А.Н. ГУЛЮГИН
аналитик инвестиционной компании «АЛТЫН Инвест»

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОКУПКИ АКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ КОМБИНАЦИИ КРИТЕРИЯ ГЕРМЕЙЕРА И ОБОБЩЁННОГО КРИТЕРИЯ ГУРВИЦА ОТНОСИТЕЛЬНО РИСКОВ

Задача выбора оптимальной стратегии для инвестора на рынке акций уже рассматривалась ранее [2]. Напомним её условия. Пусть инвестор решил вложить свои средства в покупку акций одной из российских компаний: «Газпром», «Лукойл», «Норникель», «РАО ЕЭС», «Сургутнефтегаз», являющихся «голубыми фишками». При этом он предпочитает руководствоваться доходностью от инвестирования, абстрагируясь от риска. Так как выбор акций конкретной компании для большинства инвесторов зависит скорее не от поведения конкретных контрагентов на фондовом рынке, а от складывающейся в данный момент на фондовом рынке конъюнктуры, то для моделирования поведения инвестора было решено использовать модель «игра с природой», в которой игрок A является инвестором. Его чистые стратегии: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – выбор, соответственно, компаний «Газпром», «Лукойл», «Норникель», «РАО ЕЭС», «Сургутнефтегаз».

В качестве природы был взят индекс РТС, являющийся основным индикатором российского фондового рынка. Предполагалось, что природа может находиться в одном из своих состояний: $П_1$, $П_2, П_3, П_4, П_5$, представляющих собой принадлежность доходности индекса РТС соответствующим диапазонам:

$$(-\infty; -1{,}5\%], (-1{,}5\%; -0{,}5\%],$$
$$(-0{,}5\%; 0{,}5\%], (0{,}5\%; 1{,}5\%], (1{,}5\%; +\infty).$$

Выигрыши a_{ij}; $i = 1,...,m$; $j = 1,...,n$, в результате выбора инвестором стратегии A_i и нахождения природы в состоянии $П_j$, измерялись доходностью акций. По результатам проведённых статистических наблюдений, вектор приближенных вероятностей состояний природы имеет следующий вид:

$$q = (q_1 = p(П_1) \approx 13\%,\ q_2 = p(П_2) \approx 15\%,$$
$$q_3 = p(П_3) \approx 30\%,\ q_4 = p(П_4) \approx 21\%,\ q_5 = p(П_n) \approx 21\%).$$

В результате построения рыночной модели получена следующая зависимость между доходностью отдельной акции и доходностью индекса РТС:

Доходность индекса РТС / Доходность акции	– 2%	– 1%	0	1%	2%
«Газпром»	– 2,42	– 1,25	– 0,09	1,08	2,24
«Лукойл»	– 2,45	– 1,27	– 0,09	1,10	2,28
«Норникель»	– 2,58	– 1,25	0,08	1,41	2,74
«РАО ЕЭС»	– 2,25	– 1,02	0,20	1,42	2,64
«Сургутнефтегаз»	– 2,99	– 1,61	– 0,22	1,16	2,54

Используя некоторые приближения, связанные с приравниванием конкретного числового значения целому интервалу, была получена матрица выигрышей, в последней дополнительной строке которой расположены вероятности состояний природы.

A_1 \ Π_j	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
A_1	– 2,42	– 1,25	– 0,09	1,08	2,24
A_2	– 2,45	– 1,27	– 0,09	1,10	2,28
A_3	– 2,58	– 1,25	0,08	1,41	2,74
A_4	– 2,25	– 1,02	0,20	1,42	2,64
A_5	– 2,99	– 1,61	– 0,22	1,16	2,54
q_j	0,13	0,15	0,30	0,21	0,21

(1)

Для поиска оптимальной стратегии игрока был применён критерий, представляющий собой комбинацию критерия Гермейера относительно выигрышей и обобщённого критерия Гурвица относительно выигрышей [2]. Найдём теперь оптимальную чистую стратегию игрока, используя комбинированный критерий Гермейера относительно рисков и обобщённый критерий Гурвица относительно рисков.

Рассмотрим игру с природой [1, гл.1], в которой $S_A^C = \{A_1,..., A_m\}$[1] $(m \geq 2)$ – множество чистых стратегий игрока A, $\Pi_1,..., \Pi_n$ $(n \geq 2)$ – состояния природы, $q = (q_1 = p(\Pi_1),..., q_n = p(\Pi_n))$ – вектор вероятностей состояний природы, удовлетворяющий условиям[2]:

$$q_j > 0,\ j = 1,...,n;\ q_1 + ... + q_n = 1. \qquad (2)$$

Пусть

$\boldsymbol{A} =$

A_i \ Π_j	Π_1	…	Π_n
A_1	a_{11}	…	a_{1n}
…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mn}
q_j	q_1	…	q_n

– матрица выигрышей игрока A с добавленной последней строкой вероятностей состояний природы; $\beta_j = \max\{a_{ij} : i = 1,...,m\}$ – показатель благоприятности состояния природы Π_j, а $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$ – риск игрока A при выборе им стратегии A_i, при условии нахождения природы в состоянии Π_j, состоящий в неполучении наибольшего выигрыша β_j. Очевидно, что $r_{ij} \geq 0, i = 1,..., m; j = 1,..., n$.

Заменяя в матрице $\boldsymbol{A}$ все элементы a_{ij} на элементы r_{ij}, перейдём к матрице рисков $\boldsymbol{R}_A$, имеющей ту же размерность, что и матрица $\boldsymbol{A}$:

$\boldsymbol{R}_A =$

A_i \ Π_j	Π_1	…	Π_n
A_1	r_{11}	…	r_{1n}
…	…	…	…
A_m	r_{m1}	…	r_{mn}
q_j	q_1	…	q_n

Умножая каждый элемент r_{ij}, $i = 1,...,m$, матрицы $\boldsymbol{R}_A$ при состоянии природы Π_j, $j = 1,...,n$ на вероятность q_j этого состояния, получим матрицу Гермейера относительно рисков $\boldsymbol{G}^r(\boldsymbol{q})$:

$\boldsymbol{G}^r(\boldsymbol{q}) =$

A_i \ Π_j	Π_1	…	Π_n
A_1	$r_{11} q_1$	…	$r_{1n} q_n$
…	…	…	…
A_m	$r_{m1} q_1$	…	$r_{mn} q_n$

Каждый элемент $r_{ij} q_j$ матрицы $\boldsymbol{G}^r(\boldsymbol{q})$ количественно характеризует степень удовлетворённости игрока A риском r_{ij} с учётом вероятности q_j состояния природы Π_j и называется элементом Гермейера риска r_{ij} [1, с. 227].

Если показатель неэффективности стратегии A_i определить как сумму элементов Гермейера рисков $r_{ij} q_j$ в i-той строке матрицы $\boldsymbol{G}^r(\boldsymbol{q})$, то получим критерий Байеса относительно рисков [1, с. 99].

Если же показатель неэффективности определить как наибольший элемент в i-той строке матрицы $\boldsymbol{G}^r(\boldsymbol{q})$, то получим критерий Гермейера относительно рисков [1, с. 226]. Однако критерий Гермейера относительно рисков (так же как и неэквивалентный ему критерий Гермейера относительно выигрышей) является критерием крайнего пессимизма, так как учитывает только наихудшие для игрока A состояния природы, т.е. только те состояния природы, при которых риск каждой чистой стратегии с учётом вероятностей этих состояний природы наибольший, и, следовательно, наименее удовлетворительный для игрока A. Поэтому, применяя критерий Гермейера относительно рисков, желание не проиграть у игрока превалирует над желанием выиграть. Ситуации, в которых пессимистический настрой игрока является нецелесообразным, на практике встречаются достаточно часто.

Если же показатель неэффективности стратегии A_i определить как наименьший элемент i-той строке матрицы $\boldsymbol{G}^r(\boldsymbol{q})$, то получим миниминный критерий с учётом вероятностей состояний природы [1, с. 362], являющийся противоположным по смыслу критерию Гермейера относительно рисков и выражающий крайне оптимистичную настроенность игрока A. Такие принципы выбора стратегий на практике также являются неприемлемыми.

Для того, чтобы сгладить экстремальности перечисленных критериев, можно к матрице $\boldsymbol{G}^r(\boldsymbol{q})$ применить комбинированный критерий Гермейера-Гурвица относительно рисков [3]. Однако такой критерий учитывает только наибольшие

[1] В верхнем индексе обозначения $S_A^C = \{A_1,..., A_m\}$ буква C – первая буква английского *clean* – чистый.

[2] Состояния природы, вероятность которых равна нулю, не рассматриваются.

и наименьшие элементы в каждой строке матрицы $\boldsymbol{G^r(q)}$, абстрагируясь от промежуточных.

Поэтому, для того, чтобы восполнить данный недостаток, предложим новый критерий, являющийся комбинацией критерия Гермейера относительно рисков и обобщённого критерия Гурвица относительно рисков.

В каждой строке матрицы $\boldsymbol{G^r(q)}$ переставим все элементы в невозрастающем порядке:

$$r_{il_1(i)} \geq r_{il_2(i)} \geq ... \geq r_{il_n(i)},\ i = 1,..., m. \qquad (3)$$

где $l_1(i),..., l_n(i)$ – некоторая перестановка номеров $1,..., n$, зависящая от стратегии A_i.

Для упрощения записи обозначим $r_{il_j(i)} = h_{ij}$, тогда неравенства (3) перепишутся в следующем виде:

$$h_{i1} \geq h_{i2} \geq ... \geq h_{in},\ i = 1,..., m. \qquad (4)$$

а матрица $\boldsymbol{G^r(q)}$ преобразуется в матрицу $\boldsymbol{H(q)}$:

$\boldsymbol{H(q)} =$

Ранг / A_i	1	…	n
A_1	h_{11}	…	h_{1n}
…	…	…	…
A_m	h_{m1}	…	h_{mn}
	h_1	…	h_n

к которой присоединена дополнительная строка из наименьших элементов в столбцах:

$$h_j = min\ \{h_{ij}: 1 \leq i \leq m\},\ j = 1,..., n. \qquad (5)$$

Элементы матрицы $\boldsymbol{H(q)}$, стоящие в j-м столбце, будем называть элементами Гермейера риска j-го ранга.

Тогда элементы Гермейера 1-го ранга представляют собой показатели неэффективности стратегий игрока по критерию Гермейера относительно рисков: $h_{i1} = \max\{q_j r_{ij} : 1 \leq j \leq n\} = G_i^r(q)$, $i = 1,..., m$, а $h_1 = \min\{h_{i1} : 1 \leq i \leq m\} = G^r_{S_A^C}(q)$ – есть цена игры в чистых стратегиях по критерию Гермейера относительно рисков.

Элементы Гермейера n-го ранга будут являться показателями неэффективности стратегий по миниминному критерию с учётом вероятностей состояний природы: $h_{in} = \min\{q_j r_{ij} : 1 \leq j \leq n\} = \mu_i(q)$, $i = 1,..., m$, а $h_n = \min\{h_{in} : 1 \leq i \leq m\} = \mu_{S_A^C}(q)$ – есть цена игры в чистых стратегиях по миниминному критерию с учётом вероятностей состояний природы. Нетрудно видеть, что $\mu_{S_A^C}(q) = 0$ при любом векторе $q = (q_1,..., q_n)$ состояний природы.

Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1,..., \lambda_n)$ – вектор, координаты которого удовлетворяют условиям

$$\lambda_j \geq 0;\ j = 1,..., n;\ \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1 \qquad (6)$$

и несут следующую смысловую нагрузку: λ_j количественно характеризует субъективное представление игрока A о том, что при выборе им любой чистой стратегии он получит выигрыш, элемент Гермейера которого имеет j-й ранг.

Показателем пессимизма игрока A назовем число

$$\lambda_p = \sum_{j=1}^{n/2} \lambda_j \text{, если } n \text{-чётное,}$$

$$\text{и } \lambda_p = \sum_{j=1}^{[n/2]} \lambda_j + (1/2)\lambda_{[n/2]+1}, \text{ если } n \text{ – нечётное,} \qquad (7)$$

где $[n/2]$ – целая часть числа $n/2$. Показатель оптимизма игрока A определим так:

$$\lambda_o = \sum_{j=(n/2)+1}^{n} \lambda_j \text{, если } n \text{-чётное,}$$

$$\text{и } \lambda_o = (1/2)\lambda_{[n/2]+1} + \sum_{j=[n/2]+2}^{n} \lambda_j, \qquad (8)$$

$$\text{если } n \text{ – нечётное.}$$

В силу условий (6), очевидно, что $\lambda_p + \lambda_o = 1$.

Критерием, являющимся комбинацией критерия Гермейера оптимальности чистых стратегий относительно рисков и обобщённого критерия Гурвица оптимальности чистых стратегий относительно рисков с вектором коэффициентов $\bar{\lambda}$, сокращённо $(GEHur)^r(q,\bar{\lambda})$ – критерием, назовём критерий, по которому:

– показателем неэффективности чистой стратегии A_i, или $(GEHur)^r(q,\bar{\lambda})$ – показателем неэффективности стратегии A_i, называется число

$$(GEHur)_i^r(q;\bar{\lambda}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_{ij},\ i = 1,..., m; \qquad (9)$$

– ценой игры в чистых стратегиях, или $(GEHur)^r(q;\bar{\lambda})$ – ценой игры в чистых стратегиях, называется минимальный из показателей неэффективности (9):

$$(GEHur)^r_{S_A^C}(q;\bar{\lambda}) = \min\{(GEHur)_i^r(q;\bar{\lambda}) :$$

$$: 1 \leq i \leq m\} = \min\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_{ij} : 1 \leq i \leq m\}; \qquad (10)$$

– оптимальной во множестве чистых стратегий, или $(GEHur)^r(q;\bar{\lambda})$ – оптимальной во множестве S_A^C, называется чистая стратегия A_k с минимальным $(GEHur)^r(q;\bar{\lambda})$ – показателем неэффективности:

$$(GEHur)^r_k(q;\bar{\lambda})\,\bar{\lambda}\ \min\{(GEHur)_i^r(q;\bar{\lambda})\,\bar{\lambda}$$

$$: 1 \leq i \leq m\} = (GEHur)^r_{S_A^C}(q;\bar{\lambda}). \qquad (11)$$

Обозначим через $(S_A^C)^{O((GEHur)^r(q;\bar{\lambda}))}$ множество всех стратегий, $(GEHur)^r(q;\bar{\lambda})$ – оптимальных во множестве S_A^C.

Установим границы для показателей неэффективности чистых стратегий по $(GEHur)^r(q;\bar{\lambda})$ – критерию. Используя условия (6), неравенства (4) и определение (9), будем иметь:

$$\mu_i(q) = h_{in} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_{in} \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_{ij} = (GEHur)_i^r(q;\bar{\lambda}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_{ij} \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_{i1} = h_{i1} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = h_{i1} = G_i^r(q).$$

Таким образом,

$$\mu_i(q) \le (GEHur)_i^r(q;\bar{\lambda}) \le G_i^r(q), i=1,..., m, \quad (12)$$

для любых векторов $q = (q_1,..., q_n)$ и $\bar{\lambda} = (\lambda_1,..., \lambda_n)$ со свойством (6).

Установим теперь границы для цены игры в чистых стратегиях по $(GEHur)^r(q;\bar{\lambda})$ – критерию. Поскольку левое неравенство (12) справедливо для любого $i=1,..., m$, то оно будет справедливым, в частности, и для того $i = k$, при котором $(GEHur)_k^r(q;\bar{\lambda})$ минимально, т.е.:

$$\mu_k(q) \le (GEHur)_k^r(q;\bar{\lambda}) = (GEHur)_{S_A^C}^r(q;\bar{\lambda}). \quad (13)$$

Но так как $0 \le \mu_{S_A^C}(q) \le \mu_k(q)$, то из (13) получаем

$$0 \le \mu_{S_A^C}(q) \le (GEHur)_{S_A^C}^r(q;\bar{\lambda}). \quad (14)$$

Так как правое неравенство (12) справедливо для любого $i=1,..., m$, то оно будет справедливым, в частности, и для $i = l$, для которого $G_l^r(q)$ минимально, то есть $G_l^r(q) = G_{S_A^C}^r(q)$. Следовательно, по определению (10)

$$(GEHur)_{S_A^C}^r(q;\bar{\lambda}) \le (GEHur)_l^r(q;\bar{\lambda}) \le G_{S_A^C}^r(q). \quad (15)$$

Из (14) и (15) получаем

$$0 = \mu_{S_A^C}(q) \le (GEHur)_{S_A^C}^r(q;\bar{\lambda}) \le G_{S_A^C}^r(q). \quad (16)$$

для любого вектора $\bar{\lambda} = (\lambda_1,..., \lambda_n)$ со свойством (5) и любого вектора $q = (q_1,..., q_n)$ вероятностей состояний природы со свойством (2).

Левое неравенство неравенства (16) можно уточнить. В самом деле, используя (10), (6) и определение h_j, получим

$$(GEHur)_{S_A^C}^r(q;\bar{\lambda}) = \min\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_{ij} : 1 \le i \le m\} \ge$$

$$\ge \min\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_j : 1 \le i \le m\} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_j = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j h_j. \quad (17)$$

Приступим к решению поставленной задачи выбора оптимальной стратегии для инвестора на рынке акций с помощью комбинированного критерия Гермейера относительно рисков и обобщённого критерия Гурвица относительно рисков. Нетрудно заметить, что каждая из стратегий A_1, A_2, A_5 строго доминируется [1, § 1.3] стратегией A_4, а потому стратегии A_1, A_2, A_5 нужно удалить из рассмотрения как заведомо невыгодные. В результате из матрицы (1) получим матрицу (18)

A_1 \ Π_j	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
A_3	– 2,58	– 1,25	0,08	1,41	2,74
A_4	– 2,25	– 1,02	0,20	1,42	2,64
q_j	0,13	0,15	0,30	0,21	0,21

(18)

Преобразуем данную матрицу к матрице с неотрицательными элементами, прибавив к каждому её элементу число, не меньшее абсолютной величины наименьшего элемента (|-2,58| = 2,58). В результате матрица (18) перейдёт к следующему виду (19):

A_1 \ Π_j	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
A_3	0	1,33	2,66	3,99	5,32
A_4	0,33	1,56	2,78	4	5,22
β_j	0,33	1,56	2,78	4	5,32

(19)

В последней строке матрицы (19) расположены показатели благоприятности природы β_j.

На основе матрицы (19) составим матрицу рисков $\boldsymbol{R_A}$:

$\boldsymbol{R_A}=$

A_i \ Π_j	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
A_3	0,33	0,23	0,12	0,01	0
A_4	0	0	0	0	0,1
q_j	0,13	0,15	0,30	0,21	0,21

(20)

Умножая каждый элемент матрицы $\boldsymbol{R_A}$ при состоянии природы Π_j, на вероятность q_j, получим матрицу Гермейера относительно рисков $\boldsymbol{G^r(q)}$:

$\boldsymbol{G^r(q)}=$

A_i \ Π_j	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
A_3	0,043	0,035	0,036	0,002	0
A_4	0	0	0	0	0,02
q_j	0,13	0,15	0,30	0,21	0,21

(21)

Переставим в каждой строке матрицы $\boldsymbol{G^r(q)}$ все элементы в невозрастающем порядке, перейдём к матрице $\boldsymbol{H(q)}$:

$\boldsymbol{H(q)}=$

A_i \ Ранги	1	2	3	4	5
A_3	0,043	0,036	0,035	0,002	0
A_4	0,02	0	0	0	0
q_j	0,13	0,15	0,30	0,21	0,21

(22)

Коэффициенты $\lambda_j, j = 1,2,3,4,5$, выбираются игроком A произвольно, исходя из субъективных соображений. Эту произвольность можно несколько ограничить, формализуя метод выбора, например, в соответствии с принципом невозрастания средних рисков для игрока-пессимиста и в соответствии с принципом неубывания средних рисков для игрока-оптимиста (см., например, [1, с. 618]).

Пусть D_1 = 0,064, D_2 = 0,036, D_3 = 0,035, D_4 = 0,002, D_5 = 0 – суммы элементов матрицы ***H(q)*** по столбцам, а D = 0,137 – сумма всех её элементов. Тогда D_1 / D = 0,47, D_2 / D = 0,26, D_3 / D = 0,25, D_4 / D = 0,02, D_5 / D = 0 – доли сумм элементов каждого столбца матрицы ***H(q)*** в сумме всех её элементов.

Пусть игрок A настроен пессимистично, тогда, в соответствии с принципом невозрастания средних рисков, коэффициенты λ_j, можно выбрать равными $D_j / D, j$ = 1, 2, 3, 4, 5, т. е.:

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1 = 0{,}47; \lambda_2 = 0{,}26; \lambda_3 = 0{,}25; \lambda_4 = 0{,}02; \lambda_5 = 0).$$

Очевидно, вектор $\bar{\lambda}$ удовлетворяет условиям (6) при n = 5.

Подсчитывая по формуле (9) показатели неэффективности стратегий A_3 и A_4, получаем:

$(GEHur)_3^r(q;\bar{\lambda}) = 0{,}038$, $(GEHur)_4^r(q;\bar{\lambda}) = 0{,}0098$.

Сравнивая полученные значения, приходим к выводу, что оптимальной стратегией является стратегия A_4 с наименьшим показателем неэффективности.

Если же игрок A настроен оптимистично, то коэффициенты λ_j, можно выбирать в соответствии с принципом неубывания средних рисков, равными $D_{6-j} / D, j$ = 1, 2, 3, 4, 5. В этом случае получаем:

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 0{,}02; \lambda_3 = 0{,}25; \lambda_4 = 0{,}26; \lambda_5 = 0{,}47).$$

Тогда показатели неэффективности стратегий A_3 и A_4 будут равны: $(GEHur)_3^r(q;\bar{\lambda}) = 0{,}0098$, $(GEHur)_4^r(q;\bar{\lambda}) = 0$. Сравнивая полученные значения, приходим к выводу, что оптимальной стратегией снова является стратегия A_4 с наименьшим показателем неэффективности.

В данной задаче результаты, полученные с помощью комбинативного критерия Гермейера и обобщённого критерия Гурвица относительно рисков, совпали с результатами, полученными с помощью комбинативного критерия Гермейера и обобщённого критерия Гурвица относительно выигрышей [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лабскер Л.Г.* Теория критериев оптимальности и экономические решения. – М.: КноРус. 2008.
2. *Лабскер Л.Г., Гулюгин А.Н.* Комбинация критерия Гермейера и обобщенного критерия Гурвица для определения оптимальности чистых стратегий относительно выигрышей в играх с природой // Управление рисками, 2008, № 2. – 43–52 с.
3. *Штохова И.Н.* Теоретико-игровое моделирование принятия решений в задаче страхования рисков космических проектов // Материалы II Международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования». – Воронеж, 11–16 декабря 2007 г.