и третьего граничного условия (7.5) следует, что

$$z_1 = \left( \frac{B_2}{Q} - \frac{Qa_0^2}{2B_1^3} \right) \varphi + \frac{a_1}{B_1} \sin \varphi + \frac{Qa_0^2}{4B_1^3} \sin 2\varphi.$$

Принимая во внимание четвертое граничное условие (7.5), получаем равенство

$$a_0 = \frac{B_1}{Q} \sqrt{2B_1 B_2}.$$

Постоянная  $a_1$  находится при построении второго приближения. В первом приближении

$$\lambda_2 = \frac{\gamma_0 + \mu \gamma_1}{\mu} = \frac{B_1}{\mu Q} + \frac{\sqrt{2B_1 B_2}}{Q} \cos \varphi. \quad (7.6)$$

Отметим, что  $B_1 = B_2 = 1$  для всех трех случаев (4.3), поэтому полученные асимптотические формулы для них совпадают. В частности, во всех трех случаях  $a_0 = \sqrt{2}/Q$ .

В табл. 4 для случая  $g_1 = g_2 = g_3 = 1/2$  и разных значениях параметра  $\mu$  приведены значения величин  $\lambda_2(\pi)$  и  $\lambda_2(0)$  при  $Q = 1.5$ . Результаты во втором и третьем столбцах найдены по приближенной формуле (7.6). В двух последних столбцах даны результаты численного интегрирования системы уравнений (3.2).

Таблица 4. Значения  $\lambda_2(\pi)$  и  $\lambda_2(0)$  для разных  $\mu$

$\mu$	Асимптотика		Числ. результаты	
	$\lambda_2(\pi)$	$\lambda_2(0)$	$\lambda_2(\pi)$	$\lambda_2(0)$
0.3	1.28	3.16	1.39	3.18
0.2	2.39	4.28	2.45	4.31
0.1	5.72	7.61	5.75	7.64

Сравнение результатов, приведенных в табл. 2, 3 и 4, показывает, что для закритических положений равновесия асимптотические формулы можно использовать в более широком диапазоне изменения параметра  $\mu$ , чем для докритических положений равновесия.

## Литература

1. Полякова Е. В., Товстик П. Е., Филиппов С. Б., Чайкин В. А. Осесимметричная деформация торообразной оболочки из нитей под действием внутреннего давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 4. С. 98–113.
2. Алексеев С. А. Основы общей теории мягких оболочек // Расчет пространственных конструкций. М.: Оборонгиз, Стройиздат. № 11. 1969. С. 31–52.
3. Балабух Л. И., Усюкин В. И. Приближенная теория мягких оболочек вращения // Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 230–235.
4. Полякова Е. В., Чайкин В. А. Прикладные задачи механики мягких оболочек и тканей. СПб.: ИПЦ СПГУТД, 2006. 193 с.
5. Бидерман В. Л., Бухин Б. Л. Расчет безмоментных сетчатых оболочек // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1966. С. 948–953.
6. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
7. Колтак Е. П. Устойчивость безмоментных оболочек при больших деформациях. СПб.: Изд. С.-Петербург. ун-та, 2000. 248 с.
8. Григорюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования. Метод продолжения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1988. 232 с.

Статья поступила в редакцию 22 апреля 2011 г.

## ХРОНИКА

24 марта 2010 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступили д-р физ.-мат. наук, проф. С. А. Зегжда (СПбГУ) и д-р физ.-мат. наук, проф. Ш. Х. Солтаханов (г. Грозный) с докладом на тему «Обобщенный принцип Гаусса».

Краткое содержание доклада:

С помощью введения касательного пространства система уравнений Лагранжа второго рода записывается в векторной форме. Показывается, что уравнениями связей касательное пространство делится на прямую сумму двух подпространств. В одном из них составляющая вектора ускорения системы однозначно определяется уравнениями связей. Анализируется понятие идеальности голономных связей и него-голономных связей первого и второго порядка. Это понятие распространяется на связи высокого порядка. Даётся геометрическая интерпретация идеальности связей. Формулируется обобщенный принцип Гаусса. Показывается, что он может быть применен к решению краевых задач.