

## References

1. Annin B. D., Cherepanov G. P. *Uprugo-plasticheskaya zadacha* [The elastic-plastic problem] // Novosibirsk : Nauka Publ., 1983. 238 p.
2. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. [About elastoplastic torsion rod]. *Vestnik SibGAU*, 2013, no. 3(49), p. 100–103. (In Russ.)
3. Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. *Prilozhenie simmetrii i zakonov sokhraneniya k resheniyu differentsial'nykh uravnenii* [Application of symmetries and conservation laws to solving differential equations]. Novosibirsk : SO RAN Publ., 2001. 190 p.
4. Senashov S. I., Gomonova O. V., Yakhno A. N. *Matematicheskie voprosy dvumernykh uravnenii ideal'noi plastichnosti* [Mathematical problems of two-dimensional equations of the perfect plasticity] / SibGAU. Krasnoyarsk, 2012. 137 p.
5. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. [Elastoplastic Bending of Beam] // J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics., 2014, no. 7(2), pp. 203–208.
6. Senashov S. I., Yakhno A. N. [Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system] // J. Phys. A: Math. Theor., no. 46 (2013) 355202.
7. Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws (2012) Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity SIGMA, no. 8, 071, pp. 16. URL: <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2012.071>. Special Issue “Geometrical Methods in Mathematical Physics”.
8. Senashov S. I., Yakhno A. N. [Group analysis of solutions of 2-dimensional differential equations. Lie Groups: New research]. Nova science publishers, New York, 2009, pp. 123–138.
9. Senashov S. I., Yakhno A. N. [Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries]. *Nonlinear analysis* 71(2009), pp. 1274–1284.
10. Senashov S. I., Gomonova O. V., Yakhno A. N. [Matematicheskie voprosy dvumernykh uravnenii ideal'noy plastichnosti]. SibGAU. Krasnoyarsk, 2012, pp. 137 (In Russ.)
11. Senashov S. I., Filyushina E. V. [Conservation laws of plane elasticity theory] // *Vestnik SibGAU*, 2014, Vol. 1(53), pp. 79–81 (In Russ.).
12. Senashov S. I., Filyushina E. V., Gomonova O. V. [Construction of elastic-plastic boundaries using conservation laws] // *Vestnik SibGAU*, 2015, Vol. 16, no. 2, pp. 343–360 (In Russ.).
13. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. [On the elastic-plastic torsion bar] // *Vestnik SibGAU*, 2013, Vol. 3(49), pp. 100–103 (In Russ.).

© Сенашов С. И., Филюшина Е. В., 2015

УДК 539.374

## ЗАКОН ГУКА КАК ГРУППА НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ\*

С. И. Сенашов, Е. В. Филюшина

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31  
E-mail: sen@sibsau.ru

Рассмотрен обобщенный закон Гука, учитывающий начальные деформации упругого анизотропного материала. Предполагается, что характеристики материала зависят линейно от начальных деформаций. Деформации считаются малыми. Показано, что построенный закон Гука порождает группу непрерывных преобразований. Количество параметров в группе определяется количеством ненулевых компонент тензора напряжений.

Такой подход позволяет классифицировать упругие материалы по виду алгебры Ли, соответствующей этой группе. Приведены эксперименты, которые могли бы позволить проводить классификацию упругих материалов с начальными деформациями по виду закона Гука.

Ключевые слова: закон Гука, группа непрерывных преобразований, классификация упругих материалов.

## HOOKE'S LAW AS A GROUP OF CONTINUOUS TRANSFORMATIONS

S. I. Senashov, E. V. Filyushina

Reshetnev Siberian State Aerospace University  
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation  
E-mail: sen@sibsau.ru

We have considered the generalized Hooke's law. This law accepts the initial deformation of the elastic anisotropic material. It is assumed that the characteristics of the material depends on the initial linear deformations. Deformations

\* Работа поддержана Министерством образования и науки РФ № Б-180-14.

are considered small. It is shown that it generates a group of continuous transformations. The number of parameters in the group is determined by the number of non-zero components of the stress tensor.

This approach allows us to classify the type of elastic materials on the Lie algebra corresponding to the group generated by Hooke's law. The paper presents experiments that might allow the classification of elastic materials with initial strains in form of Hooke's law.

**Keywords:** Hooke's law, a group of continuous transformations, classification of elastic materials.

Одна из основных задач математики – классификация. Пример такой задачи, прекрасно решенной средствами теории групп, – классификация кристаллов.

Ряд авторов заметили аналогии между теорией упругости и группами непрерывных преобразований (группами Ли). Первым следует упомянуть А. Лява [1]. Он показал, что линейные однородные деформации упругого тела порождают группу непрерывных преобразований. Подобных взглядов придерживается и один из авторов статьи. Некоторые соображения по этому поводу содержатся в работах [2; 3]. Заметим, что методы изучения симметрий уже достаточно успешно используются для решения задач механики деформируемого твердого тела. Примеры такого использования можно найти в [4–12].

Сама идея классификации упругих материалов по виду закона Гука не нова. Она восходит к классификации кристаллов. Считается, что упругий материал наследует симметричные свойства составляющих его кристаллов. Поэтому упругие материалы классифицируют по сингониям. Напомним, что Н. Стентон (1669) разбивает все кристаллы на семь сингоний (сходноугольных): триклинную, моноклинную, ромбическую, тригональную, гексагональную, тетрагональную и кубическую. Далее, используя понятие решетки кристалла, О. Браве (1848) делит кристаллы на 14 классов. В 1867 г. А. В. Гадолин вводит 32 кристаллических класса, и в 1890–1894 гг. завершает классификацию Е. С. Федоров введением 230 кристаллических групп. Необходимо отметить, что все эти гениальные открытия были сделаны задолго до экспериментального открытия кристаллической решетки с помощью рентгеновских лучей. Эта классификация актуальна до сих пор и широко используется в разных областях науки.

Упругие материалы, которые описываются линейным законом Гука, тоже в соответствии с кристаллической симметрией (сингонией) удается классифицировать по количеству постоянных, входящих в закон Гука. Их число может быть 81, 21, 13, 9, 5 и 2.

В этой работе проводится классификация анизотропных линейных упругих материалов с остаточными деформациями, предполагая, что материальные константы зависят от остаточных деформаций. Каждому обобщенному закону Гука ставится в соответствие некоторая точечная группа Ли, а ей, в свою очередь, алгебра Ли. Каждой двумерной подалгебре этой алгебры соответствует некоторый эксперимент на сложное нагружение, что позволяет определить зависимость материальных констант от остаточных деформаций. Это позволяет провести классификацию таких материалов и разбить их на достаточно большое количество классов.

План доклада следующий: 1) напомнить определение группы Ли и алгебры Ли непрерывных преобразований; 2) написать закон Гука для материалов с остаточными деформациями и проверить, что эти законы удовлетворяют всем свойствам группы непрерывных преобразований; 3) по данным группам построить алгебры Ли для разных вариантов теории анизотропной упругости; 4) описать эксперименты мысленные, которые позволяют классифицировать упругие материалы.

### Библиографические ссылки

1. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л. : ОНТИ, 1935. 674 с.
2. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001. 190 с.
3. Сенашов С. И. Группы Ли и классификация упругих материалов // Доклады РАН. 1994. Т. 335, № 6. С. 712–715.
4. Сенашов С. И., Черепанова О. Н., Кондрин А. В. Elastoplastic Bending of Beam // J. Siberian Federal Univ. Ser. «Math. & Physics». 2014. № 7(2). P. 203–208.
5. Senashov S. I., Yakhno A. N. Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system // J. Phys. A: Math. Theor. 2013. № 46. С. 355202.
6. Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws [Электронный ресурс] // Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity SIGMA. 2012. № 8. 071. 16 p. Special Issue “Geometrical Methods in Mathematical Physics”. URL: <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2012.071> (дата обращения: 10.10.2015).
7. Senashov S. I., Yakhno A. N. Group analysis of solutions of 2-dimensional differential equations. Lie Groups: New research. Nova science publishers. New York, 2009. P. 123–138.
8. Senashov S. I., Yakhno A. N. Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries. Nonlinear analysis 71. 2009. P. 1274–1284.
9. Сенашов С. И., Гомонова О. В., Яхно А. Н. Математические вопросы двумерных уравнений идеальной пластичности. СибГАУ. Красноярск, 2012. 137 с.
10. Сенашов С. И., Филюшина Е. В. Законы сохранения плоской теории упругости // Вестник СибГАУ. 2014. Вып. 1(53). С. 79–81.
11. Сенашов С. И., Филюшина Е. В., Гомонова О. В. Построение упруго-пластических границ с помощью законов сохранения // Вестник СибГАУ. 2015. Т. 16, № 2. С. 343–360.
12. Сенашов С. И., Черепанова О. Н., Кондрин А. В. Об упруго-пластическом кручении стержня // Вестник СибГАУ. 2013. Вып. 3(49). С. 100–103.

## References

1. Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematical theory of elasticity]. ONTI. M.-L., 1935. 674 p.
2. Kiryakov P. P., Senashov S. I., Yakhno A. N. *Prilozhenie simmetrii i zakonov sokhraneniya k resheniyu differentsial'nykh uravnenii* [Application of symmetries and conservation laws to solving differential equations]. Novosibirsk : SORAN Publ., 2001. 190 p.
3. Senashov S. I. [Lie groups and classification of elastic materials] // *Doklady RAN*. 1994. Vol. 335, no. 6, pp. 712–715 (In Russ.).
4. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. [Elastoplastic Bending of Beam] // *J. Siberian Federal Univ., Math. & Physics.*, 2014, no. 7(2), pp. 203–208.
5. Senashov S. I., Yakhno A. N. [Some symmetry group aspects of a perfect plane plasticity system] // *J. Phys. A: Math. Theor.*, no. 46 (2013) 355202.
6. Senashov S. I., Yakhno A. N. Conservation Laws (2012) // *Hodograph Transformation and Boundary Value Problems of Plane Plasticity SIGMA*, no. 8, 071, pp. 16, URL: <http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2012.071>. Special Issue “Geometrical Methods in Mathematical Physics”.
7. Senashov S. I., Yakhno A. N. [Group analysis of solutions of 2-dimensional differential equations. Lie Groups: New research.] *Nova science publishers, New York*, 2009, pp. 123–138.
8. Senashov S. I., Yakhno A. N. [Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries] *Nonlinear analysis* 71 (2009), pp. 1274–1284.
9. Senashov S. I., Gomonova O. V., Yakhno A. N. [Matematicheskie voprosy dvumernykh uravneniy ideal'noy plastichnosti]. *SibGAU. Krasnoyarsk*, 2012, pp. 137 (In Russ.).
10. Senashov S. I., Filyushina E. V. [Conservation laws of plane elasticity theory]. *Vestnik SibGAU*, 2014. Vol. 1(53), pp. 79–81 (In Russ.).
11. Senashov S. I., Filyushina E. V., Gomonova O. V. [Construction of elastic-plastic boundaries using conservation laws] // *Vestnik SibGAU*, 2015. Vol. 16, no. 2, pp. 343–360 (In Russ.).
12. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. [On the elastic-plastic torsion bar] // *Vestnik SibGAU*, 2013. Vol. 3(49), pp. 100–103 (In Russ.).

© Сенашов С. И., Филлюшина Е. В., 2015

УДК 539.37

# АНАЛИЗ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛАХ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ\*\*

Е. П. Ченцов

Институт вычислительного моделирования СО РАН  
Российская Федерация, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44  
E-mail: chencov.evg@gmail.com

На основе дискретной математической модели анализируются резонансные частоты поперечно-вращательных колебаний в блочном материале с податливыми упругими прослойками. Разработанная модель позволяет описывать деформационные процессы в структурно неоднородных материалах, используемых в аэрокосмической отрасли.

Ключевые слова: дискретная модель, блочный материал, резонансные частоты.

## OSCILLATORY PROCESSES ANALYSIS IN STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS MATERIALS USING DISCRETE MODELING

E. P. Chentsov

Institute of Computational Modeling SB RAS  
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russian Federation  
E-mail: chencov.evg@gmail.com

Based on the discrete mathematical models resonant frequencies of transverse-rotational oscillations in blocky material with elastic interlayers are analyzed. The developed model is used to describe deformation processes of structurally inhomogeneous materials in aerospace branch.

Keywords: discrete model, blocky material, resonant frequencies.

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-00130).