

О. Е. Цацура

Модель обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичности с переменной премией за риск

Применение метода ОАРУГ-в-среднем (*GARCH-in-mean model*) при исследовании модели для доходности позволяет учитывать переменную дисперсию, что дает возможность описывать премию за риск во временных рядах финансовых данных. В статье предложена некоторая модификация этой модели, обеспечивающая более гибкий способ описания премии за риск. Представлены спецификация модели, критерии для проверки гипотез и конкретное приложение к биржевым индексам нескольких азиатских торговых площадок. Полученные результаты свидетельствуют о том, что предложенная модель может быть предпочтительнее обычной ОАРУГ-в-среднем.

Ключевые слова: нелинейная ОАРУГ, волатильность, премия за риск, переменные параметры.

1. Введение

С того времени, как Энглом [Engle (1982)] была предложена модель авторегрессионной условной гетероскедастичности (АРУГ, ARCH), моделирование риска, присущего финансовым активам, получило значительное развитие. И хотя для модели АРУГ было предложено множество различных способов параметризации (обзор см., например, в [Bollerslev (2008)]), наибольшее внимание уделялось моделированию волатильности, а не связи между риском и доходностью, описываемой моделью АРУГ-в-среднем Энгла — Лиллиена — Робинсона [Engle, Lilien et. al. (1987)]. В связи с этим одной из характерных проблем может являться небольшое число способов параметризации уравнения условного математического ожидания. В [Karanasos, Kim (2000)] авторы рассматривают данную проблему, но особое внимание сосредотачивают на части уравнения условного математического ожидания, не содержащей условную дисперсию. Мы предлагаем более гибкую параметризацию распространенного способа включения волатильности в уравнение условного математического ожидания, позволив коэффициенту при волатильности быть переменным. Для этого используем вариант нелинейной регрессионной модели, предложенной Бэконом и Уотсом [Bacon, Watts (1971)]. Этот подход, в частности, успешно применяется для моделирования волатильности [Frances, van Dijk (2003)], [Hagerud (1996)], при совместном моделировании доходности и волатильности [Lundbergh, Terasvirta (1998)], а также в рамках многомерных моделей условной дисперсии [Silvennoinen, Terasvirta (2008)]. По имеющейся у нас информации, попыток моделирования связи ожидаемой доходности и риска финансовых активов при помощи этого аппарата до сих пор не предпринималось. Настоящая статья призвана частично восполнить существующий пробел.

2. Спецификация модели и проверка гипотез

Согласно [Engle, Lilien et. al. (1987)], под премией за риск актива следует понимать любое изменение в ожидаемой доходности актива, по мере того как актив становится более

или менее рискованным. Если мерой риска актива является лишь его волатильность (измененная стандартным отклонением $h_t^{1/2}$ его доходности), то связь между ожидаемой доходностью и риском может быть описана с помощью модели ОАРУГ-в-среднем.

Спецификация этой модели задается двумя частями — спецификациями уравнения условного математического ожидания (т.е. ожидаемой доходности) (1а) и уравнения условной дисперсии (1б):

$$y_t = \mu_t + g(h_t) + \xi_t, \quad (1\text{a})$$

$$h_t = f(\xi_{t-1}, \dots, \xi_{t-p}, h_{t-1}, \dots, h_{t-q}), \quad (1\text{б})$$

где μ_t — часть уравнения условного математического ожидания, не зависящая от условной дисперсии h_t (например, это может быть авторегрессионная составляющая); $g(h_t)$ — непрерывная функция произвольного вида; $\xi_t = h_t^{1/2} \zeta_t$; $\{\zeta_t\}$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с $E[\zeta_t] = 0$ и $D[\zeta_t] = 1$. Запись $f(\cdot)$ в (1б) означает, что условная дисперсия может задаваться зависимостью достаточно общего вида; далее мы полагаем, что h_t следует ОАРУГ (p, q). Параметры p, q обозначают соответственно порядок лага случайного возмущения ξ_t и лага условной дисперсии h_t и принимают целые положительные значения.

Выбор вида $g(h_t)$ предоставлен исследователю, поскольку экономическая теория не сообщает конкретного вида зависимости между риском и ожидаемой доходностью [Nelson (1991)]. Наиболее распространенный способ: $g(h_t) = \delta h_t^{1/2}$. В этом случае премия за риск пропорциональна текущей волатильности. Заметим, что из прикладного смысла модели (1а) — (1б) следует, что предполагаемое значение δ неотрицательно (чем более рискован актив, тем больше премия за риск).

Мы предлагаем более гибкую параметризацию, предположив, что параметр δ является переменным и принимает значения из отрезка $[\delta_0, \delta^0]$; далее мы условимся называть состояния, при которых параметр δ принимает значения на краях отрезка, режимами. При этом $\delta = \delta_0$ соответствует первому режиму, а $\delta = \delta^0$ — второму режиму. Переход между режимами осуществляется при помощи так называемой переходной функции $F(z_t)$, которая является непрерывной и такой, что $0 \leq F(z_t) \leq 1$; в качестве аргумента этой функции используется некоторая количественная переменная z_t [Lutkepohl, Kratzig (2004)]. Тогда $g(h_t)$ примет вид:

$$g(h_t) = \delta_0(1 - F(z_t))h_t^{1/2} + \delta^0 F(z_t)h_t^{1/2}. \quad (2)$$

Теперь запишем уравнение условного математического ожидания, условившись, что $\mu_t = ax_t$:

$$y_t = ax_t + \delta_0(1 - F(z_t))h_t^{1/2} + \delta^0 F(z_t)h_t^{1/2} + \xi_t. \quad (3)$$

Такая спецификация уравнения условной средней состоит из двух частей — линейной регрессионной ax_t и нелинейной $g(h_t)$ с переменной премией за риск. Линейную регрессионную часть составляют вектор-строка параметров a размерности ($M \times 1$) и вектор-столбец предопределенных переменных x_t размерности ($1 \times M$), который может включать лагированные значения переменных y и ξ . Нелинейная часть задается параметрами δ_0 и δ^0 , соответ-

ствующими двум различным режимам, а характер перехода между режимами управляетяется переходной функцией $F(z_t)$ с переменной z_t . Как правило, рассматривают две возможные переходные функции: логистическую и экспоненциальную [Frances, van Dijk (2003)], [Lutkepohl, Kratzig (2004)]. Логистическая переходная функция имеет вид:

$$F(z_t) = [1 + \exp(-\gamma(z_t - l))]^{-1}. \quad (4)$$

Экспоненциальная переходная функция имеет вид:

$$F(z_t) = 1 - \exp(-\gamma(z_t - l)^2). \quad (5)$$

Выбор переменной z остается за исследователем. Возможные кандидаты на роль z_t могут быть предложены экономической теорией. В случае, когда выбор переходной переменной, исходя из экономических соображений, представляется неочевидным, кандидатом на роль z_t может стать элемент или элементы x_t [Hagerud (1996)], [Lundbergh, Terasvirta (1998)], [Terasvirta (2006)].

Обозначив $\delta_1 = \delta^0 - \delta_0$, модель можно переписать в более компактном виде:

$$y_t = ax_t + [\delta_0 + \delta_1 F(z_t)] h_t^{1/2} + \xi_t, \quad (6a)$$

$$h_t = bw_t. \quad (6b)$$

При этом $E[\xi_i] = 0$, $D[\xi_i] = h_t$ и $E[\xi_i \xi_j] = 0$ для всех $i \neq j$. Условимся также, что для всех $t \leq 0$ $\xi_t = 0$ и $h_t = c$, где c — заранее заданное число (на практике c может быть равным выборочной дисперсии y_t). Это позволит рекурсивно вычислить производные логарифмической функции правдоподобия по параметрам модели (см. Приложение).

Уравнение условной дисперсии в компактной записи задается вектором-строкой параметров b размерности $(1 \times N)$ и вектором-столбцом переменных w_t размерности $(N \times 1)$. Например, вектор параметров для ОАРУГ (p, q) в такой форме записи имеет вид $b = (\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$, а вектор переменных — $w_t = (1, \xi_{t-1}^2, \dots, \xi_{t-p}^2, h_{t-1}, \dots, h_{t-q})$.

Условия, гарантирующие неотрицательность h_t , будут зависеть от конкретной спецификации уравнения условной дисперсии. Для ОАРУГ (p, q) [Bollerslev (1986)]:

$$\begin{aligned} \omega &\geq 0, \\ \alpha_i &\geq 0, i = 1, \dots, p, \\ \beta_j &\geq 0, j = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае, если уравнение условной средней имеет авторегрессионную составляющую, потребуем, чтобы все корни соответствующего характеристического уравнения лежали вне единичного круга.

Если переходная функция задана выражениями (4) или (5), то для обеспечения идентификации модели необходимо $\gamma > 0$ [Lutkepohl, Kratzig (2004)], [Hagerud (1996)].

Предположим, что для выборки $\{y_t\}$ мы идентифицировали параметры (1) с $\mu_t = ax_t + g(h_t) = \delta h_t^{1/2}$, $h_t = bw_t$ и теперь желаем узнать целесообразность идентификации (6a) — (6b). Поскольку оценка параметров моделей условной дисперсии с нелинейной условной средней вычислительно довольно трудоемка [Chan, McAleer (2003)], то следует проверить гипотезу о необходимости обращения к такой модели, прежде чем оценивать ее параметры. Для этого следует проверить гипотезу относительно параметров модели (6a) — (6b):

$$\begin{aligned} H_0: \delta_1 &= 0, \\ H_1: \delta_1 &\neq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку параметры модели при нулевой гипотезе нам известны, то можно воспользоваться статистикой множителей Лагранжа, вычисление которой требует наличия идентифицированной модели только при нулевой гипотезе [Greene (2002)]:

$$LM = \left(\frac{\partial \ln L(\hat{\theta}_R)}{\partial \hat{\theta}_R} \right)' \left[I(\hat{\theta}_R) \right]^{-1} \left(\frac{\partial \ln L(\hat{\theta}_R)}{\partial \hat{\theta}_R} \right), \quad (9)$$

где $\hat{\theta}_R$ — вектор параметров при нулевой гипотезе; $I(\hat{\theta}_R)$ — оценка информационной матрицы Фишера; $\frac{\partial \ln L(\hat{\theta}_R)}{\partial \hat{\theta}_R}$ — вектор частных производных логарифмической функции максимального правдоподобия.

При справедливости нулевой гипотезы критическая статистика будет иметь распределение χ^2 с 1 степенью свободы [Greene (2002)]. Однако (9) будет содержать неизвестные параметры переходной функции, а именно: γ и I . Решение этой проблемы может состоять в приближении переходной функции рядом Тейлора в окрестности нуля [Hagerud (1996)], [Lutkepohl, Kratzig (2004)]. В случае, если в альтернативной модели рассматривается логистическая переходная функция (4), то после перегруппировки слагаемых мы получим аппроксимирующую модель¹:

$$\begin{aligned} y_t &= ax_t + [\delta_0 + \delta_1 * z_t] h_t^{1/2} + \xi_t, \\ h_t &= bw_t. \end{aligned} \quad (10)$$

Величина δ_1^* появляется в результате разложения переходной функции в ряд Тейлора в окрестности $z_t = 0$. Если в альтернативной модели рассматривается экспоненциальная переходная функция (5), то аппроксимирующая модель будет иметь вид:

$$\begin{aligned} y_t &= ax_t + [\delta_0 + \delta_1 * z_t^2] h_t^{1/2} + \xi_t, \\ h_t &= bw_t. \end{aligned} \quad (11)$$

Гипотеза (8) примет вид:

$$\begin{aligned} H_0: \delta_1^* &= 0, \\ H_0: \delta_1^* &\neq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Статистика (9) теперь вычисляется с использованием частных производных логарифмической функции максимального правдоподобия и оценки информационной матрицы аппроксимирующих моделей (10) или (11).

3. Оценка параметров модели

Параметры модели (6а) — (6б) будем оценивать методом максимального правдоподобия в предположении $\xi_t \sim N(0, h_t)$. Максимизация логарифмической функции максимального

¹ Подобное приближение дееспособно (в прикладном плане) лишь при малых значениях z_t .

правдоподобия при ограничениях (7) и $\gamma > 0$ выполняется численными методами, например, методом барьерных функций. Безусловная оптимизация может проводиться методом Ньютона — Рафсона. Используются аналитические выражения для градиента функции максимального правдоподобия (см. Приложение), а гессиан аппроксимируем по формуле Брайдена — Флетчера — Гольдфарба — Шанно. Поскольку параметры переходной функции на несколько порядков могут отличаться от остальных параметров модели, то рекомендуется стандартизировать переходную переменную z_t [Lutkepohl, Kratzig (2004)]. Это сделает элементы матрицы Гессе примерно одного порядка, а также облегчит вычисление стандартных ошибок параметров. Информационную матрицу аппроксимируем методом Берннта [Greene, (2002)]. Полученную аппроксимацию используем для проверки гипотезы (12) и вычисления стандартных ошибок параметров.

Отметим, что поскольку уравнение условной средней включает в себя условное стандартное отклонение, то информационная матрица Фишера не является блочно-диагональной, и, следовательно, оценка уравнений условной средней и условной дисперсии должна производиться одновременно [Engle, Lilien et. al. (1987)].

4. Эмпирическое применение

Теперь мы применим модель (6а) — (6б) к задаче оценки переменной премии за риск. Исходными данными являются ежедневные значения группы следующих фондовых индексов, источником которых служит ресурс www.finance.yahoo.com (в скобках указана дата начала выборки, дата конца выборки для всех индексов одинакова — 8 августа 2008 г.):

- BSE 30 — индекс биржи Бомбея, Индия (1 июля 1997 г.);
- HSI — индекс биржи Гонконга (31 декабря 1986 г.);
- Jakarta Composite — индекс биржи Джакарты, Индонезия (1 июля 1997 г.);
- KOSPI — индекс биржи Сеула, Южная Корея (1 июля 1997 г.);
- Nikkei 225 — индекс биржи Токио, Япония (4 января 1987 г.);
- Shanghai Composite — индекс биржи Шанхая, Китай (5 января 2000 г.);
- Straits Times — индекс биржи Сингапура (27 августа 1997 г.);
- TCWSI — индекс биржи Тайбэя, Тайвань (2 июля 1997 г.).

Рассмотрим логарифмические доходности $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$, где $\{P_t\}$ — уровни исходного ряда.

Описательные статистики и результаты тестов на наличие автокорреляции (тест Юнга — Бокса, выполненный для 12 лагов) и авторегрессионной условной гетероскедастичности (тест Энгела, выполненный для 8 лагов) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Объем выборок, описательные статистики и результаты тестирования

	Объем выборки	Эксцесс	Асимметрия	Тест Юнга — Бокса	Тест Энгела
BSE 30	2 750	6,14 [0,0000]	-0,32 [0,0000]	45,72 [0,0000]	300,17 [0,0000]
HSI	5 355	73,02 [0,0000]	-3,07 [0,0000]	67,67 [0,0000]	116,69 [0,0000]

Продолжение табл. 1

	Объем выборки	Эксцесс	Асимметрия	Тест Юнга — Бокса	Тест Энгла
Jakarta Composite	2 698	9,55 [0,0000]	-0,05 [0,1424]	86,90 [0,0000]	217,62 [0,0000]
KOSPI	3 622	43,75 [0,0000]	0,44 [0,0000]	64,29 [0,0000]	947,49 [0,0000]
Nikkei 225	6 053	10,02 [0,0000]	-0,15 [0,0000]	29,62 [0,0000]	483,27 [0,0000]
Shanghai Composite	2 240	8,17 [0,0000]	-0,11 [0,0175]	24,68 [0,0164]	129,78 [0,0000]
Straits Times	2 744	10,51 [0,0000]	-0,00 [0,4970]	44,17 [0,0000]	387,10 [0,0000]
TCWSI	2 725	5,35 [0,0000]	-0,13 [0,0029]	23,84 [0,0214]	222,75 [0,0000]

* в квадратных скобках — Р-значения.

Исследуемые ряды демонстрируют характерные особенности — значительный (больше 3) коэффициент эксцесса и значимый отрицательный коэффициент асимметрии, т.е. большие положительные колебания доходности менее вероятны, нежели большие отрицательные. Интересно, что значимые статистики Юнга — Бокса косвенно могут свидетельствовать о наличии условной дисперсии в уравнении условного математического ожидания, — ряды доходностей, порожденные моделью ОАРУГ-в-среднем, являются автокоррелированными даже без наличия какой-либо дополнительной структуры в уравнении условной средней [Terasvirta (2006)]. Тест Энгла, выполненный для 8 лагов, подтверждает наличие авторегрессионной условной гетероскедастичности в рядах доходностей.

В нашем исследовании ограничим линейную составляющую условного математического ожидания авторегрессией порядка p . Подбор порядка будем осуществлять таким образом, чтобы стандартизованные ошибки модели не были автокоррелированными согласно тесту Юнга — Бокса до 12 лага включительно при уровне значимости $\alpha = 0,05$. Поскольку мы сосредотачиваем внимание на динамике премии за риск, а не на динамике волатильности, то спецификуцию уравнения условной дисперсии ограничим ОАРУГ (1,1). Таким образом, мы оцениваем коэффициенты модели вида:

$$\begin{aligned} y_t &= c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + (\delta_0 + \delta_1 \cdot F(z_t)) \cdot h_t^{1/2} + \xi_t, \\ h_t &= w + \alpha \xi_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\sum_{i=1}^p \phi_i$ — набор параметров авторегрессионной части порядка p первого уравнения модели (13).

При оценке модели мы исходим из предположения $\xi_t \sim N(0, h_t)$.

Прежде чем проводить оценку параметров модели, проверим гипотезу (12). Для этого необходимо оценить параметры (13) в предположении $\delta_0 = \gamma = l = 0$:

$$\begin{aligned} y_t &= c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \delta_0 h_t^{1/2} + \xi_t, \\ h_t &= w + \alpha \xi_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Параметры такой модели, а также проверку гипотезы (12) мы выполняли для всех исследуемых индексов. Найденные значения параметров и t -статистики указаны в табл. 2 (только для тех индексов, для которых в дальнейшем оценивались параметры полной модели).

Заметим, что параметр δ_0 значим на уровне 5% только для индексов фондовых бирж Китая (Shanghai Composite) и Индии (BSE 30), в то время как для Японии (Nikkei 225) и Сингапура (Straits Times) незначимые t -статистики не дают оснований полагать, что премия за риск является переменной.

Таблица 2

Результаты оценки параметров модели (14)

Параметр	Shanghai Composite	Nikkei 225	BSE 30	Straits Times
χ	-0,0009 (-2,2245)	0,0009 (4,7781)	0,0023 (4,8701)	0,0004 (1,9465)
ϕ_1	0,0054 (1,2788)	0,0261 (1,9348)	0,0877 (4,2080)	0,0558 (2,8415)
ϕ_2	-0,0210 (-1,2958)	-0,0232 (-1,8212)	-0,0176 (-1,4689)	0,0049 (0,5576)
ϕ_3	0,0356 (1,9752)	0,0119 (1,1410)	0,0310 (1,6988)	0,0380 (2,0237)
ϕ_4	0,0379 (2,1648)	-0,0140 (-1,1254)	0,0284 (1,4597)	0
ϕ_5	0	0	-0,0432 (-2,2892)	0
ϕ_6	0	0	-0,0623 (-3,1496)	0
δ_0	0,0937 (2,9449)	-0,0180 (-1,3364)	-0,0668 (-2,0296)	0,0127 (0,8576)
ω	$2,62 \cdot 10^{-6}$ (5,5370)	$2,57 \cdot 10^{-6}$ (9,5017)	$1,03 \cdot 10^{-5}$ (7,1520)	$1,85 \cdot 10^{-6}$ (4,8523)
α	0,0654 (11,9611)	0,1305 (36,3102)	0,1418 (12,9115)	0,1223 (13,9814)
β	0,9263 (157,2481)	0,8679 (198,5333)	0,8262 (70,0366)	0,8777 (119,1029)

Поскольку теперь мы располагаем значениями параметров модели (14), то проверим гипотезу (12), прежде чем приступить к идентификации параметров (13).

Перед проверкой гипотезы (12) следует определиться с выбором переходной переменной z_t — полагаем $z_t = \xi_{t-i}$, $i = 1, \dots, 3$. Мы сделали такой выбор, следуя предположению, что участники рынка формируют свое мнение о влиянии волатильности на ожидаемую доходность, исходя из своей оценки того, является ли текущая ситуация благоприятной для занимаемых ими позиций или нет. В качестве такой оценки участниками текущей ситуации мы полагаем $\xi_{t-1} = r_{t-1} - E[r_{t-1}]$, т.е. в какой мере фактическая доходность предыдущего периода отклонилась от ожидаемого участниками значения доходности. Если в данный момент преобладают участники, открывшие длинные позиции, то неожиданное падение доходности $\xi_{t-1} < 0$ будет воспринято как неблагоприятное изменение ситуации, а $\xi_{t-1} > 0$ — как благоприятное. Наоборот, если преобладают участники с открытыми короткими позициями, то $\xi_{t-1} < 0$ будет воспринято как благоприятное изменение ситуации, позволяющее выгоднее закрыть короткую позицию, а $\xi_{t-1} > 0$ — как неблагоприятное. Таким образом, основываясь на том, является ли ситуация благоприятной или нет, участник будет оценивать влияние волатильности на ожидаемую доходность либо положительно, воспринимая нестабильность рынка как возможность получить дополнительную прибыль, либо отрицательно, расценивая волатильность как источник вероятных убытков.

Так как в качестве переходной переменной можно положить линейную комбинацию переменных, то рассмотрим ее простейший вариант в виде сумм $\sum_{i=1}^2 \xi_{t-i}$ и $\sum_{i=1}^3 \xi_{t-i}$. Рассмотрение этих сумм также продиктовано соображениями, что участники рынка могут принимать во внимание не только свои текущие ожидания, но также то, насколько были верны их ожидания в прошлом.

Рассчитаем значения критических статистик LM (9) для двух разных вариантов переходной функции ((4) и (5)) и различных типов ее аргументов z_t и вычислим так называемое p -значение (p -value), т.е. вероятность $P\{\chi^2(1) > LM | H_0\}$. Анализ результатов этих вычислений, представленных в табл. 3 и 4, свидетельствует о том, что для индексов HSI, Jakarta Composite, Nikkei 225 и Straits Times гипотеза (12) отвергается при уровнях значимости, меньших 0,1, и практически при обоих вариантах переходной функции и при всех типах ее аргументов. Это значит, что в таких случаях более адекватной моделью оказывается предлагаемое обобщение (3) модели. В то же время поведение индексов KOSPI и TCWSI может быть адекватно описано в рамках обычной спецификации, т.е. при $\delta_1 = 0$.

Таблица 3

Проверка гипотезы (12), логистическая переходная функция

	ξ_{t-1}	ξ_{t-2}	ξ_{t-3}	$\sum_{i=1}^2 \xi_{t-i}$	$\sum_{i=1}^3 \xi_{t-i}$
BSE 30	0,073	0,298	0,140	0,185	0,096
HSI	0,046	0,069	0,091	0,043	0,047
Jakarta Composite	0,029	0,146	0,113	0,058	0,048

Продолжение табл. 3

	ξ_{t-1}	ξ_{t-2}	ξ_{t-3}	$\sum_{i=1}^2 \xi_{t-i}$	$\sum_{i=1}^3 \xi_{t-i}$
KOSPI	0,312	0,176	0,381	0,157	0,237
Nikkei 225	0,027	0,024	0,089	0,010	0,012
Shanghai Composite	0,112	0,351	0,350	0,181	0,236
Straits Times	0,028	0,041	0,045	0,029	0,034
TCWSI	0,117	0,375	0,411	0,151	0,220

Таблица 4
Проверка гипотезы (12), экспоненциальная переходная функция

	ξ_{t-1}	ξ_{t-2}	ξ_{t-3}	$\sum_{i=1}^2 \xi_{t-i}$	$\sum_{i=1}^3 \xi_{t-i}$
BSE 30	0,240	0,303	0,211	0,144	0,057
HSI	0,094	0,088	0,095	0,085	0,090
Jakarta Composite	0,111	0,072	0,131	0,056	0,073
KOSPI	0,322	0,329	0,305	0,231	0,188
Nikkei 225	0,084	0,085	0,086	0,067	0,048
Shanghai Composite	0,023	0,164	0,194	0,126	0,349
Straits Times	0,042	0,029	0,040	0,044	0,038
TCWSI	0,406	0,099	0,399	0,227	0,172

Поведение доходности индекса BSE 30 также не дает оснований для усложнения модели: все p -значения больше стандартного уровня значимости, равного 0,05. Однако при проверке гипотезы о наличии экспоненциальной модели с переходной переменной в виде суммы ошибок трех предшествующих периодов значение вероятности ошибки становится весьма близким к 0,05. При этом по отдельности ξ_{t-1} , ξ_{t-2} и ξ_{t-3} дают значения вероятности, не позволяющие принять альтернативную гипотезу. Это дает основания полагать, что изменение в премии за риск может быть вызвано именно накопленной случайной компонентой доходности.

Индексы HSI и Jakarta Composite позволяют принять альтернативную гипотезу о логистической модели с возможными переходными переменными $\xi_{t-1}, \sum_{i=1}^2 \xi_{t-i}$ или $\sum_{i=1}^3 \xi_{t-i}$ — вероятности ошибок мало отличаются друг от друга. Значение вероятности ошибки 0,0095 свидетельствует в пользу логистической модели с $\sum_{i=1}^3 \xi_{t-i}$ для индекса Nikkei 225. Для индексов Shanghai Composite и Straits Times можно принять альтернативную гипотезу об экспоненциальной модели, для которой $z_t = \xi_{t-1}$, и логистической модели, для которой $z_t = \xi_{t-1}$ соответственно.

Модель (13) выборочно оценим для индексов BSE 30, Nikkei 225, Shanghai Composite и Straits Times, при этом порядок авторегрессионной составляющей останется прежним. Результаты оценки — значения параметров, t -статистики (в круглых скобках) и значения критерия Акаике — указаны в табл. 5 и 7. Как видно, параметры γ и β переходных функций значимы на уровне значимости 5%, за исключением параметра β для индекса Straits Times. Обратим внимание на то, что параметры δ_0 и δ_1 для индекса Nikkei теперь также значимы. В табл. 6 представлены результаты проверки стандартизованных остатков моделей на наличие автокорреляции (12 лагов) и гетероскедастичности (8 лагов); при заданном уровне значимости $\alpha = 0,05$ признаков некорректной спецификации не обнаружено.

Таблица 5

Результаты оценки параметров модели (13) методом максимального правдоподобия; t -статистки (указано в круглых скобках)

Параметр	Shanghai Composite	Nikkei 225	BSE 30	Straits Times
$F(z_t)$	Экспоненциальная	Логистическая	Экспоненциальная	Логистическая
z_t	ξ_{t-1}	$\sum_{i=1}^2 \xi_{t-i}$	$\sum_{i=1}^3 \xi_{t-i}$	ξ_{t-1}
c	0,0007 (0,7131)	0,0013 (3,4700)	0,0034 (2,3296)	0,0007 (0,9807)
ϕ_1	0,0195 (0,8953)	0,1218 (3,8964)	-0,0221 (-0,7207)	-0,1116 (-1,7710)
ϕ_2	-0,0178 (-0,8451)	0,0707 (2,2786)	-0,1181 (-4,1063)	0,0168 (0,7969)
ϕ_3	0,0427 (2,0050)	0,0112 (0,8721)	-0,0766 (-2,6383)	0,0364 (1,9005)
ϕ_4	0,0375 (1,8432)	-0,0141 (-0,9990)	0,0413 (2,0458)	0
ϕ_5	0	0	-0,0390 (-2,0102)	0
ϕ_6	0	0	-0,0607 (-2,9639)	0
δ_0	-0,0854 (-1,0182)	0,7968 (2,9272)	-0,4424 (-3,6124)	-0,3908 (-2,1064)

Продолжение табл. 5

Параметр	Shanghai Composite	Nikkei 225	BSE 30	Straits Times
$F(z_t)$	Экспоненциальная	Логистическая	Экспоненциальная	Логистическая
z_t	ξ_{t-1}	$\sum_{i=1}^2 \xi_{t-i}$	$\sum_{i=1}^3 \xi_{t-i}$	ξ_{t-1}
δ_1	0,3646 (3,9133)	-1,1563 (-2,9754)	0,6451 (4,0954)	0,7620 (2,2809)
γ	1352,47 (8,8018)	31,69 (2,2650)	432,11 (2,5674)	80,04 (2,0161)
λ	0,0014 (4,8447)	-0,0362 (-1,8661)	-0,0401 (-7,9524)	-0,0005 (-0,0778)
ω	$2,60 \cdot 10^{-6}$ (5,6605)	$2,48 \cdot 10^{-6}$ (9,2088)	$1,01 \cdot 10^{-5}$ (7,1947)	$1,80 \cdot 10^{-6}$ (4,7792)
α	0,0651 (14,8459)	0,1278 (33,7137)	0,1350 (12,9667)	0,1209 (13,8558)
β	0,9265 (207,4615)	0,8705 (185,1679)	0,8324 (73,3333)	0,8791 (119,2741)

Таблица 6

Результаты тестов на наличие ошибок спецификации модели

	Shanghai Composite	Nikkei 225	BSE 30	Straits Times
Тест Юнга — Бокса	18,49 [0,1016]	17,72 [0,1245]	12,52 [0,4047]	10,39 [0,5821]
Тест Энгла	4,31 [0,8284]	3,58 [0,8931]	2,86 [0,9427]	10,61 [0,2249]

Введение дополнительных параметров δ_1 , γ и λ позволило добиться некоторого улучшения в смысле значения критерия Акаике для индексов Shanghai Composite, Nikkei 225 и BSE 30; для индекса Strait Times значение критерия Акаике остается неизменным².

Таблица 7

Значения информационного критерия Акаике;
 AIC_0 для модели (14) и AIC_1 для модели (13)

	Shanghai Composite	Nikkei 225	BSE 30	Straits Times
AIC_0	-12 701	-36 183	-15 256	-16 414
AIC_1	-12 709	-36 210	-15 271	-16 414

² Более убедительные свидетельства прикладной дееспособности модели можно было бы получить, разбив имеющиеся данные на две части — «обучающую» и «экзаменющую» и сравнив ex post-модельный прогноз с реальными данными экзаменющей части (примечание научн. ред.).

Поскольку известны значения функций максимального правдоподобия как для полных моделей (13), так и для моделей с ограничениями, то воспользуемся критерием отношения правдоподобия для проверки гипотезы $H_0: \delta_1 = \gamma = l = 0$. Критические статистики и вероятности ошибок первого рода (в квадратных скобках) равны (соответственно по индексам Shanghai Composite, Nikkei 225, BSE 30 и Straits Times): 13,71 [0,0033], 33,11 [0,0000], 20,85 [0,0001] и 4,06 [0,2552]. Во всех случаях, кроме последнего, ограничения $\delta_0 = \gamma = l = 0$ представляются неправдоподобными. Так как усложнение модели для биржи Сингапура не привело к улучшению модели, то результаты ее оценки в дальнейшем комментировать не будем.

На рис. 1 изображены графики переходных функций $F(z_t)$ для трех индексов, при этом каждая точка соответствует одному наблюдению переходной переменной z_t .

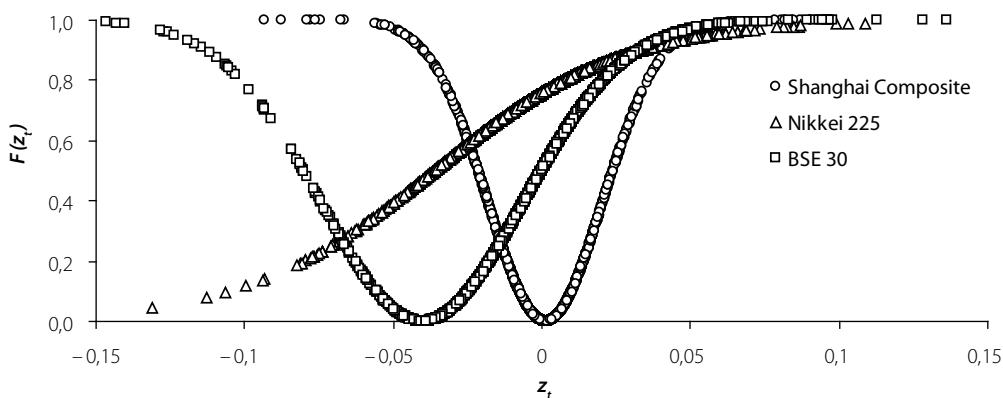
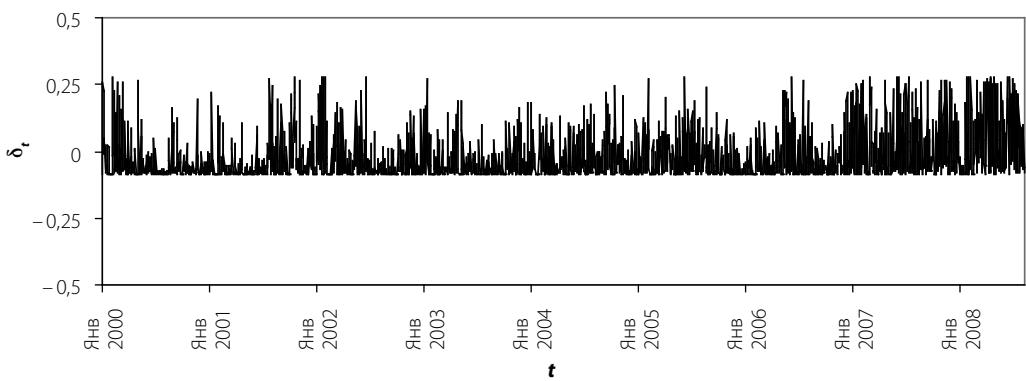


Рис. 1. Графики переходных функций $F(z_t)$

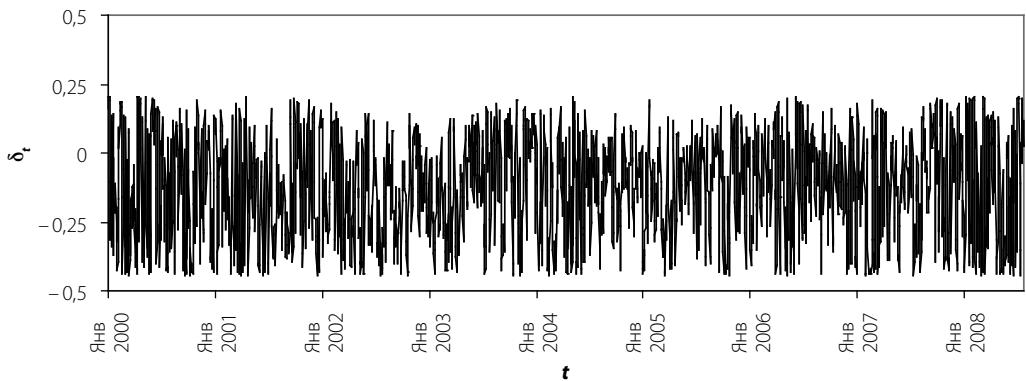
Как видно из графика функции $F(z_t)$, на протяжении большей части рассматриваемых временных периодов коэффициент $\delta_t = \delta_0 + \delta_1 F(z_t)$ является смесью двух режимов для всех индексов, принимая значения, близкие к δ_0 или $\delta_0 + \delta_1$ в небольшом числе случаев. Режиму значений δ_t , близких к δ_0 , соответствуют значения переходной переменной $z_t = 0,0014$ для индекса Shanghai Composite и $z_t = -0,0401$ для индекса BSE 30. Для индекса Nikkei 225 этот режим, строго говоря, имеет место при $z_t \rightarrow -\infty$, однако, уже при $z_t < -0,1$ коэффициент δ_t достаточно близок к δ_0 . Аналогично, условившись считать вторым режимом значение δ_t , при $F(z_t)$, близких к единице, получаем, что второй режим наступает при $z_t < -0,05$ и $z_t > 0,05$ для индекса Shanghai Composite, при $z_t > 0,05$ для индекса Nikkei 225. Для индекса BSE 30 второй режим наступает приблизительно при $z_t < -0,12$ и $z_t > 0,05$.

Интересно отметить случай, при котором коэффициент δ_t становится равным нулю и волатильность перестает влиять на ожидаемую доходность. При таком состоянии участники рынка не связывают текущую неопределенность с риском получить убыток или с возможностью дополнительного дохода. Соответствующее значение переходной переменной получим, решив относительно z_t уравнение $F(z_t) = -\delta_0 / \delta_1$. Тогда для индекса Nikkei 225 премия за риск равна нулю лишь при $z_t = -0,011$. Однако для индексов Shanghai Composite и BSE 30 равенство премии за риск нулю достигается при паре значений переходной переменной, а именно: $z_t = 0,016$ и $z_t = -0,013$ для фондового рынка Китая; $z_t = 0,017$ и $z_t = -0,092$ для фондового рынка Индии.

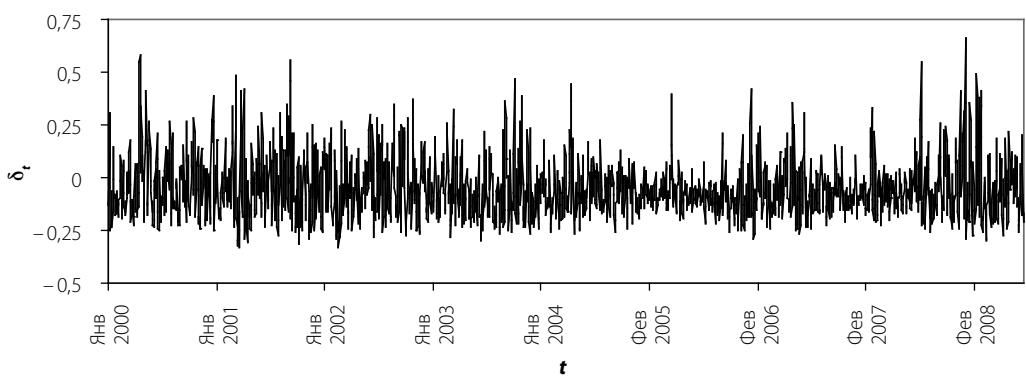
На рис. 2–4 изображены графики динамики коэффициента δ_t (для удобства сравнения все графики построены по данным за период с января 2000 г. по август 2008 г.).

Рис. 2. Динамика коэффициента δ_t (индекс Shanghai Composite)

Для фондового рынка Китая (Shanghai Composite) коэффициент при премии за риск изменяется в интервале от $\delta_0 = -0,0854$ до $\delta_0 + \delta_1 = 0,2792$. Смена участниками рынка оценки влияния риска на ожидаемую доходность связана с величиной случайной составляющей доходности и, по-видимому, не зависит от ее знака, так как коэффициент $l = 0,0014$ мало отличен от нуля.

Рис. 3. Динамика коэффициента δ_t (индекс BSE 30)

Коэффициент при премии за риск для индекса BSE 30 изменяется от $\delta_0 = -0,3908$ до $\delta_0 + \delta_1 = 0,3712$. Переходная функция симметрична относительно $z_t = l = -0,0401$.

Рис. 4. Динамика коэффициента δ_t (индекс Nikkei 225)

Коэффициент при премии за риск для индекса Nikkei 225 изменяется от $\delta_0 = -0,3595$ до $\delta_0 + \delta_1 = 0,7968$, однако, увеличение премии за риск происходит на негативном фоне, так как $\delta_1 = -1,1563 < 0$, что может свидетельствовать о преобладании коротких позиций над длинными.

В заключение на рис. 5–7 рассмотрим графики динамики премии за риск $\delta_t \sigma_t$, где $\sigma_t = h_t^{1/2}$ (аналогично, по данным за период с января 2000 г. по август 2008 г.).

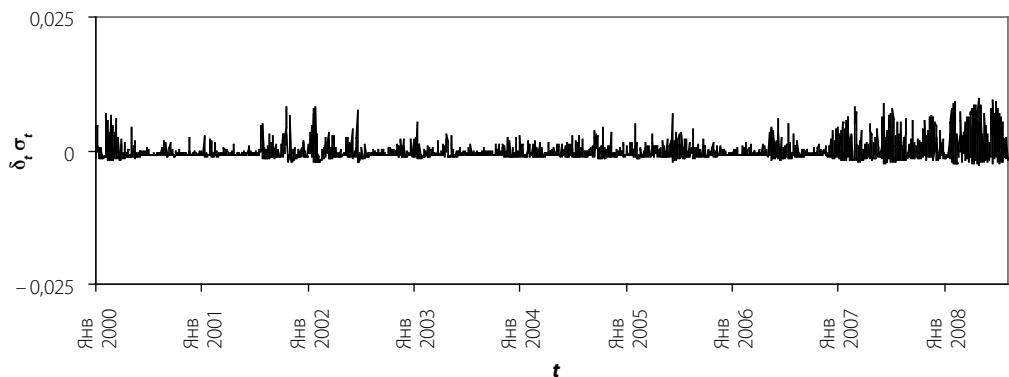


Рис. 5. Динамика премии за риск (индекс Shanghai Composite)

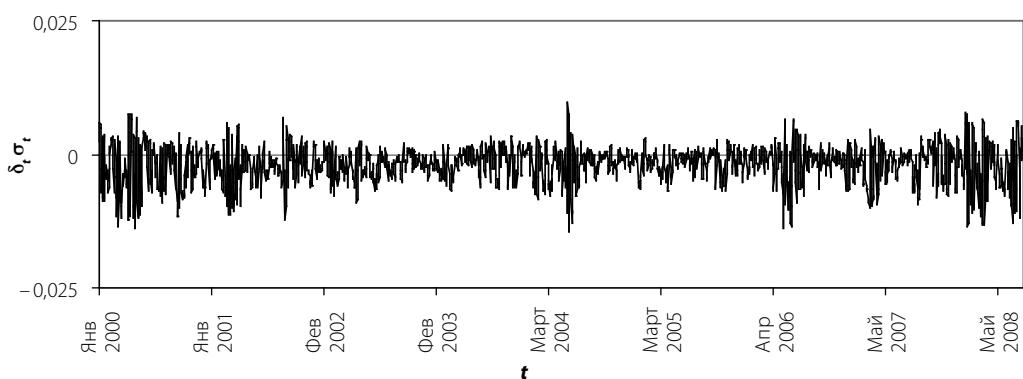


Рис. 6. Динамика премии за риск (индекс BSE 30)

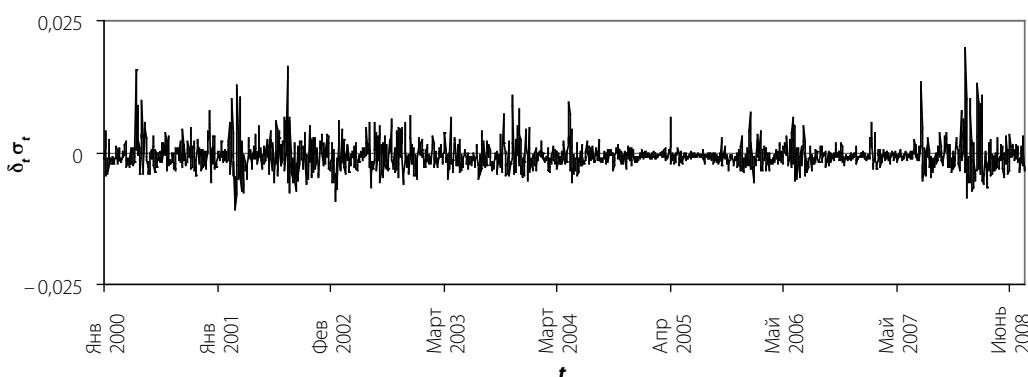


Рис. 7. Динамика премии за риск (индекс Nikkei 225)

5. Заключение

В статье представлен расширенный способ параметризации модели [Engle, Lilien et. al. (1987)] при помощи метода переходных функций, предложенного в [Bacon, Watts (1971)]. Благодаря переходной функции можно моделировать два режима, соответствующих различным зависимостям между волатильностью и премией за риск. Переход между режимами осуществляется непрерывно под влиянием переходной переменной. Такой способ параметризации может представить более гибкие возможности моделирования по сравнению с традиционной моделью. Для проверки гипотезы о необходимости применения модели предложены тесты для двух различных спецификаций. Применение тестов к стандартной модели ОАРУГ-в-среднем, оцененной для группы из 8 фондовых индексов, позволило установить целесообразность применения предложенной нами модели. Были идентифицированы параметры моделей при различном выборе переходных функций для 4-х фондовых индексов. В трех случаях предложенные модели показали улучшение в смысле информационного критерия Акаике.

Приложение

В предположении нормальности вклад отдельного наблюдения в логарифмическую функцию максимального правдоподобия составит:

$$l_t = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(h_t) - \frac{1}{2} \frac{\xi_t^2}{h_t}.$$

Вклад одного наблюдения в градиент:

$$\frac{\partial l_t}{\partial \theta} = -\frac{\xi_t}{h_t} \frac{\partial \xi_t}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{1}{h_t} \left[\frac{\xi_t^2}{h_t} - 1 \right] \frac{\partial h_t}{\partial \theta}.$$

Выведем для модели (6а) — (6б) частные производные условной дисперсии h_t и случайного возмущения ξ_t по вектору параметров $\theta = (a, \delta_0, \delta_1, \eta, b)$, где a — параметры условной средней, δ_0 и δ_1 — коэффициенты при премии за риск, η — параметры переходной функции, b — параметры условной дисперсии:

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial a} = -x_t - \frac{1}{2} \delta_0 \frac{1}{h_t^{1/2}} \frac{\partial h_t}{\partial a} - \frac{1}{2} \delta_1 F(z_t) \frac{1}{h_t^{1/2}} \frac{\partial h_t}{\partial a} - \delta_1 h_t^{1/2} \frac{\partial F(z_t)}{\partial a},$$

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial \delta_0} = -h_t^{1/2} - \frac{1}{2} \delta_0 \frac{1}{h_t^{1/2}} \frac{\partial h_t}{\partial \delta_0} - \frac{1}{2} \delta_1 F(z_t) \frac{1}{h_t^{1/2}} \frac{\partial h_t}{\partial \delta_0} - \delta_1 h_t^{1/2} \frac{\partial F(z_t)}{\partial \delta_0},$$

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial \delta_1} = -F(z_t)h_t^{\gamma/2} - \frac{1}{2}\delta_0 \frac{1}{h_t^{\gamma/2}} \frac{\partial h_t}{\partial \delta_1} - \frac{1}{2}\delta_1 F(z_t) \frac{1}{h_t^{\gamma/2}} \frac{\partial h_t}{\partial \delta_1} - \delta_1 h_t^{\gamma/2} \frac{\partial F(z_t)}{\partial \delta_1},$$

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}\delta_0 \frac{1}{h_t^{\gamma/2}} \frac{\partial h_t}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\delta_1 F(z_t) \frac{1}{h_t^{\gamma/2}} \frac{\partial h_t}{\partial \eta} - \delta_1 h_t^{\gamma/2} \frac{\partial F(z_t)}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial b} = -\frac{1}{2}\delta_0 \frac{1}{h_t^{\gamma/2}} \frac{\partial h_t}{\partial b} - \frac{1}{2}\delta_1 F(z_t) \frac{1}{h_t^{\gamma/2}} \frac{\partial h_t}{\partial b} - \delta_1 h_t^{\gamma/2} \frac{\partial F(z_t)}{\partial b},$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial a} = b \frac{\partial w_t}{\partial a},$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial \delta_0} = b \frac{\partial w_t}{\partial \delta_0},$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial \delta_1} = b \frac{\partial w_t}{\partial \delta_1},$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial \eta} = b \frac{\partial w_t}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial b} = w_t + b \frac{\partial w_t}{\partial b}.$$

Производная вектора переменных условной дисперсии по параметрам модели имеет вид:

$$\frac{\partial w_t}{\partial \theta} = \left(0, 2\xi_{t-1} \frac{\partial \xi_{t-1}}{\partial \theta}, \dots, 2\xi_{t-p} \frac{\partial \xi_{t-p}}{\partial \theta}, \frac{\partial h_{t-1}}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial h_{t-q}}{\partial \theta} \right).$$

Производная логистической переходной функции по параметрам модели:

$$\frac{\partial F(z_t)}{\partial \theta} = -[1 + \exp(-\gamma(z_t - l))]^{-2} \left[-\exp(-\gamma(z_t - l)) \cdot \left((z_t - l) \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \gamma \left(\frac{\partial z_t}{\partial \theta} - \frac{\partial l}{\partial \theta} \right) \right) \right].$$

Производная экспоненциальной переходной функции по параметрам модели:

$$\frac{\partial F(z_t)}{\partial \theta} = \exp(-\gamma(z_t - l)^2) \left[(z_t - l)^2 \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + 2\gamma(z_t - l) \left(\frac{\partial z_t}{\partial \theta} - \frac{\partial l}{\partial \theta} \right) \right].$$

Список литературы

- Bacon D. W., Watts D. G. Estimating the Transition Between Two Intersecting Straight Lines, *Biometrika* 58: 525–534, 1971.
- Bollerslev T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307–327, 1986.
- Bollerslev T. Glossary to ARCH (GARCH), Duke University and National Bureau of Economic Research. 2008.
- Chan F., McAleer M. *Estimating Smooth Transition Autoregressive Models with GARCH Errors in the Presence of Extreme Observations and Outliers*, *Applied Financial Economics*, vol. 13, 581–592, 2003.
- Engle R. F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, vol. 50, 987–1008, 1982.
- Engle R. F., Lilien D. M., Robins R. P. *Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model*, *Econometrica*, vol. 55, Iss. 2, 391–407, 1987.
- Fiorentini G., Calzolari G., Panattoni L. Analytic Derivatives and the Computation of GARCH Estimates, *Journal of Applied Econometrics*, vol. 11, 399–417, 1996.
- Frances P. H., van Dijk D. Non-linear Time Series Models in Empirical Finance, Cambridge University Press. 2003.
- Glosten L. R., Jagannathan R., Runkle D. E. On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *The Journal of Finance*, vol. 48, Iss. 5, 1779–1801, 1993.
- Godfrey L. G. *Misspecification Tests in Econometrics: the Lagrange multiplier principle and other approaches*, Econometric Society Monographs. 1991.
- Greene W. H. *Econometric Analysis*, Prentice Hall. 2002.
- Hagerud G. E. A Smooth Transition ARCH Model for Asset Returns, Scandinavian Working Papers in Economics (<http://swopec.hhs.se>). № 162, 1996.
- Hagerud G. E. Modeling Nordic Stock Returns with Asymmetric GARCH Models, Scandinavian Working Papers in Economics (<http://swopec.hhs.se>). № 164, 1997.
- Hagerud G. E. Specification Tests for Asymmetric GARCH, Scandinavian Working Papers in Economics (<http://swopec.hhs.se>). № 163, 1997.
- Ingersoll J. E. Jr. *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield. 1987.
- Karanasos M., Kim J., Alternative GARCH in Mean Models: an Application to the Korean Stock Market, University of York (www.york.ac.uk/depts/econ/research). 2000.
- Lundbergh S., Teräsvirta T. Evaluating GARCH Models, *Journal of Econometrics* 110, 417–435, 2002.
- Lundbergh S., Teräsvirta T. Modeling Economic High-Frequency Time Series with STAR-STGARCH Models, Scandinavian Working Papers in Economics (<http://swopec.hhs.se>). № 291, 1998.
- Lutkepohl H., Kratzig M. *Applied Time Series Econometrics*, Themes in Modern Econometrics. 2004.
- Nelson D. B. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, *Econometrica*, vol. 59. № 2, 347–370, 1991.
- Silvennoinen A., Teräsvirta T. Multivariate GARCH Models, Scandinavian Working Papers in Economics (<http://swopec.hhs.se>). № 669, 2008.
- Teräsvirta T. An Introduction to Univariate GARCH Models, Scandinavian Working Papers in Economics (<http://swopec.hhs.se>). № 646, 2006.