

Таким образом, деятельность учащегося (учебно-познавательная, исследовательская, самостоятельная, рефлексивная) является основополагающим компонентом содержания обучения математике в профильном (техническом) классе.

### Библиографический список

1. Хуторской, А. В. Ключевые компетенции и образовательные стандарты [Текст] /А. В. Хуторской, Доклад на Отделении философии образования и теоретической педагогики РАО. – 23 апреля 2007.

УДК 51:371-3

**Алламбергенов Илимпаз Хасанбаевич**

Ассистент, кафедры Алгебры и дифференциальных уравнений, Каракалпакского государственного университета имени Бердаха, [ilimpaz@rambler.ru](mailto:ilimpaz@rambler.ru)

## ОБОБЩЕНИЕ ПРИНЦИПА МОНОТОННОСТИ КАК СПОСОБ УСТАНОВЛЕНИЯ ПРЕЕМСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ

**Allambergenov Ilimpaz Khasanbaevich**

Teacher of the chair Algebra and differential equation of Karakalpak State University named after Berdakh, [ilimpaz@rambler.ru](mailto:ilimpaz@rambler.ru)

## GENERALIZATION OF MONOTONY PRINCIPLE AS A WAY OF SETTING SUCCESSIVE RELATION SHIPS IN SOLUTION OF EQUATIONS

В практике обучении математике часто приходится наблюдать следующую ситуацию: ученик, решавший уравнения вида  $\log_3(x^2 - 4) = \log_3 5$  и  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 9$  не может справиться с уравнением  $\arcsin(x^2 - 3x) = \arcsin(x - 3)$  и тем более уравнением  $3^x + \log_2 x = 3^{2x-1} + \log_2(2x - 1)$ . Хотя метод решения всех четырех уравнений один и тот же. Имеются субъективные и объективные тому причины. Основной субъективной причиной, на наш взгляд, является то, что часто усилия учителей направлены на изучение формальной стороны математики: формулировок определений, свойств понятий, разного рода формальных преобразований, способов решения задач и т. д. Содержательная сторона математики остается в тени. Как следствие, самостоятельно, без помощи учителя, большинство учеников не могут увидеть эту сторону математики, а следовательно, не могут установить содержательные преемственные связи. В настоящее время чаще устанавливаются поверхностные преемственные связи. Под содержательными преемственными

связями понимается связи, которые касаются сути явления, затрагивают существенные стороны содержания, требуют теоретического осознания и осмысления материала [1].

Объективной причиной является дискретный характер школьного курса математики. Курс математики является объединением отдельных математических тем. Интегрирование этих тем в единое целое возможно через установление содержательных преемственных связей. Практика работы школы показывает: если учащиеся не устанавливают содержательные преемственные связи между старыми и вновь усваиваемыми знаниями и умениями, то эти знания и умения носят фрагментарный характер, представляют набор слабо связанных между собой догматически усвоенных сведений и закрепленных навыков выполнения стандартных алгоритмов вычислений, преобразований, решения типовых задач и т. д. Такие знания с трудом актуализируются школьниками на уроках математики, бывают мало востребованы учеником, быстро забываются. При этом у учащихся не возникает представления о математике как о единой науке со своим предметом и своими методами.

Для установления содержательных преемственных связей в решении уравнений необходимо научить учеников общим методам решений уравнений. Одним из таких методов является принцип монотонности [2].

К окончанию 11 класса учащиеся уже имеют достаточный опыт в решении уравнений, для которых применяется принцип монотонности функции, поэтому теорема, обобщающая их знания в этом вопросе, появляется вполне естественно, а ее доказательство не вызывает затруднений.

**Теорема.** Если  $f$  - строго монотонная функция и  $x \in D_f$ ,  $y \in D_f$  то уравнения  $f(x)=f(y)$  и  $x=y$  - равносильны.

**Доказательство.** Предположим для определенности, что  $f$  - возрастающая функция.

Докажем, что  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ . Пусть  $x \neq y$ , но тогда либо  $x > y$ , либо  $x < y$ .

Если  $x > y$ , то ввиду того, что  $f$  - возрастающая функция, получим, что  $f(x) > f(y)$ , что противоречит условию. К аналогичному противоречию приходим и в случае, когда  $x < y$ .

Итак, предположив, что  $x \neq y$ , мы получим противоречие с условием задачи, следовательно:  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ .

Теперь докажем, что  $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ .

Поскольку  $x \in D_f$ , и  $y \in D_f$ , то значения  $f(x)$  и  $f(y)$  определены, и значит, ввиду однозначности функции  $f$ :  $f(x)=f(y)$ .

Таким образом показано, что если  $f$  - строго монотонная функция, то уравнения  $f(x)=f(y)$  и  $x=y$ , при условии, что  $x \in D_f$ , и  $y \in D_f$ , - равносильны.

Теорема доказана.

Доказав эту теорему, разумно с учащимися подробно разобрать решения приведенных четырех уравнений.

1. Решите уравнение  $\log_3(x^2 - 4) = \log_3 5$ .

Решение. Пусть  $f(t) = \log_3 t$ , тогда это уравнение можно записать так:  $f(x^2 - 4) = f(5)$ . Поскольку  $f$  — строго возрастающая на множестве  $(0; +\infty)$  функция, то имеют место следующие равносильные переходы:

$$\log_2(x^2 - 4) = \log_2 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 5 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Ответ: 3; -3.

2. Решите уравнение  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 9$ .

Решение.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ . Рассматривая монотонную на  $R$  функцию  $g(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t$

мы можем записать в её обозначениях уравнение  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$  так:  $g(x-1) = g(-2)$ . Откуда по доказанной теореме получаем равносильное уравнение  $x-1 = -2$  и значит  $x = -1$ .

Ответ: -1.

3. Решите уравнение  $\arcsin(x^2 - 3x) = \arcsin(x - 3)$ .

Решение. Записав это уравнение в виде  $f(x^2 - 3x) = f(x - 3)$ , где  $f(t) = \arcsin t$  — возрастающая на отрезке  $[-1; 1]$  функция, мы получим возможность применить доказанную теорему и в итоге будем иметь следующую цепочку равносильных переходов:

$x^2 - 3x = x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ . Откуда  $x_1 = 1, x_2 = 3$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что только 3 является решением уравнения.

Ответ: 3.

4.  $3^x + \log_2 x = 3^{2x-1} + \log_2(2x-1)$ .

Функция  $g(t) = 3^t + \log_2 t$  — возрастающая на множестве  $(0; +\infty)$  как сумма двух возрастающих функций. В ее обозначениях исходное уравнение можно записать в виде  $g(x) = g(2x-1)$  и, следовательно:  $x = 2x-1 \vee x = 1$

Ответ: 1.

Разбирая приведенные примеры, важно обратить внимание учащихся на то, что соответствующая функция подбирается так, чтобы она оказалась монотонной и, чтобы в ее обозначениях можно было бы записать исходное уравнение. Так на роль функции  $g$  в примере 4 можно взять, например и такую:  $g(t) = 3^t + \log_2 t - 1$ , а вот функции  $g(t) = 3^t + \log_2 t + t^2$  и  $g(t) = 3^t + \log_2 t + t^3$  уже не подойдут, первая — по причине не монотонности, а вторая — не позволяет записать исходное уравнение, хотя она и монотонна.

Для закрепления теоремы целесообразно решить цепочку упражнений.

1. Известно, что функция  $f$  монотонна на  $R$ . Решите уравнение  $f(x^2 - 3) = f(2x + 5)$ . Какие из перечисленных функций подойдут на роль функции  $f$ :

$$f(x) = x^2 + 4; f(x) = x^3 + 1; f(x) = 3^x; f(x) = \arccos x; f(x) = 2 \sin x - 1;$$

$$f(x) = 3 \cos x - 4; f(x) = x^3 + \log_3 x; f(x) = x^3 + 2^x.$$

2. О функции  $f$  — известно, что она возрастает на  $[-2; 2]$ .

Решите уравнение  $f(\sin x) = f(0,5)$ . Подберите какую-нибудь функцию, которая подойдет на роль функции  $f$ .

3. Функция  $f$  — убывает на  $R$ , а функция  $g$  — убывает на  $R_+$ . Решите уравнение  $f(x^2) - g(7x+8) = f(7x+8) - g(x^2)$ .

4. Решите уравнение  $\arccos(x-1) + \frac{1}{x-1} = \arccos(2x) + \frac{1}{2x}$ .

5. Решите систему уравнений  $\begin{cases} x^3 + \lg x = y^3 + \lg y, \\ 2^x = 3 - y. \end{cases}$

Естественным продолжением этой темы будет знакомство учащихся с теоремой о том, что если  $f$  — монотонная функция, то уравнения  $f(f(x)) = f(x)$  и  $f(x) = x$  — равносильны. Доказательство этой теоремы не сложное и вполне доступно даже для самостоятельного поиска учащимися, и к тому же, сама теорема позволяет находить довольно простые решения в сложных задачах:

1.  $\log_3(\log_3(x+2)+2) = x$ .

2.  $\sqrt{\sqrt{x+6}+6}+6 = x$ .

3. Найдите, при каких значениях  $a$ , уравнение  $\sqrt{a+x}+a = x$  имеет единственный корень.

Для того чтобы воспрепятствовать ошибочному использованию принципа монотонной функции для решения уравнений, с учащимися необходимо проделать работу на сравнение правильного и неправильного применения этого принципа. Например, предложить им объяснить, в каких случаях можно перейти к равенству  $2x-1 = x$ , если: а)  $(2x-1)^2 = x^2$ ; б)  $(2x-1)^3 = x^3$ ; в)  $\sin(2x-1) = \sin x$ ; г)  $\arcsin(2x-1) = \arcsin x$ .

Таким образом, обобщение принципа монотонности на уроках итогового повторения служит способом установление преемственных связей, с помощью которого обобщаются и систематизируются знания и умения учащихся по решению уравнений.

### Библиографический список

1. Туркина, В. М. Установление преемственных связей в преподавании математики в условиях развивающегося обучения. [Текст]: дисс....док. пед. наук. / В. М. Туркина, Санкт-Петербург. 2003. — 340 с.
2. Олехник, С. Н. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств: Справочное пособие [Текст] / С. Н. Олехник, М. К. Потапов, П. И. Пасиченко. — М.: Изд-во МГУ. 1991. — 144 с.