V. Математика в школе

УДК 510.1
ББК 22.16

© *Б. Шийдэв*
Монголия, г. Эрдэнэт, Технологический институт имени Ш.Отгонбилега
© *Д. Буянтогтох*
Монголия, Монгольский государственный университет образования

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПО ОСНОВАМ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И О РАЗЛОЖЕНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

В статье рассматриваются типовые и олимпиадные задачи элементарной теории функций, а также вопросы разложения рациональных дробей.

Ключевые слова: гиперболические функции, область определения и период функции, разложение дробей.

© *B. Shiydev*
Mongolia, Erdenet, Technological Institute named by Sh. Otgonbileg
© *D. Buyantogtokh*
Mongolia, Mongolian State Education University

SOME TASKS IN THE ELEMENTARY THEORY OF FUNCTIONS AND ABOUT DECOMPOSITION OF RATIONAL FRACTIONS

The article is devoted to typical and competition tasks of the elementary theory of functions and questions about decomposition of rational fractions.

Key words: hyperbolic functions, definitional domain and period of functions, rational fractions.

Введение

В статье рассматриваются приложения теории функций в курсе анализа. Также изучаются свойства некоторых дробей.

1. Некоторые приложения гиперболических функций

Определение 1.1. Функцию вида $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ называют гиперболическом косинусом и обозначают chx:

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{1.1}$$

Аналогично гиперболический синус

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{1.2}$$

гиперболический тангенс

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \tag{1.3}$$

гиперболический котангенс

$$cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \tag{1.4}$$

Из определения гиперболических функций следует, что

$D(shx)=D(chx)=D(thx)=(-\infty;+\infty)$, $D(cthx)=\{x:\ e^{2x}-1\neq 0\}=\{x:\ x\neq 0\ \}$.

Функции, обратные к гиперболическим, называются обратными гиперболическими функциями. Например, для функции $y=shx$ имеем $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}\Rightarrow$ $e^{2x}-2ye^x-1=0\Rightarrow\ e^x=y+\sqrt{y^2+1}\ \Rightarrow x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$. Обратная к функции $y=shx$ является функция $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Свойства и формулы для гиперболических и тригонометрических функций схожи.

Функция $y=chx$ четная: $ch(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}=chx$. Из (1.1) и (1.2) следует, что

$$e^x=chx+shx, \tag{1.5}$$

$$e^{-x}=chx-shx. \tag{1.6}$$

Следовательно,

$$sh(x+y)=\frac{1}{2}\left(e^{x+y}-e^{-x-y}\right)=\frac{1}{2}\left(e^x\cdot e^y-e^{-x}\cdot e^{-y}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(chx+shx)(chy+shy)-(chx-shx)(chy-shy)\right]=shx\cdot chy+chx\cdot shy.$$

Имеем

$$sh(x+y)=shx\cdot chy+chx\cdot shy. \tag{1.7}$$

Кроме того,

$$sh(x-y)=shx\cdot chy-chx\cdot shy. \tag{1.8}$$

Аналогично можно вывести следующие формулы:

$$ch(x+y)=chx\cdot chy-shx\cdot shy, \tag{1.9}$$

$$ch(x-y)=chx\cdot chy+shx\cdot shy. \tag{1.10}$$

Из формулы (1.7) следует, что

$$sh2x=2shx\cdot chx. \tag{1.11}$$

Из (1.9) имеем

$$ch2x=sh^2x+ch^2x. \tag{1.12}$$

Имеем место соотношение $ch^2x-sh^2x=(chx-shx)(chx+shx)=e^x\cdot e^{-x}=1$. Итак,

$$ch^2x-sh^2x=1. \tag{1.13}$$

Тем же путем можно вывести следующие формулы:

$$ch^2x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{ch2x+1}{2}, \tag{1.14}$$

$$sh^2x=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{ch2x-1}{2}. \tag{1.15}$$

Формулы (1.14) и (1.15) представляют собой аналогии с тригонометрическими формулами, называемыми формулами «понижения степени».

Далее, используя гиперболические функции, решим некоторые задачи элементарной математики.

Пример 1.1. Рассматривается система уравнений $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=y,\\ x^4-y^4=144.\end{cases}$

Сделаем подстановку $\begin{cases} x = kch\varphi \\ y = ksh\varphi \end{cases}$. Тогда данная система принимает вид

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=y, \\ x^4-y^4=144, \end{cases} \begin{cases} |k|\sqrt{ch2\varphi}-|k|=ksh\varphi, \\ k^4\left(ch^4\varphi-sh^4\varphi\right)=144, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{ch2\varphi}-1=\pm sh\varphi, \\ k^4\cdot ch2\varphi=144, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{12}{k^2}-1=\pm sh\varphi, \\ k^4\cdot ch2\varphi=144, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sh\varphi=\pm\dfrac{12-k^2}{k^2}, \\ k^4\left(ch^4\varphi+sh^4\varphi\right)=144, \end{cases} \begin{cases} sh\varphi=\pm\dfrac{12-k^2}{k^2}, \\ k^4\left(1+2sh^2\varphi\right)=144, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^4\left(1+\frac{2\left(12-k^2\right)^2}{k^4}\right)=144 \Rightarrow 3k^4-48k^2+144=0 \Rightarrow k_1^2=12 \text{ и } k_2^2=4.$$

Итак, $y=0$ и $x=\pm2\sqrt{3}$ при $k_1^2=12$; при $k_2^2=4$ система не имеет решения. Данная система имеет два решения: $\left(\pm2\sqrt{3};0\right)$. □

Пример 1.2. Рассматривается система уравнений $\begin{cases} x+y=2, \\ x^4+y^4=16. \end{cases}$

Сделаем подстановку $\begin{cases} x = kch\varphi, \\ y = ksh\varphi. \end{cases}$ Используя формулу (1.5), получаем

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x^4+y^4=16, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\left(ch\varphi+sh\varphi\right)=2, \\ k^4\left(ch^4\varphi+sh^4\varphi\right)=16, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\cdot e^{\varphi}=2, \\ k^4\cdot\left(3+ch4\varphi\right)=64, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k\cdot e^{\varphi}=2, \\ k^4\cdot\left(3+\dfrac{e^{4\varphi}+e^{-4\varphi}}{2}\right)=64, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\cdot e^{\varphi}=2, \\ k^4\cdot\left(6+e^{4\varphi}+e^{-4\varphi}\right)=128, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\cdot e^{\varphi}=2, \\ k^4\cdot\left(e^{8\varphi}+6\cdot e^{4\varphi}+1\right)=128e^{4\varphi}. \end{cases}$$

$$ch^4\varphi+sh^4\varphi=\left(ch^2\varphi-sh^2\varphi\right)^2+2ch^2\varphi sh^2\varphi=1+\frac{1}{2}sh^2\varphi=1+\frac{ch4\varphi-1}{4}=\frac{3+ch4\varphi}{4}.$$

Подставляя $e^{\varphi}=\dfrac{2}{k}$, получаем $k^4\cdot\left(\dfrac{96}{k^4}+\dfrac{256}{k^8}+1\right)=128\cdot\dfrac{16}{k^4}$ или $k^8+96k^4-128\cdot16=0$.

Отсюда $k=\pm2$.

1. Если $k=2$, то из уравнения $e^{\varphi}=1$ получаем $\varphi=0$. Тогда

$$x=kch\varphi=2\cdot ch0=2\cdot\frac{e^0+e^0}{2}=2,\quad y=ksh\varphi=2\cdot sh0=2\cdot\frac{e^0-e^0}{2}=0.$$

2. Если $k=-2$, то из уравнения $e^{\varphi}=-1$ получаем $\varphi=\varnothing$. Общее решение: (0;2), (2;0). □

Пример 1.3. Пусть $xy=1$ и $x>y$. Требуется доказать, что $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}\geq2\sqrt{2}$.

Сделаем подстановку $x=kch\varphi$ и $y=ksh\varphi$. Тогда $xy=1\Rightarrow$

$$k^2\cdot sh\varphi ch\varphi=1\Rightarrow k^2\cdot sh2\varphi=2\Rightarrow k^2\cdot\left(e^{2\varphi}-e^{-2\varphi}\right)=4\Rightarrow k^2\cdot\left(e^{4\varphi}-1\right)=4e^{2\varphi}\Rightarrow$$

$$e^{4\varphi}=\frac{4e^{2\varphi}+k^2}{k^2}. \qquad (*)$$

С другой стороны, из неравенства $x>y$ следует, что $ksh\varphi>kch\varphi$. Но это неравенство

выполняется тогда и только тогда, когда $k > 0$.

Следовательно, $\dfrac{x^2+y^2}{x-y} = \dfrac{k^2\left(sh^2\varphi + ch^2\varphi\right)}{k\left(sh\varphi - ch\varphi\right)} = \dfrac{kch2\varphi}{e^{-\varphi}} = ke^{\varphi}\cdot\dfrac{e^{4\varphi}+1}{2e^{2\varphi}} = \dfrac{k\left(e^{4\varphi}+1\right)}{2e^{2\varphi}}$.

Учитывая (*), получим

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} = \frac{k\left(e^{4\varphi}+1\right)}{2e^{\varphi}} = \frac{k\left(4e^{2\varphi}+2k^2\right)}{2e^{\varphi}\cdot k^2} = \frac{2e^{2\varphi}+k^2}{k\cdot e^{\varphi}} \geq \frac{2\sqrt{2e^{2\varphi}\cdot k^2}}{k\cdot e^{\varphi}} = \frac{2\sqrt{2}e^{\varphi}\cdot k}{k\cdot e^{\varphi}} = 2\sqrt{2}\,.\ \square$$

Пример 1.4. Требуется доказать, что $a+b\leq 2$, если $a^2+b^2\leq 2$. Если сделать подстановку $x = kch\varphi$ и $y = ksh\varphi$, то

$$a^2+b^2\leq 2 \Rightarrow k^2\left(sh^2\varphi+ch^2\varphi\right)\leq 2 \Rightarrow k^2\frac{e^{4\varphi}+1}{2e^{2\varphi}}\leq 2 \Rightarrow k^2\leq\frac{4e^{2\varphi}}{e^{4\varphi}+1}\Rightarrow k\leq\frac{2e^{\varphi}}{\sqrt{e^{4\varphi}+1}}\,.$$

Тогда $a+b = k\left(ch\varphi+sh\varphi\right) = k\cdot e^{\varphi}\leq\dfrac{2e^{2\varphi}}{\sqrt{e^{4\varphi}+1}}\leq\dfrac{2e^{2\varphi}}{e^{2\varphi}} = 2\,.\ \square$

Пример 1.5. Пусть a,b,c – любые действительные числа и $c\geq 0, a+b\geq c$. Докажем, что $a^8+b^8\geq\dfrac{c^8}{128}$. Пусть $x = kch\varphi$ и $y = ksh\varphi$. Тогда $a+b = k\left(ch\varphi+sh\varphi\right) = k\cdot e^{\varphi}\geq c$.

Отсюда $k\geq\dfrac{c}{e^{\varphi}}$. Следовательно, $a^8+b^8 = \left(a^4-b^4\right)^2+2a^4b^4 = \left(a^2-b^2\right)^2\left(a^2+b^2\right)^2+2a^4b^4 =$

$$= k^8\left(ch^2 2\varphi+\frac{1}{8}sh^4 2\varphi\right) = k^8\left(\frac{ch4\varphi+1}{2}+\frac{\left(ch4\varphi-1\right)^2}{32}\right) = \frac{k^8}{32}\left(ch^2 4\varphi+14ch4\varphi+17\right) =$$

$$\frac{k^8}{32}\left(\frac{ch8\varphi+1}{2}+14ch4\varphi+17\right) = \frac{k^8}{64}\left(ch8\varphi+28ch4\varphi+35\right) = \frac{k^8}{64}\left(\frac{e^{16\varphi}}{2e^{8\varphi}}+\frac{28\left(e^{8\varphi}+1\right)}{2e^{4\varphi}}+35\right) =$$

$$\frac{k^8}{128e^{8\varphi}}\left(e^{16\varphi}+28e^{12\varphi}+70e^{8\varphi}+28e^{4\varphi}+1\right)\geq\frac{c^8}{128}\cdot\frac{e^{16\varphi}+28e^{12\varphi}+70e^{8\varphi}+28e^{4\varphi}+1}{e^{16\varphi}} =$$

$$= \frac{c^8}{128}\cdot\left(1+\frac{28e^{12\varphi}+70e^{8\varphi}+28e^{4\varphi}+1}{e^{16\varphi}}\right)\geq\frac{c^8}{128}\,.\ \square$$

2. Нахождение области значений функции

В математике часто приходится решать задачи не только на нахождение области определения, но и на определение области значений функции.

Пусть дана функция $y = f\left(x\right)$ и область определения этой функции $D\left(y\right)$.

Множество значений, принимаемых функцией $y = f\left(x\right)$ при изменениях аргумента x из области определения $D\left(y\right)$, называется областью значений функции. Область значений функции $y = f\left(x\right)$ обозначается $E\left(y\right)$.

Рассмотрим некоторые приемы нахождения области значений функции.

I. Область значений функции можно найти с помощью определения функции или её графика. Например, для функции $y = x^2$ имеем $E\left(x^2\right) = \left[0;+\infty\right)$, для функции $y = x^2$ – $E\left(x^3\right) = \left(-\infty;+\infty\right)$, для функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ – $E\left(\sin\right) = E\left(\cos\right) = \left[-1;1\right]$, для функций $y = tgx$, $y = ctgx$ – $E\left(tg\right) = E\left(ctg\right) = \left(-\infty;+\infty\right)$, для функции $y = a^x\left(0<a\neq 1\right)$ –

$E\left(a^x\right)=(0;+\infty)$, для функции $y=\{x\}$ ($\{x\}$ – дробная часть x) – $E(y)=(0;1)$, для функции $y=(-1)^x$ – $E(y)=\pm 1$ и т.д.

II. Используя свойства взаимно обратных функций, можно найти область значений. Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ взаимно обратны, то $D(f)=E(g)$, $D(g)=E(f)$.

Из этого свойства следует, что для того, чтобы найти область значений функции $f(x)$ достаточно найти область определения её обратной функции.

Пример 2.1. Для функции $y=\log_a x$ область значений $E(\log)=D\left(a^x\right)=(-\infty;+\infty)$. □

Пример 2.2. Так как функция $y=\sin x$ имеет обратную $x=\arcsin y$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то $E(\arcsin)=D(\sin)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Аналогично $E(\arccos)=[0;\pi]$, $E(\operatorname{arc}tg)=$ $=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $E(\operatorname{arc}ctg)=(0;\pi)$. □

Пример 2.3. Чтобы найти область значений функции $y=\frac{2x+3}{x-1}$, сначала найдем ее обратную функцию. Из равенства $y=\frac{2x+3}{x-1}$ имеем $x=\frac{2y+3}{y-1}$. Отсюда

$$D(x)=E(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty). \square$$

Пример 2.4. Пусть дана функция $y=\sqrt{2+x-x^2}$. Ясно, что $y\ge 0$. Возведя обе части равенства в квадратную степень, получаем $x^2-x+y^2-2=0$. Отсюда $x=\frac{1\pm\sqrt{9-4y^2}}{2}$ и

$D(x)\colon \begin{cases} y\ge 0, \\ 9-4y^2\ge 0, \end{cases} \Rightarrow 0\le y\le \frac{3}{2}$ или $D(x)=\left[0;\frac{3}{2}\right]$. Это значит, что $E(y)=\left[0;\frac{3}{2}\right]$.

Пример 2.5. Пусть $y=\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)$. По определению функции арксинуса имеем $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$. С другой стороны, $\lg\frac{x}{2}=\sin y$ или $\lg x=1+\sin y$. Отсюда $x=10^{1+\sin y}=10\cdot 10^{\sin y}$. Имеем $D(x)\colon \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}, \\ y\in R, \end{cases} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$E(y)=D(x)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. □

Пример 2.6. Найдем область значений функции $y=\lg(1-2\cos x)$. Решая уравнение $y=\lg(1-2\cos x)$ относительно x, получаем:

$$y=\lg(1-2\cos x)\ \ 1-2\cos x=10^y\Rightarrow\cos x=\frac{1-10^y}{2}\Rightarrow x=\arccos\frac{1-10^y}{2}\ .$$

Отсюда $D(x)\colon \left|\frac{1-10^y}{2}\right|\le 1\Rightarrow -1\le 10^y\le 3\Rightarrow 10^y\le 3\Rightarrow y\le\lg 3$. $D(x)=E(y)=(-\infty;\lg 3)$. □

Пример 2.7. Найдем $E(y)$ функции $y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. Аналогично с предыдущей задачей

имеем: $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow\sqrt{x}=\dfrac{y+1}{y-1}$. Отсюда

$$D(x):\begin{cases}\dfrac{y+1}{y-1}\geq 0,\\ y\neq 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y\leq -1 \text{ èëè } y\geq 1,\\ y\neq 1,\end{cases}\Rightarrow y\leq -1 \text{ èëè } y\geq 1.$$

Это значит, что $E(y)=(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$. □

III. Известно, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке (теорема Вейерштрасса).

Пример 2.8. Для квадратной функции $y=ax^2+bx+c$ имеем $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Функция непрерывна на $(-\infty;+\infty)$. Пусть $a>0$. Т.к. $y'=2ax+b$, то $x_{\min}=-\dfrac{b}{2a}$ и $y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. Следовательно, $E(y)=\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a};+\infty\right)$. Аналогично, при $a<0$ находим $E(y)=\left(-\infty;\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$. □

Пример 2.9. Найдем область значений функции $y=x^4-x^2$. Очевидно, что $D(y)=(-\infty;+\infty)$ и она непрерывна. Найдем наименьшие и наибольшие значения данной функции на $(-\infty;+\infty)$. Имеем $y'=4x^3-2x$, то $y'=0\Rightarrow 4x^3-2x=0\Rightarrow x_1=0,\ x_{2;3}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. данная функция имеет 3 критические точки. Точки экстремума: $x_{\max}=0$, $x_{\min}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому $y_{\max}=0$ è $y_{\min}=-\dfrac{1}{4}$. Но при увеличений аргумента x значения функции тоже увеличиваются, т.е. $y\to+\infty$ при $x\to+\infty$. Следовательно $E(y)=\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. □

Пример 2.10. Найдем $E(y)$ функции $y=\dfrac{x^2}{e^x}$. Имеем $D(y)=(-\infty;+\infty)$. Производная $y'=\dfrac{x(2-x)}{e^x}$. Находим $x_{\min}=0,\ y_{\min}=0,\ x_{\max}=2,\ y_{\max}=\dfrac{4}{e^2}$. С другой стороны, $y=\dfrac{x^2}{e^x}\to+\infty$ при $x\to+\infty$. Таким образом, $E(y)=[0;+\infty)$. □

Пример 2.11. Пусть дана $y=x\sqrt{1-x}$. Область определения данной функции $D(y)=(-\infty;1]$. Находим наименьшие и наибольшие значения функции $y=x\sqrt{1-x}$ на луче $(-\infty;1]$. Находим производную $y'=\sqrt{1-x}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{1-2x}{2\sqrt{1-x}}$. Функция имеет локальный максимум $y_{max}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ в точке $x=\frac{1}{2}$. С другой стороны, $y=x\sqrt{1-x}\to+\infty$ при $x\to-\infty$. Следовательно, областью значений данной функции является луч $E(y)=(-\infty;\frac{\sqrt{2}}{4}]$. □

Пример 2.12. Найти область значений функции $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{7-x}$. Т.к. область оп-

ределения $D(y)=[3,7]$, то находим наименьшие и наибольшие значения данной функции на сегменте $[3,7]$. Для этого находим первую производную функции: $y'=\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{(x-3)(7-x)}}$. Решим уравнение $\sqrt{7-x}-\sqrt{x-3}=0$. Это уравнение имеет только один корень $x=5$. Это значит, что функция имеет локальный экстремум в точке $x=5$. Для решения вопроса о наибольшем и наименьшем значении на отрезке $[3,7]$ надо рассмотреть значения функции в точках $x=3, x=\frac{1}{2}, x=7$. Находим $y(3)=y(7)=2, y\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{2}$. Сравнивая эти значения, получаем $E(y)=[2;2\sqrt{2}]$. □

IV. На практике можно найти области значений некоторых тригонометрических функций, а именно функций вида $y=a\sin x+b\cos x$, где a,b – данные числа.

Действительно,

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi),$$

где $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Так как для любых x имеют $|\sin x|\le 1$, $|\cos x|\le 1$, то

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le\sin(x+\varphi)\le\sqrt{a^2+b^2}.$$

Используя это замечательное неравенство, легко можно найти область значений функции вида $y=a\sin x+b\cos x$.

Пример 2.13. Найдем область значений функции $y=\sin x-5\cos x$. Т.к. $a=1$, $b=5$, то $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{26}$. Поэтому $-\sqrt{26}\le\sin x-5\cos x\le\sqrt{26}$ или $E(y)=\left[-\sqrt{26};\sqrt{26}\right]$. □

3. О периодических функциях

Одним из важных свойств функции является ее периодичность.

Определение 3.1. Функция $y=f(x)$ называется периодической с периодам T, если существует число $T>0$, такое, что для любого значения аргумента x из ее области определение $D(y)$ имеют место $x+T\in D(y)$, $x-T\in D(y)$ и $f(x+T)=f(x)$.

Пример 3.1. Докажем, что функция $f(x)=\sin^2 x$ периодическая. Так как $D(f)=(-\infty;+\infty)$, то для любого x и числа $T>0$ верно $x\pm T\in D(f)$. Докажем, что найдется число $T>0$ такое, что $\sin^2(x+T)=\sin^2 x$. В самом деле,

$$\sin^2(x+T)=\sin^2 x\Rightarrow\sin^2(x+T)-\sin^2 x=0\Rightarrow\frac{1-\cos(2x+2T)}{2}-\frac{1-\cos 2x}{2}=0\Rightarrow$$

$$\cos 2x-\cos(2x+2T)=0\Rightarrow 2\sin(2x+2T)\sin T=0\Rightarrow\sin T=0\Rightarrow T=\pi k,\text{ где } k\in N.\ \square$$

Пример 3.2. Докажем, что функция Дирихле $D(x)=\begin{cases}1, & x-\text{ðàöèîíàëüíîå ÷èñëî},\\ 0, & \tilde{o}-\text{èððàöèîíàëüíîå ÷èñëî},\end{cases}$ является периодической с периодом любого рационального числа. Действительно, если $T>0$ – любое рациональное число, то $x+T$ – тоже иррациональное число. Поэтому $D(x+T)=D(x)$. □

Свойства периодических функций

1^0. Если $T>0$ период функции $f(x)$, то $(-T)$ также является периодом.

2^0. Если $T>0$ период функции $f(x)$, то для любого целого числа k числа kT также

являются ее периодом. Действительно, $f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=...=f(x+kT)$, $f(x)=f(x-T)=f(x-2T)=...=f(x-kT)$.

3^0. Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ периодические с периодом $T>0$, то функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ тоже являются периодическими с периодом T.

4^0. Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ периодические с периодами T_1 и T_2 соответственно, то число T кратное T_1 и T_2 является периодом их суммы, разности, произведения и частного.

В самом деле, пусть $T=k_1T_1$ и $T=k_2T_2$, где k_1 и k_2 – натуральные числа. Тогда для функции $\varphi(x)=f(x)\pm g(x)$ имеем $\varphi(x+T)=f(x+T)\pm g(x+T)=f(x+k_1T_1)\pm g(x+k_2T_2)=$ $=f(x)\pm g(x)=\varphi(x)$ и т.д.

Определение 3.1. Наименьший положительный период периодической функции называется её основным периодом и обозначается T_0.

Например, основной период функций $\sin x$ и $\cos x$ равен $T_0=2\pi$, а для функций tgx и $ctgx$ равен $T_0=\pi$.

Теорема 3.1. Если T_0 основной период функции $f(x)$, то число $\frac{T_0}{\omega}$ является основным периодом функции $y=f(\omega x)$.

Доказательство. Положим $f(\omega x)=\varphi(x)$. Тогда для любого число $x+\ell$, принадлежащего области определения функции $\varphi(x)$, имеем $f(\omega(x+\ell))=f(\omega x+\omega\ell)$.

Так как T_0 основной период функции $y=f(x)$, то $\omega\ell=T_0$. Отсюда $\ell=\frac{T_0}{\omega}$, это означает, что $\frac{T_0}{\omega}$ есть основной период функции $f(\omega x)$. Теорема доказана.

Например, основной период функций $\sin 2x$ равен $T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi$, а функции $\sin\frac{2x}{3}$ равен $T_0=2\pi:\frac{2}{3}=3\pi$ и т.д.

Следствие. Если T_1 и T_2 основные периоды функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ соответственно, то $T_0=HOK(T_1;T_2)$ являются основным периодом их суммы, разности, произведения и частного.

Пример 3.3. Найдем основной период функции $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. Так как $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$ и основной период функции $\cos 4x$ равен $T_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, то основным периодом данной функции является $T_0=\frac{\pi}{2}$. □

Пример 3.4. Найдем наименьший период функции $y=\sin x+2\sin 2x+3\cos 3x$. Основной период функции $\sin x$ равен $T_1=2\pi$, период функций $\sin 2x$ равен $T_2=\pi$, а функции $\sin 3x$ равен $T_3=\frac{2\pi}{3}$. Поэтому по следствию наименьший период данной функции равен $T_0=HOK(T_1;T_2;T_3)=HOK\left(2\pi_1;\pi;\frac{2}{3}\pi\right)=12\pi$. Из этой задачи возникает вопрос: как найти НОК несколько рациональных чисел. □

Теорема 3.2. Если $\frac{p_i}{q_i}\cdot T$ (где p_i , q_i – натуральные числа и взаимно простые) основной период функции $f_i(x)$, то основной период функции $y=f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)$ (или $y=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot...\cdot f_n(x)$ и.т.д.) равен $T_0=\frac{НОК(p_1;p_2;...;p_n)}{НОД(q_1;q_2;...;q_n)}\cdot T$.

Доказательство. Пусть $T_0=\frac{p}{q}\cdot T$. Тогда должно найдется такое целое число k_i , что $\frac{p}{q}=\frac{p_i}{q_i}\cdot k_i \ \ (i=1,2,...,n)$. Отсюда $k_i=\frac{p\cdot q_i}{q\cdot p_i}$. Так как p *и* q , p_i *и* q_i – взаимно простые, то для всех p_i *и* q_i имеют p и p_i *и* q_i и q . Это значит, что $p=НОК(p_1,p_2,...,p_n)$ и $q=НОД(q_1,q_2,...,q_n)$. Теорема доказана.

Пример 3.5. Найдем наименьшее общее кратное рациональных чисел $\frac{5}{9},\frac{5}{12},\frac{10}{27}$. По формуле (1) имеем $НОК\left(\frac{5}{9},\frac{5}{12},\frac{10}{27}\right)=\frac{НОК(9,12,27)}{НОД(5,5,10)}=\frac{108}{5}=21\frac{3}{5}$. □

Пример 3.6. Найдем наименьший период функции $y=\sin\frac{2x}{5}+2\cos\frac{3x}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x$. Так как $T_1=5\pi, T_2=\frac{4}{3}\pi, T_3=\frac{1}{2}\pi$, то по теореме 2 имеем

$$T=НОК(T_1,T_2,T_3)=\frac{НОК(5,4,1)}{НОД(1,2,3)}\cdot\pi=\frac{20\pi}{1}=20\pi .$$

Рассмотрим вопрос о том, как установить, является данная функция периодической или нет. Для этого запишем определение периодической функции в виде формулы на логико-математическом языке:

$$(f(x)\text{ – периодическая })\overset{опр}{\Leftrightarrow}\left(\forall x\in D(f)\right)\left(\exists T>0\right)\left(x\pm T\in D(f)\wedge\left(f(x+T)=f(x)\right)\right).$$

Тогда $(f(x)$ – не периодическая $)\overset{опр}{\Leftrightarrow}\left(\exists x\in D(f)\right)\left(\exists T>0\right)$

$$\left(x+T\notin D(f)\vee x+T\notin D(f)\vee f(x+T)\neq f(x)\right),$$

т.е. функция $f(x)$ не является периодической, если существует x из области определения $D(y)$, такое, что для любого значения $T>0$ не выполняется хотя бы одного из условий $x+T\in D(f), x-T\in D(f)$ *и* $f(x+T)=f(x)$.

Пример 3.7. Докажем, что функция $f(x)=\cos x^2$ не является периодической. Будем рассуждать от противного. Предположим, что функция $f(x)=\cos x^2$ периодическая $T>0$. Тогда по определению периодической функции должно выполняться равенство $\cos(x+T)^2=\cos x^2$. Т.к. $\cos(x+T)^2-\cos x^2=0,\ -2\sin\frac{(x+T)^2+x^2}{2}\cdot\sin\frac{(x+T)^2-x^2}{2}=0$, то найдется целое число k, что $x^2+2Tx+T^2\pm x^2=\pi k$. Но это тождество не выполняется, так как слева стоит непрерывная, а справа дискретная. □

Пример 3.8. Докажем, что функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ не периодическая. Имеем

$D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Ясно, что для любого положительного числа T имеет $-T\in D(f)$. Но найдется значение $x=T$, что $-T+T=0\in D(f)$. Это значит, что данная функция не периодическая. □

Пример 3.9. Доказать, что функция $f(x)=x^3$ не периодическая. Для любого числа $T>0$ имеют $x\pm T\in D(f)=R$. Пусть $x=0$. Тогда $f(x+T)=f(T)=T^3>0$ и $f(x)=f(0)=0^3=0$ получили противоречие, так как $f(x+T)\neq f(x)$. □

Пример 3.10. Доказать, что функция $f(x)=x+\sin x$ не периодическая. Предположим от противного, что данная функция периодическая с периодом $T>0$. Так как $D(f)=R$, то для любого x верно, что $x\pm T\in D(f)$. Теперь рассмотрим равенство

$$f(x+T)=f(x).\ f(x+T)=f(x)\Rightarrow(x+T)+\sin(x+T)=x+\sin x\Rightarrow$$
$$\sin x-\sin(x-T)=T\Rightarrow -2\sin\frac{T}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)=T\Rightarrow\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)=\frac{T}{2\sin\frac{T}{2}}.$$

Однако данное равенство не выполняется для любого x, так как справа стоит постоянное число, а слева непостоянное. Следовательно, данная функция не является периодической. □

4. Формула разложения дроби вида $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$

В курсе математики не только элементарной, но и высшей часто приходится находить сумму рациональных дробей таких, как $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$.

Ясно, что основным способом нахождения суммы дробей вышеуказанного вида является представление каждой дроби суммы в виде суммы простейших дробей, т.е в виде суммы дробей вида $\frac{A}{x-a}$. Здесь мы будем рассматривать вопрос, как представить рациональную дробь, в знаменателе которой стоит произведение чисел, образующих арифметическую прогрессию, в виде суммы простейших дробей.

Воспользуемся методом математической индукции.

1. Ясно, что $\frac{1}{k(k+d)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+d}\right)$.
2. Дробь может быть представлена в виде $\frac{1}{k(k+d)(k+2d)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+d}+\frac{C}{k+2d}$.

Коэффициенты *A*, *B* и *C* можно определить по следующему. Правую часть равенства приводят к общему знаменателю и затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях k у многочленов в числителях обоих частей получившегося равенства.

В итоге получим систему уравнений с неизвестными коэффициентами. Этот метод нахождения коэффициентов называется методом неопределенных коэффициентов.

По этому правилу находим коэффициенты *A*, *B* и *C*. Из равенства

$1=A(k^2+3dk+2d^2)+B(k^2+2dk)+C(k^2+dk)$ получим

$$\begin{array}{lll} k^2 & A+B+C=0 & A=\frac{1}{2d^2} \\ k & 3Ad+2Bd+Cd=0 \quad\Rightarrow & B=-\frac{1}{d^2} \end{array}$$

$k^0 \quad 2Ad^2 = 1 \qquad C = \dfrac{1}{2d^2}$

Таким образом, $\dfrac{1}{k(k+d)(k+2d)} = \dfrac{1}{2d^2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{k+d} + \dfrac{1}{k+2d}\right)$.

3. Далее $\dfrac{1}{k(k+d)(k+2d)(k+3d)} = \dfrac{A}{k} + \dfrac{B}{k+d} + \dfrac{C}{k+2d} + \dfrac{D}{k+3d}$ и решая методом неопределенных коэффициентов, получим $A = \dfrac{1}{6d^3}$, $B = -\dfrac{3}{6d^3}$, $C = \dfrac{3}{6d^3}$, $D = -\dfrac{1}{6d^3}$. Поэтому $\dfrac{1}{k(k+d)(k+2d)(k+3d)} = \dfrac{1}{6d^3}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{3}{k+d} + \dfrac{3}{k+2d} - \dfrac{1}{k+3d}\right)$.

Запишем полученные результаты в виде

1. $\dfrac{1}{k(k+d)} = \dfrac{1}{1!d}\left(\dfrac{C_1^0}{k} - \dfrac{C_1^1}{k+d}\right)$;

2. $\dfrac{1}{k(k+d)(k+2d)} = \dfrac{1}{2!d^2}\left(\dfrac{C_2^0}{k} - \dfrac{C_2^1}{k+d} + \dfrac{C_2^2}{k+2d}\right)$;

3. $\dfrac{1}{k(k+d)(k+2d)(k+3d)} = \dfrac{1}{3!d^3}\left(\dfrac{C_3^0}{k} - \dfrac{C_3^1}{k+d} + \dfrac{C_3^2}{k+2d} - \dfrac{C_3^3}{k+3d}\right)$.

Следовательно, в общем случае

$$\frac{1}{k(k+d)(k+2d)\ldots(k+nd)} = \frac{1}{n!d^n}\left(\frac{C_n^0}{k} - \frac{C_n^1}{k+d} + \frac{C_n^2}{k+2d} - \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{k+nd}\right).$$

Будем доказывать утверждение с помощью индукции по n, т.е. докажем при $n+1$, что

$$\frac{1}{k(k+d)(k+2d)\ldots(k+(n+1)d)} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!d^{n+1}}\left(\frac{C_{n+1}^0}{k} - \frac{C_{n+1}^1}{k+d} + \frac{C_{n+1}^2}{k+2d} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{C_{n+1}^{n+1}}{k+(n+1)d}\right).$$

Действительно,

$$\frac{1}{k(k+d)(k+2d)\ldots(k+(n+1)d)} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)d}\cdot\left[\frac{1}{k(k+d)(k+2d)\ldots(k+nd)} - \frac{1}{k(k+d)(k+2d)\ldots(k+(n+1)d)}\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)d}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{n!d^n}\left(\frac{C_n^0}{k} - \frac{C_n^1}{k+d} + \frac{C_n^2}{k+2d} - \ldots + (-1)^n\frac{C_n^n}{k+nd}\right) - \frac{1}{(n+1)!d^{n+1}}\left(\frac{C_{n+1}^0}{k} - \frac{C_{n+1}^1}{k+d} + \frac{C_{n+1}^2}{k+2d} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{C_{n+1}^{n+1}}{k+(n+1)d}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!d^{n+1}}\left(\frac{C_{n+1}^0}{k} - \frac{C_n^0 + C_n^1 +}{k+d} + \frac{C_n^1 + C_n^2}{k+2d} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{C_n^n}{k+(n+1)d}\right),$$

$$\frac{1}{k(k+d)(k+2d)...(k+(n+1)d)}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!d^{n+1}}\left(\frac{C_{n+1}^0}{k}-\frac{C_{n+1}^1}{k+d}+\frac{C_{n+1}^2}{k+2d}-...+(-1)^{n+1}\frac{C_{n+1}^{n+1}}{k+(n+1)d}\right),$$

где $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$, что и требовалось доказать.

Например, найдем сумму $\frac{1}{1\cdot5\cdot8}+\frac{1}{5\cdot8\cdot11}+...+\frac{1}{n(n+3)(n+6)}$.

Так как по условию задачи $k=2,\ d=3$ по доказанной формуле имеем

$$\frac{1}{n(n+3)(n+6)}=\frac{1}{2!3^2}\left(\frac{C_2^0}{n}-\frac{C_2^1}{n+3}+\frac{C_2^2}{n+6}\right)=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+3}+\frac{1}{n+6}\right)=\frac{1}{18}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{2}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{8}-\frac{2}{11}+\frac{1}{14}+...+\frac{1}{n-6}-\frac{2}{n-3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n-3}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+3}+\frac{1}{n+6}\right)=$$

$$=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{2}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{8}-\frac{2}{11}+\frac{1}{14}+...+\frac{1}{n-6}-\frac{2}{n-3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n-3}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+3}+\frac{1}{n+6}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{n^2+9n+8}{10(n+3)(n+6)}=\frac{1}{60}\cdot\frac{n^2+9n+8}{n^2+9n+18}.$$

Заключение

Таким образом, рассмотрен достаточно широкий спектр задач анализа курса высшей математики. Материал данной статьи может быть полезен при изучении дисциплин математического профиля в курсах высшей математики и в средней школе.