ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2010 Математика. Механика. Информатика Вып.4(4)

УДК 531.381:531.395

Геометрическая интерпретация движения сложной механической системы

Н. Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Приводится геометрическая интерпретация движения по инерции подобно изменяемой сложной механической системы (СМС), неизменяемая основа которой движется вокруг неподвижного полюса. Получены аналоги классических интерпретационных теорем Л. Пуансо [1] и Дж. Сильвестра [2].

Ключевые слова: интерпретация; сложная механическая система; подобно изменяемая система.

1. Предварительные положения

Л. Пуансо [1] была предложена геометрическая интерпретация сферического движения неизменяемого абсолютно твердого тела в интегрируемом случае Л.Эйлера. Дж.Сильвестром [2] доказана аналоговая теорема, интерпретирующая движение этого тела при условиях Эйлера–Пуансо [*Sylvester*. Phil. Trans. 1866. Works. Vol.2. P.577]. Представляет интерес вопрос о существовании аналогов данных истолкований для механических объектов более сложной структуры, в частности для СМС.

Под СМС здесь понимается механический объект, структурная модель которого в общем случае предполагает непрерывное во времени изменение конфигурации и состава массы объекта, задаваемое априорно построенной для $t\in[0,+\infty)\equiv T$ управляющей программой (программным массивом [3]). Эта программа определяет для $t\in T$ упорядоченное многоуровневое иерархическое множество структурно-динамических параметров объекта (в том числе и управляющих) так, что система его уравнений движения аналитически замкнута относительно компонент вектора мгновенной угловой скорости. При этом ограничения, налагаемые на управляющие параметры объекта, называются *управляющими связями*, устанавливающими определенный режим состояния данного объекта.

Таким образом, программы (или подпрограммы), содержащиеся в данном массиве, реализуются в виде зависимостей, определяющих характер относительного (по отношению к неизменяемой основе СМС) переноса рабочего тела при изменении состава массы и конфигурации СМС. Согласно такому представлению тела переменного состава и конфигурационно изменяемые тела (системы) являются частными видами СМС [3].

Принимая предложенную структурную модель СМС [3], введем следующие обозначения. Пусть $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^r$ – кинетический и гиродинамический (для рабочего тела) моменты СМС относительно неподвижного полюса O; $\mathbf{J}(t)$ – оператор инерции СМС, отнесенный к полюсу O; $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}^r$ – мгновенные угловые скорости: абсолютная для неизменяемой основы СМС и относительная для базиса главных в полюсе O осей инерции системы по отношению к ее неизменяемой основе; $\boldsymbol{\Omega}$ – абсолютная угловая скорость базиса главных в полюсе O осей инерции СМС; $\boldsymbol{\lambda}$ – приведенная (эффективная) угловая скорость. В дальнейшем нулевой верхний индекс относится к значениям величин в начальный момент времени $t=0$.

Примем следующие предпосылки, выполняющиеся для любого значения $t\in T$.

1. Система движется так, что ее неизменяемая основа (абсолютно твердое тело) движется вокруг полюса O, неподвижного относительно инерциальной системы отсчета.

2. Результирующий вектор-момент внешних сил, приложенных к СМС, включая реактивные силы, обусловленные изменением состава массы системы, тождественно равен нулю.

3. Программно заданные зависимости, определяющие изменение состава массы СМС и ее конфигурации (т.е. изменение структуры системы), являются гладкими явно (или параметрически) заданными функциями времени необходимой степени гладкости.

4. Данная СМС обладает определенным характерным структурно-динамическим свойством, заданным для $t\in T$ на полном множестве программных зависимостей.

Согласно предпосылкам 1–3 движение СМС в системе ортогональных осей координат, совпадающей с базисом главных в полюсе O осей инерции системы, определяется уравнением Н. Жуковского [4]

$$\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}\times\mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{G} = 0, \qquad (1)$$

где

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\lambda}), \qquad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\omega}^r - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}^r, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^r.$$

Динамическая система (1) обладает первым алгебраическим интегралом [5]

$$\|\mathbf{G}\| = H \quad (H = const > 0) \qquad (2)$$

и относится к классу систем с инвариантной нормой вектора кинетического момента СМС.

Зададим величину k, и пусть $k(t)\in C^0(T)$, $\mu(t)\in C^1(T)$ – некоторые ограниченные величины, связанные зависимостью [5]

$$\mu(t) = exp\int_0^t k(s)ds. \qquad (3)$$

Из полного множества программно заданных зависимостей, определяющих изменение структуры СМС, выделим подмножество, для всех элементов которого при $t\in T$ выполняются следующие структурно-динамические условия [5]:

$$\mathbf{J}^{-1}(t)\cdot\mathbf{J}^0 = \mu(t)\mathbf{E}, \qquad \boldsymbol{\lambda}(t) = \mu(t)\boldsymbol{\lambda}^0, \qquad (4)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, а величина μ определяется равенством (3).

Соотношения (4) выражают свойство структурно-динамического подобия СМС как объекта с изменяемыми во времени конфигурацией и составом массы. Они определяют реономно-гомотетический закон изменения параметров $\mathbf{J}(t)$, $\boldsymbol{\lambda}(t)$. В силу структурного подобия системы согласно первому условию (4) эллипсоиды инерции СМС, отнесенные к полюсу O, в каждый момент времени $t\in T$ образуют в конфигурационном пространстве гомотетические фигуры с центром гомотетии в полюсе O и реономным коэффициентом $\sqrt{\mu}$. При этом параметр $k(t)$, определяемый согласно равенству (3) как

$$k(t) = \mu^{-1}\dot{\mu} \qquad (t\in T),$$

такой, что его модуль является некоторым аналогом коэффициента скорости относительной "деформации" системы.

В дальнейшем под подобно изменяемой СМС понимается механический объект, параметры которого на множестве T удовлетворяют соотношениям (4). В соответствии с этим предпосылку 4 следует отнести к подобно изменяемой СМС, а под упомянутым в ней характерным структурно-динамическим свойством следует понимать свойство, определяемое условием (4).

2. Геометрическая интерпретация движения подобно изменяемой механической системы

Динамическая система (1) при условиях подобия (4) обладает, помимо интеграла (2), первым алгебраическим интегралом [5] в форме

$$(\mathbf{G}\cdot\mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}) + 2(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{G}) = \mu h^2, \qquad (5)$$

где $h = const$. Условия (4) выражают критерий существования квазиэнергетического интеграла (5) [5].

В силу условий (4) система (1) и первый интеграл (5) приводимы по А.М. Ляпунову. Полагая

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mu(t)\mathbf{W}, \quad \tau = \int_0^t \mu(s)ds, \qquad (6)$$

где $\mathbf{W} = (\mathbf{J}^0)^{-1}\mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda}^0$, приведем соотношения (1), (2), (5) к виду

$$\mathbf{J}^0\mathbf{W}' + \mathbf{W}\times\mathbf{J}^0(\mathbf{W}-\boldsymbol{\lambda}^0) = 0, \qquad (7)$$

$$\|\mathbf{J}^0(\mathbf{W}-\boldsymbol{\lambda}^0)\| = H, \quad (\mathbf{W}\cdot\mathbf{J}^0\mathbf{W}) = h^2, \qquad (8)$$

где $Hh \neq 0$. Здесь и всюду далее штрих обозначает дифференцирование по τ.

Соотношение (7) является динамическим уравнением движения по инерции вокруг неподвижного полюса O некоторого гиростата. Это движение реализуется в масштабе приведенного времени τ согласно равенству (6) с угловой скоростью его неизменяемой основы $\mathbf{W}$. При этом оператор инерции данного гиростата, отнесенный к полюсу O, есть $\mathbf{J}^0$, а гиростатический момент $\mathbf{G}^r = -\mathbf{J}^0\boldsymbol{\lambda}^0$. Такой гиростат назовем *приведенным гиростатом* (ПГ), соответствующим данной подобно изменяемой СМС.

Таким образом, ПГ – это механический объект, для которого выполняются соотношения (7), (8). Имеет место следующее свойство: движения неизменяемой основы подобно изменяемой СМС и несущего тела (термин [6, с.80]) ее ПГ диффеоморфны по $(\boldsymbol{\Omega}, t) \leftrightarrow (\mathbf{W}, \tau)$ в классе функций $C^1(T)$ [5].

Приведем аналог геометрической интерпретации Л.Пуансо для подобно изменяемой СМС.

Пусть апекс N – точка пересечения луча, исходящего из полюса O коллинеарно вектору $\mathbf{W}$, с центральным эллипсоидом инерции Q, построенным для СМС и отнесенным к этому полюсу. Этот эллипсоид касается плоскости Пуансо П [7] (плоскости Лапласа [8]) в точке N. Обозначим: $\mathbf{r}_N$ – радиус-вектор точки N при полюсе O, $\delta = |\mathbf{r}_N|$, l – постоянный масштабный коэффициент в уравнении эллипсоида Q. В дальнейшем под управляющими связями понимаются ограничения, наложенные на управляющие параметры СМС $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{G}^r$.

Теорема 1. Если для СМС, подчиненной динамической системе (1), имеют место управляющая связь

$$\mathbf{G}^r(t) = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}^r \leftrightarrow \boldsymbol{\lambda}(t) = 0 \quad (t \in T), \qquad (9)$$

и первое структурное условие (4), то ее ПГ движется так, что плоскость Пуансо П в каждый момент времени $t \in T$ ортогональна вектору $\mathbf{G}$ и перемещается поступательно в направлении вектора $\mathbf{G}$. При этом

$$\delta(t) = \delta^0 \sqrt{\mu(t)}, \quad t \in T, \qquad (10)$$

где $\delta^0 = hH^{-1}$ с точностью до сомножителя – масштабного коэффициента l, а величина μ определяется равенством (3).

Доказательство достигается известным классическим приемом [7, 9, 10] на основе соотношений (6), (8) с применением очевидных равенств

$$\mathbf{r}_N = lh^{-1}\sqrt{\mu}\,\mathbf{W}, \quad \left(\mathbf{r}_N \cdot \mathbf{J}^0\mathbf{r}_N\right) = \mu\, l^2. \qquad (11)$$

Теорема 2. Движение СМС, подчиненное динамической системе (1), существующее при условиях (4) на управляющей связи (9), интерпретируется как качение без скольжения (и верчение) эллипсоида инерции Q по плоскости Пуансо П. При этом

$$\mathbf{r}_N(t) = Hh^{-2}\delta(t)\mathbf{W}, \qquad (12)$$

где величина δ определяется равенством (10).

Доказательство этого утверждения также достигается по типу, приведенному в [7, 9, 10]. Оно основано на известном классическом приеме с учетом того, что при фиксированных значениях параметра δ точка N является мгновенным центром скоростей для материализованного эллипсоида Q. При этом "лучевая" скорость точки $N \in Q$, обусловленная структурно-подобным изменением СМС, коллинеарна нормали, проведенной к этому эллипсоиду в любой его точке.

Соотношение (12) непосредственно следует из равенств (10), (11).

Теоремы 1, 2 обобщают известный результат Л. Пуансо [1] для подобно изменяемых СМС. Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из этих теорем.

Пусть

$$\Phi^{\pm}(t) = \left(1 \pm \frac{1}{2}\left|k^0\right| t\right)^2, \qquad (13)$$

где $k(t)$ – величина, входящая в соотношение (3) и в локальное равенство [5]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = k\rho(t, \mathbf{r}) \quad (t \in T, \mathbf{r} \in D). \qquad (14)$$

В равенстве (14) ρ – величина локальной плотности рабочего тела СМС – сплошной среды, совершающей циклические движения в области D. Показано [5], что ограничение (14) порождает структурное подобие СМС, определяемое первым равенством (4).

Следствие 1. Из соотношений (3), (10) непосредственно следует $k(t) = \dot{\delta}(t) > 0$ $(t \in T)$.

Следствие 2. Если для $t \in T$ имеют место условия $\mu \geq \Phi^+$, $k > 0$ или $\mu \leq \Phi^-$, $k < 0$, то $\ddot{\delta} \geq 0$ $(t \in T)$. При условиях $\mu < \Phi^-$, $k > 0$ или при $\mu > \Phi^+$, $k < 0$ для $t \in T$ имеем $\ddot{\delta} < 0$. Здесь величины Φ^+, Φ^- определяются равенством (13).

Представим второе ограничение (4) в виде

$$\mathbf{G}^r(t) = \left(\mathbf{G}^r\right)^0 + \mathbf{J}^0\left[\mu^{-1}\boldsymbol{\omega}^r - \left(\boldsymbol{\omega}^r\right)^0\right]. \qquad (15)$$

Следствие 3. На стационарной управляющей связи

$$\mathbf{G}^r(t) = \left(\mathbf{G}^r\right)^0 \quad (t \in T), \qquad (16)$$

совместимой с наложенными в теореме 1 ограничениями, в силу управления (15) имеем

$$\boldsymbol{\omega}^r(t) = \left(\boldsymbol{\omega}^r\right)^0 \mu(t) \quad (t \in T). \qquad (17)$$

Таким образом, на связи (16) параметр $\boldsymbol{\omega}^r$ подчиняется закону структурного подобия (17) с реономным коэффициентом подобия μ.

Пусть K – кинетическая энергия СМС; $\mathbf{v}^r$ – относительная скорость частиц рабочего тела системы, занимающего область D, по отношению к ее неизменяемой основе,

$$\delta_* = c^{-1}\delta^0, \quad 2c^2 = h^2 - \left(\mathbf{G}^r\right)^0 \cdot \left(\mathbf{J}^0\right)^{-1}\left(\mathbf{G}^r\right)^0,$$

$$K^r = \frac{1}{2}\int_D \rho\left(\mathbf{v}^r\right)^2 dV \ ,$$

Имеет место зависимость [5]

$$K = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{G}\cdot\mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{G}^r\cdot\mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}^r\right) + K^r, \qquad (18)$$

где K^r – кинетическая энергия рабочего тела СМС в его движении по отношению к неизменяемой основе системы.

Применяя к равенству (18) интеграл (5) и условие структурного подобия (4) на управляющей связи (9), приходим к следствию из теоремы 1.

Следствие 4. При условиях теоремы 1 на управляющей связи (16) имеет место зависимость

$$K = K^r + \left(\frac{\delta}{\delta_*}\right)^2 \quad (t \in T), \qquad (19)$$

где величина δ определяется равенством (10).

Таким образом, согласно соотношению (19) величина δ $(K-K^r)^{-1/2}$ при заданных структурно-динамических ограничениях является инвариантом.

Распространим геометрическую интерпретацию Дж. Сильвестра на подобно изменяемые СМС. Для этого введем понятие *тела сравнения* (ТС) по отношению к данной СМС. Под ТС понимается абсолютно твердое тело с изменяемой структурой, являющееся "однородным материальным эллипсоидом" [1, 2] P, конгруэнтным эллипсоиду инерции Q ("эллипсоидальный волчок" P – термин Л. Пуансо [10]).

В дальнейшем предполагается:

– центр O^* эллипсоида P является полюсом, неподвижным относительно инерциального пространства;

– для ТС при $t\in T$ выполняются условия (4), причём начальная скорость $(\boldsymbol{\omega}^r)^0=0$;

– при движении ТС безотрывно контактирует с некоторой абсолютно шероховатой плоскостью Π^*, которая для каждого значения $t\in T$ ориентирована в инерциальном пространстве одинаково с плоскостью Π (здесь и затем далее индекс * относится к параметрам и элементам ТС).

Пусть Γ, Γ^* – системы ортогональных осей координат, совпадающие с главными в неподвижных полюсах осями инерции СМС и ее ТС соответственно. Положим, что *движение ТС* в каждый фиксированный момент времени $t\in T$ *тождественно* движению соответствующей ему СМС, если в этот момент времени:

– ориентация систем осей Γ, Γ^* одинакова ($\Gamma\equiv\Gamma^*$);

– абсолютные угловые скорости систем осей Γ, Γ^* одинаковы ($\boldsymbol{\Omega} \equiv \boldsymbol{\Omega}^*$).

Обозначим $\mathbf{L}$ результирующий момент внешних сил, действующих на ТС, относительно полюса O^*. К этим силам, в частности, относятся квазиреактивные силы [5] и сила контактной реакции плоскости Π^*.

Имеет место следующий аналог интерпретационной теоремы Дж. Сильвестра.

Теорема 3. Для того чтобы ТС, движущееся по абсолютно шероховатой контактной плоскости, совершало для $t\in T$ движение, тождественное движению данной СМС, происходящему при условиях теоремы 2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\Gamma \equiv \Gamma^*, \quad \Omega^0 = \left(\Omega^*\right)^0 \quad \text{при } t = 0,$$

$$(W \cdot L) = 0. \qquad \text{при } t \ge 0. \qquad (20)$$

Таким образом, теорема 3 утверждает, что если для $t\in T$ выполняется условие (20) и при $t = 0$ движение ТС является тождественным в указанном смысле, то оно будет оставаться таким и при $t > 0$. Условие (20) выражает равенство нулю результирующего момента указанных сил относительно оси, проходящей через полюс O^* и точку касания эллипсоида P с контактной плоскостью.

*Доказательство. Необходимость***.**

Обозначим

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{W} + \boldsymbol{\sigma}^0, \quad \boldsymbol{\sigma}^0 = \left(\mathbf{J}^{0*}\right)^{-1}\left(\mathbf{G}^r\right)^0$$

и представим уравнения движения ТС в виде

$$\left(\mathbf{J}^*\right)^0\left(\mathbf{W}^*\right)' + \left(\mathbf{W}^* - \boldsymbol{\sigma}^0\right)\times\left(\mathbf{J}^*\right)^0\mathbf{W}^* = \mu^{-1}\mathbf{L}. \quad (21)$$

Так как при $t \ge 0$ в тождественном движении имеем $\boldsymbol{\Omega} \equiv \boldsymbol{\Omega}^*$, то, исключая из уравнений (7), (21) производную функцию по τ и умножая полученный результат скалярно на $\mathbf{W}$, получаем

$$F(\mathbf{W}) \equiv \mathbf{W}\cdot\left(\mathbf{J}^*\right)^0\left[\left(\mathbf{J}^0\right)^{-1}\cdot\left(\mathbf{J}^0\mathbf{W}\times\mathbf{W}\right)\right] = \mu^{-1}\left(\mathbf{W}\cdot L\right).$$

Поскольку квадраты длин главных полуосей эллипсоида инерции Q пропорциональны соответствующим элементам матрицы тензора $\mathbf{J}^{-1}$ [2], то имеем $F = 0$. Отсюда следует условие (20).

*Достаточность***.** Пусть параметр $\mathbf{W}^s$ относится к ТС при условиях $\mathbf{\Omega} \neq \mathbf{\Omega}^*$, $t \in T$. Тогда из уравнения (21) согласно условиям (20) следует

$$\mathbf{W}^s \cdot \left(\mathbf{J}^*\right)^0 \left(\mathbf{W}^s\right)' = 0\,. \qquad (22)$$

Применяя к уравнению (7) при $\lambda^0 = 0$ последовательно операторы $(\mathbf{J}^0)^{-1}$, $(\mathbf{J}^*)^0$ и умножая результат скалярно на $\mathbf{W}$, согласно равенству $F = 0$ получаем

$$\mathbf{W} \cdot \left(\mathbf{J}^*\right)^0 \mathbf{W}' = 0\,. \qquad (23)$$

При выполнении условия (20) для $t = 0$ в силу уравнений (22), (23) имеем $\mathbf{W}^s = \mathbf{W}$.

3. Расширение геометрической интерпретации

Распространим предложенную геометрическую интерпретацию движения по инерции СМС на один из видов ее безынерционного движения.

Рассмотрим движение СМС, при котором выполняются принятые ранее предпосылки 1, 3, 4, а вместо предпосылки 2 примем следующее условие. Пусть результирующий вектор-момент внешних сил, действующих на эту систему, представляется в виде

$$\mathbf{L}(t) = -m(t)\mathbf{G} \quad (t \in T)\,, \qquad (24)$$

где $m(t) \in C^0(T)$ – ограниченная, определенно положительная функция. Зависимость (24) устанавливает коллинеарность векторов $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и является распространенной в динамике систем [10, с. 111]. Здесь предполагается, что эти векторы для любых значений $t \in T$ остаются векторами неизменного направления по отношению к инерциальному пространству.

Движение СМС, отнесенной к координатному ортобазису Г, под воздействием вектор-момента (24) определяется уравнением

$$\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{G} = -m\mathbf{G}\,. \qquad (25)$$

Здесь сохранены обозначения, принятые для уравнения (1).

К уравнению (25) применим прием, предложенный М.Ш.Аминовым [11] для твердого тела переменного состава. Положим,

$$\mathbf{G} = f(t)\mathbf{Z}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = f(t)\mathbf{n}(t), \quad \tau = \int_0^t f(s)ds\,. \quad (26)$$

Здесь $f(t) \in C^1(T)$, $\mathbf{n}(t) \in C^0(T)$, и предполагается, что $f(t) \neq 0$ для $t \in T$.

Применяя к уравнению (25) преобразование (26), приведем его к виду

$$\mathbf{Z}' + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} + \mathbf{n} \times \mathbf{Z} = 0\,. \qquad (27)$$

В уравнении (27) штрих обозначает дифференцирование по τ согласно зависимости (26).

Уравнение (27) идентично по структуре уравнению Н.Жуковского (1), что и обусловливает возможность применения предложенной интерпретации к движению СМС, подчиненной условиям подобия.

Действительно, принимая здесь условия структурно-динамического подобия в форме первого соотношения (4) и равенства

$$\mathbf{n}(t) = \mu(t)\mathbf{n}^0 \quad (t \in T)\,,$$

на управляющей связи $\mathbf{n}^0 = 0$ получаем $\mathbf{Z} = f^{-1}(\mathbf{J}^0\mathbf{W})$. В силу этого при данных предпосылках возможно применение теорем 1–3. При этом предполагается, что однозначная непрерывная зависимость вида $t = t(\tau)$ может быть получена путем обращения последнего соотношения (26).

Комментарий

Динамическая система (1) является системой с инвариантной нормой вектора $\mathbf{G}$ (термин применен М.Атансом и П.Фалбом [12]). Это понятие относится к непрерывным детерминированным системам типа (1) с линейно входящим управлением $\boldsymbol{\lambda}(t)$. Автономные динамические системы этого типа рассмотрены в работах [13, 14] и в ряде других источников. Следует ожидать, что и для подобно изменяемых СМС других типов, движение которых описывается также динамическими системами с инвариантной нормой, может быть построена геометрическая интерпретация движения, аналогичная интерпретации Л. Пуансо и Дж. Сильвестра.

Помимо систем с собственно инвариантной нормой существует подкласс динамических систем, приводимых к ним. К приводимым системам относится и система (25), для которой моментно-силовая нагрузка (24) удовлетворяет условию $\mathbf{L}(t) \times \mathbf{G}(t) = 0$ $(t \in T)$. Это условие определяет режим автономного управления, при котором управляющий момент $\mathbf{L}$ для $t \in T$ коллинеарен кинетическому моменту СМС. Реализация этого режима достигается функционированием САУ следящего типа, являющейся замкнутой системой с регулированием по отклонению. Выходной сигнал этой системы является управляющим для вектора **L**.

Таким образом, моментно-силовая нагрузка вида (24) может трактоваться не только как внешнее "формально диссипативное" воздействие, но и как некоторое видоизменение моментно-силового фактора в известной задаче Фабри–Граммеля для неизменяемого твердого тела [15]. Свойства движения СМС, находящейся под воздействием нестационарного силового момента, коллинеарного вектору ее кинетического момента, рассмотрены в работе [16].

Список литературы

1. *Poinsot L.* Thèorie nouvelle de la rotation d'un corps // Liouville Journal de mathèmatique. 1851. Vol.16. Ser.1. P.9–130; 289–336.
2. *Ламб Г.* Теоретическая механика. В 3 т. Т.3. М.; Л.: ОНТИ. 1936. С.121–122.
3. *Макеев Н.Н.* Асимптотика вращений сложной механической системы // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы / Перм. ун-т. Пермь, 2004. С.52–73.
4. *Макеев Н.Н.* О некоторых движениях гиростата переменной массы в случае типа Эйлера // Проблемы механики управляемого движения / Перм. ун-т. Пермь, 1974. С.71–78.
5. *Макеев Н.Н.* Интегралы сложных систем на управляющих связях / Сарат. политехн. ин-т. Саратов, 1989. 122 с. Деп. в ВИНИТИ 14.03.89, N1656–В89.
6. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
7. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. В 2 ч. М.: Наука. Ч.2, 1966. 332 с.
8. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
9. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1957. 408 с.
10. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. В 2 т. Т.2. М.: Наука. 1983. 544 с.
11. *Аминов М.Ш.* Некоторые вопросы движения и устойчивости твердого тела переменной массы // Тр. Казан. авиац. ин-та. Казань, 1959. Вып. 48. 118 с.
12. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
13. *Горр Г.В., Илюхин А.А.* Случаи постоянства модуля момента количества движения гиростата // Мех. тверд. тела. Киев, 1974. Вып. 6. С.9–15.
14. *Troilo R.* Moti del solido pesante in cui e` constante il modulo del momento delle quantita` di moto // Rend. Semin. mat. Univ. politech. Torino. 1974–1975 (1976). Vol.33. P.337–347.
15. *Grioli G.* Generalized precessions // Revue roumaine des sciences techniques. Ser. Mecan. appl. 1970. Vol.15, №2. P.249–255.
16. *Макеев Н.Н.* Вращательное движение космического аппарата в режиме авторегулирования // Космические исследования. 1994. Т.32, №2. С.125–126.

The geometrical interpretation of motion complicated mechanical system

N. N. Makeyev
Problems of Precision Mechanics and Control Institute Russian Academy of Sciences,
Russia, 410028, Saratov, Rabochaya st., 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

It is given the generalization of a geometrical interpretation for inertial motion of the complicated mechanical system with a similarly change structure. An invariable foundation of this system is rotate around of a motionless pole.

Key words: *interpretation; complicated mechanical system; similar change of a system.*