

УДК 512.741

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМАЛЬНАЯ ГРУППА,
ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКУЮ
ФУНКЦИЮ УРОВНЯ 3¹

В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова (г. Москва)

Аннотация

Классическая теорема М. Лазара (см. [1]) о структуре кольца коэффициентов универсальной формальной группы является ключевым результатом теории одномерных формальных групп. Открытие формальной группы геометрических кобордизмов ([2], [3]) и теорема Д. Квиллена ([4]) о том, что её можно отождествить с универсальной формальной группой, позволили ввести теорию формальных групп в аппарат алгебраической топологии, включая аппарат теории родов Хирцебруха. Широко известно обязанное этому фундаментальное взаимопроникновение методов и результатов алгебраической топологии (см. [5]), алгебраической геометрии, теории функциональных уравнений и математической физики.

Важные приложения в алгебраической топологии нашли результаты теории эллиптических функций и функций Бейкера–Ахиезера, играющие фундаментальную роль в современной теории интегрируемых систем.

Актуальным стало построение универсальных формальных групп заданного вида, экспоненты которых задаются этими функциями. Известные результаты в этом направлении используют как классические, так и полученные недавно, теоремы сложения, определяющие вид формальных групп.

В настоящей работе решена давно стоявшая задача: найден вид универсальной формальной группы, экспонентой которой является эллиптическая функция уровня 3. Получены результаты о кольце коэффициентов этой группы, описаны её связи с известными универсальными формальными группами.

Ключевые слова: формальные группы, эллиптическая функция уровня 3.

Библиография: 15 названий.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (грант № 14-11-00414).

THE UNIVERSAL FORMAL GROUP THAT DEFINES THE ELLIPTIC FUNCTION OF LEVEL 3

V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova (Moscow)

Abstract

The classical theorem of M. Lazar (see [1]) on the structure of the ring of coefficients of the universal formal group is a key result of the theory of one-dimensional formal groups. The discovery of the formal group of geometric cobordisms ([2], [3]) and D. Quillen's theorem ([4]) that it can be identified with the universal formal group allowed to introduce the theory of formal groups in the apparatus of algebraic topology, including the apparatus of the theory of Hirzebruch genera. Due to this there has been a widely-known fundamental mutual penetration of methods and results of algebraic topology, (see [5]), algebraic geometry, the theory of functional equations and mathematical physics.

Important applications in algebraic topology found results of the theory of elliptic functions and Baker–Akhiezer functions, which play a fundamental role in the modern theory of integrable systems.

The construction of universal formal groups of given form, with exponents given by these functions, became actual. Known results in this direction use both classic and recently obtained addition theorems, that determine the form of formal groups.

In this paper we solved a long standing problem: we have found the form of universal formal group the exponent of which is the elliptic function of level 3. We have obtained results on the coefficient ring of this group and described its relationship with known universal formal groups.

Keywords: formal groups, elliptic function of level 3.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Эллиптический синус Якоби $sn(x)$ имеет реализацию в виде эллиптической функции уровня 2. Отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $x \mapsto (\xi, \mu)$, $\xi = sn(x)$, $\mu = sn'(x)$, униформизирует кривую

$$\mu^2 = 1 - 2\delta\xi^2 + \varepsilon\xi^4.$$

Закон сложения для этой кривой определяется законом сложения для $sn(x)$ в форме А. Кэли (см. [6])

$$\psi(x+y) = \frac{\psi(x)^2 - \psi(y)^2}{\psi(x)\psi'(y) - \psi(y)\psi'(x)}.$$

Доказано, что $sn(x)$ является экспонентой *универсальной* формальной группы вида

$$F(u, v) = \frac{u^2 - v^2}{uB(v) - vB(u)},$$

Кольцо коэффициентов $\mathcal{R}_2$ этой формальной группы вычислено в [7]. Оказывается, что $B(u)^2 = 1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4$ и поэтому $\mathcal{R}_2[\frac{1}{2}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$.

Для эллиптической функции $f(x)$ уровня 3 отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $x \mapsto (\xi, \mu)$, $\xi = f(x)$, $\mu = f'(x)$, униформизирует кривую

$$\mu^3 + 3a\xi\mu^2 = 1 + 2(a^3 + 3b)\xi^3 + (a^3 - 3b)^2\xi^6. \quad (1)$$

В настоящей работе мы показываем, что эллиптическая функция уровня 3 является экспонентой *универсальной* формальной группы вида

$$F(u, v) = \frac{u^2 C(v) - v^2 C(u)}{u C(v)^2 - v C(u)^2}, \quad (2)$$

и тем самым полностью определяется соответствующим законом сложения.

Оказывается, что эта формальная группа определена над кольцом $\mathcal{R}_3$, таким что

$$\mathcal{R}_3 \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right] = \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right] [a, b],$$

и $C(u)^2 = w(u) - au$, где $w(u) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{3}][a, b][[u]]$ — решение уравнения

$$w^3 + 3a u w^2 = 1 + 2(a^3 + 3b)u^3 + (a^3 - 3b)^2 u^6 \quad (3)$$

с начальными данными $w(0) = 1$.

Формальная группа вида (2) является специализацией формальной группы вида

$$F(u, v) = \frac{u^2 A(v) - v^2 A(u)}{u B(v) - v B(u)}, \quad (4)$$

введённой в [8]. Её кольцо коэффициентов вычислено в [7].

2. Функции Вейерштрасса

Напомним понятия из классической теории эллиптических функций (см. [6]).

Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, $L = \{2n\omega_1 + 2m\omega_2\}$, где $n, m \in \mathbb{Z}$ — решётка, порождённая $(2\omega_1, 2\omega_2)$, положим $L' = L \setminus (0, 0)$.

Эллиптической функцией (относительно решётки L) называется мероморфная двоякопериодическая функция, то есть мероморфная $f(x)$, такая что

$$f(x + 2\omega_1) = f(x), \quad f(x + 2\omega_2) = f(x).$$

Функция Вейерштрасса

$$\wp(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{l \in L'} \left(\frac{1}{(x-l)^2} - \frac{1}{l^2} \right)$$

является эллиптической (относительно решётки L). Отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $z \mapsto (\xi, \mu)$, $\xi = \wp(z)$, $\mu = \wp'(z)$, униформизирует эллиптическую кривую

$$\mu^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3, \quad (5)$$

где g_2, g_3 задаются формулами

$$g_2 = 60 \sum_{l \in L'} \frac{1}{l^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{l \in L'} \frac{1}{l^6}.$$

Дискриминант и J -инвариант эллиптической кривой задаются формулами

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2, \quad J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}.$$

ζ -функция Вейерштрасса, определяемая соотношениями

$$\zeta'(x) = -\wp(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\zeta(x) - \frac{1}{x} \right) = 0,$$

и σ -функция Вейерштрасса, определяемая соотношениями

$$(\lg \sigma(x))' = \zeta(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma(x)}{x} = 1,$$

являются квазипериодическими:

$$\zeta(x + 2\omega_k) = 2\eta_k + \zeta(x), \quad \sigma(x + 2\omega_k) = -e^{2\eta_k(x + \omega_k)} \sigma(x),$$

где $\eta_k = \zeta(\omega_k)$ и имеет место соотношение

$$\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

3. Эллиптические функции уровня N

Понятие *эллиптического рода уровня N* ввёл Ф. Хирцебрух в [9] (см. также [10]). Функция, которая задаёт этот род называется *эллиптической функцией уровня N* . Следуя [11] (см. также [12]), определим эллиптическую функцию уровня N выражением

$$f(x) = \frac{\sigma(x)\sigma(z)}{\sigma(z-x)} \exp(-kx), \quad (6)$$

где $z = \frac{2n}{N}\omega_1 + \frac{2m}{N}\omega_2$ и $k = \frac{2n}{N}\eta_1 + \frac{2m}{N}\eta_2$, $n, m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Имеем

$$f(x + 2\omega_1) = e^{2\pi i \frac{m}{N}} f(x), \quad f(x + 2\omega_2) = e^{-2\pi i \frac{n}{N}} f(x).$$

Таким образом, функция $h(x) = (f(x))^N$ является эллиптической относительно решётки L и имеет единственный ноль порядка N в точке $x = 0$. Она имеет единственный полюс порядка N в точке $x = z$ — точке порядка N в группе $\mathbb{C}/L$. Сама функция $f(x)$ является эллиптической относительно подрешётки индекса N решётки L .

ЛЕММА 1 (см. [9], [12]). *Эллиптическая функция уровня 3 удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^3 + a_1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 + a_3 = \frac{1}{f(x)^3} + a_6 f(x)^3, \quad (7)$$

где коэффициенты a_k связаны соотношениями $a_1 = -6e_1$, $a_3 = 32e_1^3 - 4e_3$, $a_6 = 4e_3^2$ для алгебраически независимых параметров e_1 и e_3 .

СЛЕДСТВИЕ 1. Положив $a = -2e_1$, $b = \frac{2}{3}(e_3 - 4e_1^3)$ в (7), для $\xi = f(x)$, $\mu = f'(x)$, получаем уравнение (1).

4. Формальные группы

Пусть R – коммутативное кольцо с единицей 1.

Коммутативной одномерной формальной группой над R называется формальный ряд

$$F(u, v) = u + v + \sum a_{i,j} u^i v^j, \quad a_{i,j} = a_{j,i} \in R, \quad i > 0, j > 0, \quad (8)$$

удовлетворяющий условию ассоциативности

$$F(u, F(v, w)) = F(F(u, v), w). \quad (9)$$

Общую теорию формальных групп см. в [13].

Экспонентой формальной группы $F(u, v)$ называется формальный ряд $f(t) \in R \otimes \mathbb{Q}[[t]]$, однозначно определяемый законом сложения

$$f(x + y) = F(f(x), f(y)), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \quad (10)$$

Логарифмом формальной группы F называется формальный ряд $g(u)$ такой, что

$$g(f(x)) = x.$$

Из (10) получаем

$$\left. \frac{\partial}{\partial v} F(u, v) \right|_{v=0} = \frac{1}{g'(u)}, \quad \left. \frac{\partial^2}{\partial v^2} F(u, v) \right|_{v=0} = \frac{g'(u)^2 g''(0) - g''(u)}{g'(u)^3}. \quad (11)$$

Формальная группа $\mathcal{F}(u, v) = u + v + \sum \alpha_{i,j} u^i v^j$ над кольцом $\mathcal{R}$ называется *универсальной формальной группой*, если для любой формальной группы $F(u, v)$ над некоторым кольцом R существует единственный гомоморфизм $r : \mathcal{R} \rightarrow R$ такой, что $F(u, v) = u + v + \sum r(\alpha_{i,j}) u^i v^j$. Гомоморфизм r называется *классифицирующим гомоморфизмом*.

Рассмотрим градуированное кольцо $\mathcal{U} = \mathbb{Z}[\beta_{i,j} : i > 0, j > 0]$, $\deg \beta_{i,j} = -2(i + j - 1)$. Положим $\hat{F}(u, v) = u + v + \sum \beta_{i,j} u^i v^j$, тогда

$$\begin{aligned} \hat{F}(\hat{F}(u, v), w) &= u + v + w + \sum \beta_{i,j,k}^l u^i v^j w^k, \\ \hat{F}(u, \hat{F}(v, w)) &= u + v + w + \sum \beta_{i,j,k}^r u^i v^j w^k, \end{aligned}$$

где $\beta_{i,j,k}^l$ и $\beta_{i,j,k}^r$ – однородные полиномы от $\beta_{i,j}$ и $\deg \beta_{i,j,k}^l = \deg \beta_{i,j,k}^r = -2(i + j + k - 1)$.

Пусть $J \subset \mathcal{U}$ – идеал ассоциативности с образующими $\beta_{i,j,k}^l - \beta_{i,j,k}^r$. Рассмотрим кольцо $\mathcal{R} = \mathcal{U}/J$, каноническую проекцию $\pi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}$ и пусть $\mathcal{F}(u, v) = u + v + \sum \alpha_{i,j} u^i v^j$, где $\alpha_{i,j} = \pi(\beta_{i,j})$. По построению, ряд $\mathcal{F}(u, v)$ задаёт формальную группу над градуированным кольцом $\mathcal{R}$, которая является универсальной. В случае, когда мы рассматриваем формальные группы $F(u, v)$ определённого вида, то аналогично определяется универсальная формальная группа заданного вида над кольцом $\mathcal{R}/I$, где идеал I кольца $\mathcal{R}$ определяется видом формальной группы. Обратим внимание, что кольцо $\mathcal{R}/I$ мультипликативно порождается коэффициентами ряда, задающего формальную группу.

Пусть даны универсальные формальные группы $F_1(u, v)$ и $F_2(u, v)$ разного вида. Скажем, что эти виды эквивалентны, если каждый из них получается специализацией другого.

В [14] введена универсальная формальная группа вида

$$F(u, v) = uw(v) + vw(u) - w_1uv + \frac{w(u)\beta(u) - w(v)\beta(v)}{uw(v) - vw(u)}u^2v^2, \quad (12)$$

которая названа формальной группой Кричевера.

ЛЕММА 2. *Виды формальных групп (4) и (12) эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратим внимание, что вид (4) не зависит от значений $B'(0)$ и $A''(0)$, поэтому в случае универсальной формальной группы нужно положить $B'(0) = 0$ и $A''(0) = 0$. Также нужно положить $A(0) = 1$, $B(0) = 1$.

Формулы специализации (12) для перехода к (4):

$$w(u) = B(u) + A'(0)u, \quad \beta(u) = \frac{A'(0)uB(u) + B(u)^2 - A(u)}{u^2(B(u) + A'(0)u)}.$$

Формулы специализации (4) для перехода к (12):

$$A(u) = w(u)(w(u) - w_1u - \beta(u)u^2), \quad B(u) = w(u) - w_1u.$$

□

СЛЕДСТВИЕ 2. *Кольца коэффициентов универсальных формальных групп вида (4) и (12) совпадают.*

5. Результаты

ТЕОРЕМА 1. *Экспонентой универсальной формальной группы вида (2)*

$$F(u, v) = \frac{u^2C(v) - v^2C(u)}{uC(v)^2 - vC(u)^2}.$$

является эллиптическая функция уровня 3.

ТЕОРЕМА 2. *Универсальная формальная группа вида (2) определена над кольцом $\mathcal{R}_3$, таким что*

$$\mathcal{R}_3 \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right] = \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right] [a, b].$$

Здесь a и b — алгебраически независимые параметры.

Доказательство этих теорем мы приводим в следующем разделе. Нам понадобится следующий результат:

ТЕОРЕМА 3. *Эллиптическая функция уровня 3 является двухпараметрической, с параметрами, скажем, a и b . Её можно задать в любом из следующих видов:*

•

$$f(x) = -2 \frac{\wp(x) + \frac{a^2}{4}}{\wp'(x) - a\wp(x) + b - \frac{a^3}{4}} \quad (13)$$

где $\wp(x) = \wp(x; g_2, g_3)$ и $\wp'(x) = \wp'(x; g_2, g_3)$ — функции Вейерштрасса, и

$$g_2 = \frac{1}{4}a(3a^3 - 8b), \quad g_3 = \frac{1}{24}(3a^6 - 12a^3b + 8b^2).$$

•

$$f(x) = \frac{\sigma(x)\sigma(s)}{\sigma(s-x)} e^{-(\frac{a}{2} + \zeta(s))x} \quad (14)$$

где $\sigma(x) = \sigma(x; \hat{g}_2, \hat{g}_3)$ и $\zeta(x) = \zeta(x; \hat{g}_2, \hat{g}_3)$ — функции Вейерштрасса, и

$$\hat{g}_2 = \frac{3}{4}a(a^3 + 24b), \quad \hat{g}_3 = \frac{1}{8}(a^6 - 60a^3b - 72b^2), \quad (15)$$

а параметр s определяется соотношениями

$$\wp(s; \hat{g}_2, \hat{g}_3) = \frac{3}{4}a^2, \quad \wp'(s; \hat{g}_2, \hat{g}_3) = a^3 - 3b.$$

• *Решение уравнения*

$$f'(x)^3 + 3af'(x)^2f(x) = (a^3 - 3b)^2f(x)^6 + 2(a^3 + 3b)f(x)^3 + 1 \quad (16)$$

с начальными данными $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 1 мы получаем, что эллиптическая функция уровня 3 является решением (16) с заданными начальными условиями. Такое решение полностью определяется параметрами a и b . Функции (13) и (14) являются решениями того же дифференциального уравнения с теми же начальными условиями, и поэтому эти три функции совпадают как функции на $\mathbb{C}$.

Доказательство того, что функция (13) удовлетворяет уравнению (16) получается прямой подстановкой (13) в (16) с использованием соотношения (5). Доказательство того, что функции (13) и (14) совпадают дано в [14], где эти функции представлены как выражения экспоненты одной и той же формальной группы. Параметры a, b введены в [15]. $\square$

Обратим внимание, что функция (13) является эллиптической относительно решётки L , соответствующей параметрам g_2, g_3 . Функция (14) является квазипериодической относительно решётки $\hat{L}$, соответствующей параметрам $\hat{g}_2, \hat{g}_3$. Решётка L является подрешёткой решётки $\hat{L}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для инвариантов $\hat{g}_2$ и $\hat{g}_3$, заданных формулами (15), точка s , определяемая соотношениями

$$\wp(s; \hat{g}_2, \hat{g}_3) = \frac{3}{4}a^2, \quad \wp'(s; \hat{g}_2, \hat{g}_3) = a^3 - 3b,$$

является точкой порядка 3 в группе $\mathbb{C}/\hat{L}$.

6. Доказательство теорем 1 и 2

Рассмотрим универсальную формальную группу вида (2)

$$F(u, v) = \frac{u^2 C(v) - v^2 C(u)}{u C(v)^2 - v C(u)^2}.$$

ЛЕММА 3. Имеем $C(0) = 1$.

Доказательство получается применением к виду (2) условия, что начало разложения формальной группы в ряд должно иметь вид (8).

Положим (см. (11))

$$w(u) = \left. \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \right|_{v=0} = \frac{1}{g'(u)}.$$

Введём w_k как коэффициенты ряда

$$w(u) = 1 + \sum_k w_k u^k.$$

ТЕОРЕМА 4. Универсальная формальная группа вида (2) является специализацией универсальной формальной группы вида (4), выделяемым условием, что $w(u)$ является решением уравнения

$$w(u) + w_1 u = \left(w(u)^2 - \frac{1}{2} u w(u) (w'(u) + w_1) - \frac{w_2 + w_1^2}{2} u^2 \right)^2. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (11) получаем

$$\left. \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \right|_{v=0} = w(u), \quad \left. \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial v^2} \right|_{v=0} = w(u) (w'(u) - w_1).$$

С другой стороны, из (2) с учётом леммы 3 получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \right|_{v=0} &= C(u)^2 - C'(0)u, \\ \left. \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial v^2} \right|_{v=0} &= 2C''(0)u - 6C'(0)C(u)^2 + 2\frac{C(u)^4}{u} - C'''(0)u - 2\frac{C(u)}{u}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеют место соотношения на коэффициенты

$$C'(0) = w_1, \quad C''(0) = w_2 - w_1^2,$$

и выражения

$$C(u)^2 = w(u) + w_1 u, \quad C(u) = w(u)^2 - \frac{1}{2} u w(u) w'(u) - \frac{w_1}{2} u w(u) - \frac{w_2 + w_1^2}{2} u^2. \quad (18)$$

Отсюда получаем уравнение (17).

Подстановка (18) в (2) даёт формальную группу

$$F(u, v) = uv(v) + vw(u) - \frac{w_1}{2}uv - \frac{uv}{2} \frac{uw(v)w'(v) - vw(u)w'(u)}{uw(v) - vw(u)},$$

которая переобозначением $\beta(u) = \frac{w'(u)-w_1}{2u}$ принимает вид (12).

Применяя лемму 2, получаем доказательство теоремы. $\square$

Уравнение (17)

$$w(u) + w_1u = \left(w(u)^2 - \frac{1}{2}uw(u)(w'(u) + w_1) - \frac{w_2 + w_1^2}{2}u^2 \right)^2$$

задаёт коэффициенты w_k начиная с $k = 4$ как многочлены от w_1, w_2, w_3 с рациональными коэффициентами, поскольку с точностью до элементов, разложимых в кольце порождённом w_k , уравнение превращается в

$$3(w(u) - 1) = uw'(u) + 2w_1u + w_2u^2,$$

и коэффициент при u^k при $k \geq 3$ в левой части равен 3, а в правой он равен k .

ЛЕММА 4. *Для формальной группы (2) имеет место соотношение на коэффициенты*

$$w_2 = w_1^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из начальных коэффициентов разложения в ряд уравнения (17) следует соотношение

$$w_1(w_1^2 - w_2) = 0$$

и выражения

$$\begin{aligned} w_4 &= \frac{1}{4}(w_1^2 - w_2)^2, \\ w_5 &= -\frac{1}{4}w_1(w_1^2 - w_2)^2 - \frac{1}{4}w_3(3w_1^2 + w_2). \end{aligned}$$

Из условия ассоциативности формальной группы (12) получаем

$$\frac{3}{4}(w_1^2 - w_2)(w_1^3 - w_1w_2 - w_3) = 0.$$

Таким образом, если $w_2 \neq w_1^2$, то получаем

$$w_1 = 0, \quad w_3 = 0, \quad w_5 = 0, \quad \dots \quad w_{2k+1} = 0.$$

Далее из условия ассоциативности получаем

$$w_6 = -w_2w_4.$$

При этом уравнение (17) принимает вид

$$w(u) = \left(w(u)^2 - \frac{1}{2}uw(u)w'(u) - \frac{w_2}{2}u^2 \right)^2,$$

и из него получаем

$$w_4 = \frac{1}{4}w_2^2, \quad 3w_6 = -2w_2w_4,$$

откуда $w_2 = 0$, что противоречит условию $w_2 \neq w_1^2$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. Универсальная формальная группа вида (2) является специализацией универсальной формальной группы вида (4), выделяемым условием, что $w(u)$ является решением уравнения

$$w(u) - au = \left(w(u)^2 - \frac{1}{2}uw(u)(w'(u) - a) - a^2u^2 \right)^2 \quad (19)$$

с параметром a . Из уравнения получаем $a = -w_1$.

Из $w_2 = w_1^2$ для $g(u) = u + \sum_k g_k u^{k+1}$ получаем $g_1 = -\frac{w_1}{2}$, $g_2 = 0$, $g_3 = \frac{w_1^3 - w_3}{4}$.
Для $f(u) = u + \sum_k f_k u^{k+1}$ получаем $f_1 = \frac{w_1}{2}$, $f_2 = \frac{w_1^2}{2}$, $f_3 = \frac{3w_1^3 + 2w_3}{8}$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Экспонента формальной группы (2) задаётся двумя параметрами: w_1 и w_3 .

В терминах функции $f(x)$ уравнение (19) принимает вид

$$f'(x) - af(x) = \left(f'(x)^2 - \frac{1}{2}f(x)(f''(x) - af'(x)) - a^2f(x)^2 \right)^2. \quad (20)$$

ТЕОРЕМА 5. Множество экспонент формальных групп вида (2) является двухпараметрическим и имеет вид, описанный в теореме 3, для $a = -w_1$, $2b = w_3$.

Доказательство получаем прямой подстановкой функции (13) в (20).

Таким образом, теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. По теореме 3 экспонента $f(x)$ удовлетворяет уравнению (16). Следовательно, $w(u)$ удовлетворяет (3)

$$w^3 + 3auw^2 = 1 + 2(a^3 + 3b)u^3 + (a^3 - 3b)^2u^6.$$

СЛЕДСТВИЕ 7. $w(u) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{3}][a, b][[u]]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $w(u)$ является решением (3) с начальным условием $w(0) = 1$. Это уравнение задаёт коэффициенты w_k через a и b рекуррентно выражением

$$\begin{aligned} & 3(1 + 2au)(w(u) - 1) = \\ & = 2(a^3 + 3b)u^3 + (a^3 - 3b)^2u^6 - 3au - (w(u) - 1)^3 - 3(au + 1)(w(u) - 1)^2, \end{aligned}$$

и следовательно $w(u) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{3}][a, b][[u]]$. $\square$

Таким образом, из (18) мы получаем доказательство теоремы 2.

7. Приложение теоремы 3 к изогениям эллиптической кривой

ТЕОРЕМА 6. Пусть для эллиптической кривой с образующими $(2\omega_1, 2\omega_2)$ заданы её дискриминант Δ и J -инвариант. Тогда дискриминант Δ и J -инвариант каждой из кривых с образующими

$$\left(2\hat{\omega}_1 = 2\omega_1, 2\hat{\omega}_2 = \frac{2}{3}\omega_2 \right), \quad \left(2\hat{\omega}_1 = \frac{2}{3}\omega_1, 2\hat{\omega}_2 = 2\omega_2 \right)$$

выражаются следующим образом:

Можно ввести формальные переменные p, s , так, что

$$\Delta = -\frac{1}{27}p^3s, \quad J = -\frac{1}{64} \frac{(p-s)(p-9s)^3}{p^3s},$$

тогда

$$\hat{\Delta} = -27s^3p, \quad \hat{J} = -\frac{1}{64} \frac{(s-p)(s-9p)^3}{s^3p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция (13) имеет в ячейке ровно три полюса в точках x , где выражение $\wp'(x) - a\wp(x) + b - \frac{a^3}{4}$ обращается в ноль. Функция (14) имеет в ячейке ровно один полюс в точке $x = s$.

Таким образом, если $(2\omega_1, 2\omega_2)$ — периоды функции (13), то у функции (14) периоды $(2\hat{\omega}_1 = 2\omega_1, 2\hat{\omega}_2 = \frac{2}{3}\omega_2)$ либо $(2\hat{\omega}_1 = \frac{2}{3}\omega_1, 2\hat{\omega}_2 = 2\omega_2)$. Данная неоднозначность получается ввиду неоднозначности выбора формальных переменных p и s .

Выражая Δ и J через a и b по формулам теоремы 3, после подстановки

$$a = (p-s)^{1/3}, \quad b = \frac{1}{3}p,$$

получим формулы теоремы 6. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Lazard Sur les groupes de Lie formels a un parametre // Bull. Soc. Math. France. 1955. Vol. 83. P. 251–274.
2. В. М. Бухштабер, А. С. Мищенко, С. П. Новиков Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии // УМН. 1971. Т. 26, № 2. С. 131–154.
3. С. П. Новиков Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов // Известия АН СССР, серия матем.. 1967. Т. 31, № 4. С. 855–951.
4. D. Quillen On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 75, № 6. P. 1293–1298.
5. В. М. Бухштабер Комплексные кобордизмы и формальные группы // УМН. 2012. Т. 67, № 5(407). С. 111–174.
6. E. T. Whittaker, G. N. Watson A Course in Modern Analysis. 1990. 4th ed. Cambridge, England: Cambridge University Press.
7. В. М. Бухштабер, А. В. Устинов Кольца коэффициентов формальных групп // Матем. сборник (в печати).
8. В. М. Бухштабер Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы // УМН. 1990. Т. 45, № 3(273). С. 185–186.

9. F. Hirzebruch Elliptic genera of level N for complex manifolds // Prep. MPI. P. 88–24.
10. F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung Manifolds and Modular Forms. 1992. Braunschweig: Vieweg.
11. И. М. Кричевер Обобщенные эллиптические роды и функции Бейкера–Ахиезера // Мат. Заметки. 1990. Т. 47, № 2. С. 34–45; I. M. Krichever Generalized elliptic genera and Baker–Akhiezer functions // Math. Notes. 1990. Vol. 47, № 2. P. 132–142.
12. J. Barr von Oehsen Elliptic genera of level N and Jacobi polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Vol. 122. P. 303–312.
13. M. Hazewinkel Formal Groups and Applications. 1978. Academic Press, New York–San Francisco–London.
14. В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова Формальные группы Кричевера // Функц. анализ и его прил. 2011. Т. 45, № 2. С. 23–44; Funct. Anal. Appl. 2011. Vol. 45, № 2. P. 99–116.
15. В. М. Бухштабер, Е. Ю. Нетай $CP(2)$ -мультипликативные роды Хирцебруха и эллиптические когомологии // УМН. 2014. Т. 69, № 4(418). С. 181–182; Russian Math. Surveys. 2014. Vol. 69, № 4. P. 757–759.

REFERENCES

1. Lazard, M. 1955., "Sur les groupes de Lie formels a un parametre", *Bull. Soc. Math. France.*, vol. 83, pp. 251–274.
2. Buhstaber, V. M., Miscenko, A. S. & Novikov, S. P. 1971, "Formal groups and their role in the apparatus of algebraic topology" (Russian) *Uspehi Mat. Nauk*, vol. 26, no. 2(158), pp. 131–154.
3. Novikov, S. P. 1967, "Methods of algebraic topology from the point of view of cobordism theory" (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 31, № 4, pp. 855–951.
4. Quillen, D. 1969, "On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 75, № 6, pp. 1293–1298.
5. Bukhshtaber, V. M. 2012, "Complex cobordisms and formal groups" (Russian) *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 67, no. 5(407), pp. 111–174; translation in *Russian Math. Surveys*, vol. 67 (2012), no. 5, pp. 891–950.
6. Whittaker, E. T. & Watson, G. N. 1990, "A Course in Modern Analysis.", 4th ed. *Cambridge, England: Cambridge University Press.*
7. Buchstaber, V. M. & Ustinov, A. V. "Rings coefficients formal groups", *Mat. Sb.* (in the press).

8. Bukhshtaber, V. M. 1990, "Functional equations that are associated with addition theorems for elliptic functions, and two-valued algebraic groups" (Russian) *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 45, no. 3(273), pp. 185–186; translation in *Russian Math. Surveys*, vol. 45 (1990), no. 3, pp. 213–215.
9. Hirzebruch, F. "Elliptic genera of level N for complex manifolds" *Prep. MPI.*, pp. 88–24.
10. Hirzebruch, F., Berger, T. & Jung, R. 1992, "Manifolds and Modular Forms.", *Braunschweig: Vieweg*.
11. Krichever, I. M. 1990, "Generalized elliptic genera and Baker-Akhiezer functions" (Russian) *Mat. Zametki*, vol. 47, no. 2, pp. 34–45, 158; translation in *Math. Notes*, vol. 47 (1990), no. 1-2, pp. 132–142.
12. von Oehsen, J. Barr 1994, "Elliptic genera of level N and Jacobi polynomials", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 122. pp. 303–312.
13. Hazewinkel, M. 1978, "Formal Groups and Applications." *Academic Press, New York – San Francisco – London*.
14. Bukhshtaber, V. M. & Bun'kova, E. Yu. 2011, "Krichever formal groups" (Russian. Russian summary) *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* vol. 45, no. 2, pp. 23–44; translation in *Funct. Anal. Appl.*, vol. 45 (2011), no. 2, pp. 99–116.
15. Buchstaber, V. M. & Netay, E. Yu. 2014, " $\mathbb{C}P(2)$ -multiplicative Hirzebruch genera and elliptic cohomology", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 69, № 4(418), pp. 181–182; *Russian Math. Surveys*. 2014. Vol. 69, № 4, pp. 757–759.

Steklov Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, ul. Gubkina 8, Moscow, 119991 Russia.

Поступило 6.06.2015