УДК 621.9.006.76-26

Уточнение методов расчёта вибрации шпиндельных бабок фрезерных и сверлильных деревообрабатывающих станков[1]

В. А. Романов, А. Н. Чукарин, Б. М. Флек
(Донской государственный технический университет)

Несмотря на различия технологических процессов, реализуемых на фрезерных и сверлильных станках, представлен общий подход к построению моделей виброакустической динамики колебательной системы «шпиндельный узел — режущий инструмент». Кроме этого на модельных фрезерных станках помимо традиционного фрезерования производится растачивание и сверление. Учитывая конструктивные особенности и геометрические параметры режущего инструмента, в качестве акустических моделей излучателя приняты линейный и точечный источники. Определение собственных частот и скоростей колебаний основано на использовании дифференциальных уравнений изгибных колебаний систем с распределёнными параметрами и функций А. Н. Крылова. Получены аналитические зависимости для скоростей колебаний, учитывающие параметры технологического процесса, конструктивные особенности инструмента и шпиндельных узлов.
Ключевые слова: *виброакустическая динамика, шпиндельный узел, режущий инструмент, сверлильные и фрезерные деревообрабатывающие станки.*

Введение. Конструктивные особенности данного типа станков, заключающиеся в отсутствии зубчатых колёс в приводе, высокие частоты вращения шпинделей, многообразие типов фрез позволяют предположить, что в формировании спектров шума доминируют шпиндельная группа и режущий инструмент. Поэтому в качестве моделей акустических излучателей приняты:

• линейный источник (при $R > 344/f_k$), уровни звукового давления которого на основании данных [1, 2] для рассматриваемых станков приведены к следующему виду:

$$L = 20\lg v_k + 20\lg f_k + 20\lg l + 10\lg R - 20\lg r + 124;$$

• точечный источник (при $R < 344/f_k$), звуковое давление которого приведено к следующему виду

$$L = 20\lg v_k + 20\lg f_k + 20\lg Rl - 20\lg r + 106,$$

где v_k — скорость колебаний источника; f_k — собственные частоты колебаний источника; R — радиус шпинделя или фрезы; l — длина источника; r — расстояние от источника до расчётной точки.

Результаты исследований. Как видно из полученных зависимостей для расчёта уровней звукового давления следует определить собственные частоты колебаний и виброскорости на этих частотах. Для этого в работе, в отличие от существующих, рассмотрены три варианта, приведённые на рис. 1.

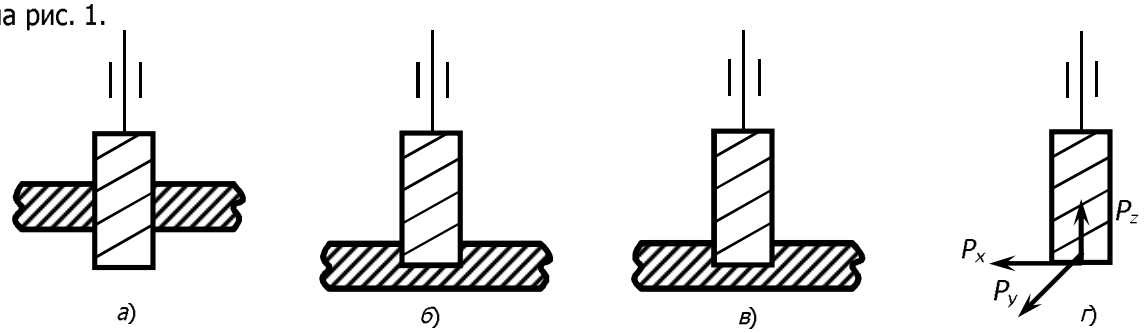


Рис. 1. Расчётная схема определения виброскоростей системы «шпиндельный узел — инструмент» деревообрабатывающих станков: а — отрезание или обработка торца изделия; б — фрезерование паза; в — схема, учитывающая весь шпиндельный узел; г — упрощённая схема фрез малого диаметра

[1] Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

Определение собственных частот колебаний и скоростей колебаний основано на использовании дифференцированных уравнений изгибных колебаний систем с распределёнными параметрами и функций А. Н. Крылова.

Общее дифференциальное уравнение изгибных колебаний имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(EJ_z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+m_0\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0$$
$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(EJ_y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+m_0\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0, \quad (1)$$

где E — модуль упругости, Па; J — момент инерции в направлении соответствующей оси, м^4; m_0 — распределённая масса, кг/м.

Решение уравнения, соответствующее характеру возбуждающей силы, которая фактически является функцией периодического характера, определяется из уравнения:

$$\frac{\partial^4 z(x)}{\partial x^4}-\alpha^4 z(x)=0$$
$$\frac{\partial^4 y(x)}{\partial x^4}-\alpha^4 y(x)=0$$

тождественного выражению свободных колебаний при значении

$$\alpha^2=\left(\frac{f_c}{f_в}\right)^{0,5}\frac{\pi}{l_1},$$

где f_c — собственные частоты колебаний, Гц; $f_в$ — частота силового воздействия, Гц.

Первая схема. Решения уравнения (1) на участках фрезы, свободных от нагрузки, представим в виде [3]:

$$z(x)=Ak_1(\alpha x)+Bk_2(\alpha x)+Ck_3(\alpha x)+Dk_4(\alpha x), \quad (2)$$

где $k_1(\alpha x)=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\alpha x+\cos\alpha x)$; $k_2(\alpha x)=\frac{1}{2}(\mathrm{sh}\alpha x+\sin\alpha x)$; $k_3(\alpha x)=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\alpha x+\cos\alpha x)$;

$k_4(\alpha x)=\frac{1}{2}(\mathrm{sh}\alpha x+\sin\alpha x)$.

Постоянные интегрирования определим из граничных условий. В точке приложения нагрузки должны выполняться условия сопряжения, требующие равенства прогибов, углов поворота и изгибающих моментов для обоих участков фрезы, а также скачка поперечной силы, равного по величине возмущающей силе. Поэтому

$$z(x)_{лев}=z(x)_{прав}+\frac{P}{\alpha^3 EJ}k_4\left[\alpha(x-l)\right].$$

Располагая начало координат на правой опоре, получим

$$z(x)_{прав}=Bk_2(\alpha x)+Dk_4(\alpha x),$$

так как постоянные A и C равны нулю в соответствии с граничными условиями на правой опоре. Соответственно на левом участке амплитудные значения смещений выражаются формулой

$$z(x)_{лев}=Bk_2(\alpha x)+Dk_4(\alpha x)+\frac{\overline{P_z}}{\alpha^3 EJ}k_4[\alpha(x-b)]=0.$$

Постоянные B и D определим из граничных условий на левой опоре

$$\frac{dz(x)}{dx}=Bk_2(\alpha l)+Dk_4(\alpha l)+\frac{\overline{P_z}}{\alpha^3 EJ}k_4[\alpha(x-b)]=0, \quad (3)$$

$$\frac{d^2z(x)}{dx^2} = \alpha^2\left[Bk_4(\alpha l) + Dk_2(\alpha l) + \frac{\overline{P_z}}{\alpha^2 EJ}k_2[\alpha(x-b)]\right] = 0.$$

Из системы (3) определяем

$$B = \frac{P_z}{\alpha^3 EJ}\left\{\frac{k_4[\alpha(l-St)]k_4(\alpha l) - k_2[\alpha(l-St)]k_2(\alpha l)}{k_4^2(\alpha l) - k_2^2(\alpha l)} \cdot \frac{k_4(\alpha l)}{k_2(\alpha l)} - \frac{k_4[\alpha(l-St)]}{k_2(\alpha l)}\right\},$$

$$D = -\frac{P_z}{\alpha^3 EJ}\frac{k_4[\alpha(l-St)]k_4(\alpha l) - k_2[\alpha(l-St)]k_2(\alpha l)}{k_4^2(\alpha l) - k_2^2(\alpha l)}.$$

Тогда величина прогиба по оси *OZ* равна

$$z(x,t) = [Bk_2(\alpha x) + Dk_4(\alpha x)]P(z).$$

Аналогичным образом находится прогиб и по оси *OY*.

Радиальная скорость колебаний определяется формулой $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial y}{\partial t}$.

Выражения для $y(x,t)$ и $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ имеют аналогичный вид с учётом замены $\overline{P}_z$ и $\tilde{P}_z$ на $\overline{P}_y$ и $\tilde{P}_y$.

Собственные частоты колебаний заготовки определяются по известной формуле

$$f_n = \frac{\pi^2 n^2}{2l^2}\left(\frac{EJ}{m_0}\right)^{0,5} \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

Полученные выше зависимости справедливы для абсолютно жёстких опор. Фактически передний подшипник шпинделя с патроном и обрабатываемая заготовка являются упруго-диссипативными опорами, податливость которых существенно влияет на динамические параметры системы «шпиндель — заготовка».

Вторая схема. Рассмотрим теперь фрезу, опёртую по концам на две упругие опоры с коэффициентами податливости c_1 (заднего центра) и c_2 (переднего шпиндельного подшипника и зажимного устройства). Начало координат расположим на заднем центре. Граничные условия на концах заготовки запишем в виде:

$$\begin{array}{ll} x = 0 & y = Qc_1; \quad d^2y/dx^2 = 0 \\ x = l & y = Qc_2; \quad d^2y/dx^2 = 0, \end{array} \tag{4}$$

где Q — амплитудное значение поперечной силы в соответствующем сечении, определяемой по формуле

$$Q = EJ\frac{d^3y}{dx^3}.$$

С учётом последнего выражения получим граничные условия в следующем виде

$$\left(y + c_1 EJ\frac{d^3y}{dx^3}\right)\Bigg|_{x=0} = 0$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 0$$

$$\left(y - c_2 EJ\frac{d^3y}{dx^3}\right)\Bigg|_{x=l} = 0$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=l} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения общее выражение для прогибов (2) и учитывая соотношения функций А. Н. Крылова, получим следующую систему уравнений относительно постоянных *A, B, C, D*

$$A + c_1 EJ\alpha^3 D = 0,$$
$$A\left[k_1(\lambda) - c_2 EJ\alpha^3 k_2(\lambda)\right] + B\left[k_2(\lambda) - c_2 EJ\alpha^3 k_3(\lambda)\right] + D\left[k_4(\lambda) - c_2 EJ\alpha^3 k_1(\lambda)\right] = 0,$$
$$Ak_3(\lambda) + Bk_4(\lambda) + Dk_2(\lambda) = 0,$$

где $\lambda = \alpha l$.

Решая данную систему, получим выражение для определения собственных частот колебаний

$$(\mathrm{sh}\lambda - \sin\lambda)^2 - c_2 EJ\alpha^3(\mathrm{ch}\lambda + \cos\lambda)(\mathrm{sh}\lambda - \sin\lambda) - \mathrm{ch}\lambda - \cos\lambda - c_2 EJ\alpha^3(\mathrm{sh}\lambda + \sin\lambda)c_1 EJ\alpha^3(\mathrm{sh}\lambda - \sin\lambda) -$$
$$-\left[\mathrm{sh}\lambda + \sin\lambda - c_2 EJ\alpha^3(\mathrm{ch}\lambda + \cos\lambda)\right]\left[\mathrm{sh}\lambda + \sin\lambda - c_1 EJ\alpha^3(\mathrm{ch}\lambda - \cos\lambda)\right] = 0.$$

Представляя нагрузку с помощью дельта-функции и учитывая краевые условия (4), получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний заготовки на податливых опорах

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{2}{m_0 l} P_z y(t) \sum_{n=1}^{\infty}\left[Ax + B + \frac{1}{4}\left(3\sin\frac{\pi n x}{l} - \sin\frac{3\pi n x}{l}\right)\right]$$

где $A = \dfrac{c_2 R_2 - c_1 R_1}{l_2}$; $B = \dfrac{c_1 R_1}{l}$; R_1 и R_2 — реакции в опорах заднего центра и в переднем шпиндельном подшипнике.

Аналогичным уравнением описываются колебания по оси *y* с учётом замены $\bar{P}_y$ и $\tilde{P}_y$ на $\bar{P}_z$ и $\tilde{P}_z$.

Эти уравнения в конечном виде не интегрируются, поэтому для их решения использованы численные методы.

В качестве начальных условий принимаем $(x = l$ и $t = 0)$

$$y = c_z \bar{P}_y \text{ и } dy/dt = d(c_2 R_2)/dt,$$

где R_2 — реакция в переднем шпиндельном подшипнике.

Решение этой задачи с использованием функций А. Н. Крылова имеет вид

$$y_{лев} = -R_1 c_1 k_1(\alpha x) + Bk_2(\alpha x) + Dk_4(\alpha x) + \frac{\bar{P}_y}{\alpha^3 EJ} k_4\left[\alpha(l - St)\right].$$

Постоянные *B* и *D* определим, исходя из краевых условий на левом конце заготовки, получаем систему уравнений:

$$y\big|_{x=l} = R_2 c_2 = -R_1 c_1 k_1(\alpha l) + Bk_2(\alpha l) + Dk_4(\alpha l) + \frac{P_y}{\alpha^3 EJ} k_4(\alpha l),$$
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 = -R_1 c_1 k_3(\alpha l) + Bk_4(\alpha l) + Dk_2(\alpha l) + \frac{\bar{P}_y}{\alpha^3 EJ} k_2(\alpha l),$$

из которой вычисляем

$$D = \left[\frac{R_1 c_1 k_1(\alpha l) + R_2 c_2}{k_2(\alpha l)} + \frac{R_1 c_1 k_3(\alpha l)}{k_4(\alpha l)}\right]\frac{k_2(\alpha l)k_4(\alpha l)}{k_4^2(\alpha l) + k_2^2(\alpha l)} - \frac{\bar{P}_y}{\alpha^3 EJ} \cdot \frac{k_4\left[\alpha(l - St)\right]k_4(\alpha l) + k_2\left[\alpha(l - St)\right]k_2(\alpha l)}{k_4^2(\alpha l) + k_2^2(\alpha l)},$$

$$B = \frac{P_y}{\alpha^3 EJ} \cdot \frac{k_4\left[\alpha(l - St)\right]k_2(\alpha l) + k_2\left[\alpha(l - St)\right]k_4(\alpha l)}{k_4^2(\alpha l) + k_2^2(\alpha l)} \cdot \frac{k_2(\alpha l)}{k_4(\alpha l)} - \frac{\bar{P}_y k_2\left[\alpha(l - St)\right]}{\alpha^3 EJ k_4(\alpha l)} -$$
$$-\left[\frac{R_1 c_1 k_1(\alpha l) + R_2 c_2}{k_2(\alpha l)} + \frac{R_1 c_1 k_3(\alpha l)}{k_4(\alpha l)}\right]\frac{k_2(\alpha l)}{k_4^2(\alpha l) + k_2^2(\alpha l)} + R_1 c_1 \frac{k_3(\alpha l)}{k_4(\alpha l)}.$$

Вибросмещения по оси *y* в этом случае определяются выражением

$$y(x,t)=\left[-R_1c_1k_1(\alpha x)+Bk_2(\alpha x)+Dk_4(\alpha x)\right]\left(1+C^*\sin\omega t\right).$$

Теперь определим радиальную скорость колебаний как $\frac{\partial y}{\partial t}$. Аналогичными выражениями описываются $z(x, t)$ и $\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}$ с учётом замены $\bar{P}_y$ и $\tilde{P}_y$ на $\bar{P}_z$ и $\tilde{P}_z$.

В окончательном виде прогибы режущего инструмента по оси *z* определяются выражением

$$z(x)=\frac{1}{2}\left[A(\operatorname{ch}\alpha x+\cos\alpha x)+B(\operatorname{sh}\alpha x+\sin\alpha x)+D(\operatorname{sh}\alpha x-\sin\alpha x)\right]\sin\omega t.$$

Прогибы режущего инструмента по оси *OY* находятся по аналогичному выражению, в котором сила P_z заменяется на P_y.

Третья схема. Для существенного уточнения колебательной модели следует рассмотреть систему шпиндель — заготовка, которая представляет собой балку на двух опорах с консольной частью. В данной расчётной схеме приняты следующие обозначения: J_1— средневзвешенный момент инерции межопорной части шпинделя, а J_2 — средневзвешенный момент инерции консольной части.

Для каждого из участков запишем выражения прогибов, используя функции А. Н. Крылова:

$$y_1=c_1k_1(\lambda x)+c_2k_2(\lambda x)+c_3k_3(\lambda x)+c_4k_4(\lambda x) \text{ при } 0\le x\le b,$$
$$y_2=c_1'k_1(\lambda x)+c_2'k_2(\lambda x)+c_3'k_3(\lambda x)+c_4'k_4(\lambda x) \text{ при } b\le x\le l,$$

где *l* — длина шпинделя и заготовки, м; *b* — длина межопорной части шпинделя, м.

На первом участке $y_1(b)=\ddot{y}_2(0)=0$

Поэтому $c_1=c_3=0$

В точке сопряжения двух участков

$$y_1(b)=y_2(b),\quad \left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{x=b}=\left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{x=b}.$$

Поперечные силы в конце первого и начале второго участка отличаются на величину опорной реакции.

Поэтому

$$EJ_1\left.\frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3}\right|_{x=b}=EJ_2\left.\frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3}\right|_{x=b}-R. \qquad (5)$$

Условия сопряжения участков можно выполнить, если представить прогибы на втором участке в виде

$$J_2y_2=J_1y_1+\frac{R}{\lambda^3E}k_4[\lambda(x-b)]. \qquad (6)$$

Функция k_4 в выражении (6) тождественно равна 0 при $x\le b$ и не равна 0 при $x>b$. Последнее выражение справедливо для всей системы «шпиндель — заготовка». Подставив в (5) выражение для y_1 получим ($c_1 = c_3 = 0$)

$$y=\frac{J_1}{J_2}[c_2k_2(\lambda x)+c_4k_4(\lambda x)]+\frac{R}{\lambda^3EJ}k_4[\lambda(x-b)],$$

где $\lambda=\left(f_n/a\right)^{0,5}$.

Полученное выражение для *y* содержит постоянные c_2, c_4 и *R*, которые можно определить из условий

$$x=b \qquad y=0$$
$$x=l \qquad \ddot{y}=\dddot{y}=0.$$

В итоге получаем систему из трёх уравнений

$$\begin{aligned} & c_2k_2(\lambda b)+c_4k_4(\lambda b)=0, \\ & \frac{J_1}{J_2}\left[c_2k_4(\lambda l)+c_4k_2(\lambda l)\right]+\frac{R}{\lambda^3 EJ_2}k_2\left[\lambda(l-b)\right]=0, \\ & \frac{J_1}{J_2}\left[c_2k_3(\lambda l)+c_4k_1(\lambda l)\right]+\frac{R}{\lambda^3 EJ_2}k_2\left[\lambda(l-b)\right]=0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Приравнивая нулю определитель системы (7), получим уравнение для расчёта собственных частот колебаний:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{sh}\lambda b+\sin\lambda b & \mathrm{sh}\lambda b-\sin\lambda b & 0 \\ \frac{J_1}{J_2}\left(\mathrm{sh}\lambda l-\sin\lambda l\right) & \frac{J_1}{J_2}\left(\mathrm{sh}\lambda l+\sin\lambda l\right) & \frac{\mathrm{sh}\lambda(l-b)+\sin\lambda(l-b)}{\lambda^3 EJ_2} \\ \frac{J_1}{J_2}\left(\mathrm{ch}\lambda l-\cos\lambda l\right) & \frac{J_1}{J_2}\left(\mathrm{ch}\lambda l+\cos\lambda l\right) & \frac{\mathrm{ch}\lambda(l-b)+\cos\lambda(l-b)}{\lambda^3 EJ_2} \end{bmatrix}=0.$$

Четвёртая схема. Координата приложения нагрузки на фрезе не меняется относительно точки закрепления. Расчётной моделью является консольно-защемлённая балка. Прогибы фрезы по осям *OZ* и *OY* определяются из уравнения (1), в котором

$$\alpha^2=\frac{\omega\pi^2}{f_{pi}}\left(\frac{2n-1}{2l_p}\right)^2.$$

Здесь f_{pi} — собственные частоты колебаний фрезы, Гц; l_p — длина консольной части, м.

Для функции $z(x)=Ak_1(\alpha x)+Bk_2(\alpha x)+Ck_3(\alpha x)+Dk_4(\alpha x)$ имеем граничные условия

$$\begin{aligned} & x=0 \quad z(x)=\frac{\bar{P}_z l_p^3}{3EJ}; \quad \ddot{z}(x)=0, \\ & x=l_p \quad z(x)=0; \quad \ddot{z}(x)=0. \end{aligned}$$

При $\ddot{z}(x=0)=0$ получаем, что $C=0$, а

$$z(x=0)=A=-\frac{P_z l_p^3}{3EJ_p}.$$

Из остальных граничных условий находим:

$$\begin{aligned} & -Ak_1(\alpha l_p)+Bk_2(\alpha l_p)+Dk_4(\alpha l_p)=0 \\ & -Ak_3(\alpha l_p)+Bk_4(\alpha l_p)+Dk_2(\alpha l_p)=0 \end{aligned}$$

После преобразований получаем

$$D=\frac{P_z l_p^3}{6EJ_p}\frac{\mathrm{ch}\alpha l_p\sin\alpha l_p-\mathrm{sh}\alpha l_p\cos\alpha l_p}{\mathrm{sh}\alpha l_p\sin\alpha l_p},$$

$$B=\frac{P_z l_p^3}{6EJ_p}\frac{\mathrm{ch}\alpha l_p\sin\alpha l_p+\mathrm{sh}\alpha l_p\cos\alpha l_p}{\mathrm{sh}\alpha l_p\sin\alpha l_p}.$$

Выводы. Приведённые результаты исследований позволяют существенно уточнить модели виброакустической динамики основной колебательной системы «шпиндельный узел — режущий инструмент» модельных и сверлильных деревообрабатывающих станков. Обоснован общий подход к расчёту процесса шумообразования этих станков. Различия в самом расчёте заключаются только в задании силового воздействия от процесса резания. Полученные зависимости учитывают

все основные конструктивные параметры как режущего инструмента, так и шпинделя, а также параметры технологического процесса.

Библиографический список

1. Никифоров, А. С. Акустическое проектирование судовых конструкций / А. С. Никифоров. — Ленинград : Судостроение, 1990. — 200 с.

2. Чукарин, А. Н. Теория и методы акустических расчётов и проектирования технологических машин для механической обработки. — Ростов-на-Дону : Изд. центр ДГТУ, 2005. — 152 с.

3. Расчёты на прочность в машиностроении / под ред. С. Д. Пономарёва. — Москва : Машгиз, 1959. — 884 с.

Материал поступил в редакцию 28.12.2012.

References

1. Nikiforov, A. S. Akusticheskoe proektirovanie sudovy`x konstrukcij. [Acoustic design of ship structures.] Leningrag : Sudostroenie, 1990, 200 p. (in Russian).

2. Chukarin, A. N. Teoriya i metody` akusticheskix raschyotov i proektirovaniya texnologicheskix mashin dlya mexanicheskoj obrabotki. [Theory and techniques of acoustic calculations and design of technological machines for mechanical operation.] Rostov-on-Don : DSTU Publ. Centre, 2005, 152 p. (in Russian).

3. Ponomarev, S. D., ed. Raschyoty` na prochnost` v mashinostroenii. [Stress calculations in machine building.] Moscow : Mashgiz, 1959, 884 p. (in Russian).

ANALYSIS TECHNIQUE REFINEMENT OF SPINDLE HEAD VIBRATION OF MILLING AND DRILLING WOODWORKERS[1]

V. A. Romanov, A. N. Chukarin, B. M. Flek
(Don State Technical University)

Various production methods are realized on the milling and drilling machines. A general approach to the model construction for the vibroacoustic dynamics of the oscillating system "spindle unit — cutting tool" is presented. On the pattern millers, boring and drilling are performed apart from the customary milling. Considering the design features and geometrics of the machining tool, linear and point sources are accepted as an acoustic radiator model. The modal test technology is based on the application of the differential equations of the bending vibrations of the distributed systems and A. N. Krylov's functions. The analytic dependences for the vibration velocities considering process variables, design features of the tool and spindle units are obtained.

Keywords: *vibroacoustic dynamics, spindle unit, machining tool, milling and drilling woodworkers.*

[1] The research is done within the frame of the independent R&D.