УДК 517.988, 517.977.56

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ МЕТОДА УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

А.В. Чернов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

chavnn@mail.ru

Поступила в редакцию 19.10.2009

Для задачи оптимизации нелинейного управляемого функционально-операторного уравнения в банаховом идеальном пространстве формулируется теорема о достаточных условиях сходимости метода условного градиента. Применение излагаемой теории иллюстрируется на примере управляемой задачи Гурса – Дарбу.

Ключевые слова: нелинейное управляемое функционально-операторное уравнение, задачи оптимизации, метод условного градиента.

Введение

Пусть $n, m, \ell, s \in N$ – заданные числа, $\Pi \subset R^n$ – измеримое (здесь и далее в смысле Лебега) ограниченное множество, X, Z, U – *банаховы идеальные пространства*[1] (БИП) измеримых на Π функций, $D \subset U^s$ – выпуклое множество, $A : Z^m \to X^\ell$ – заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО). Рассмотрим управляемое функционально-операторное уравнение

$$x(t) = \theta(t) + A\big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\big](t),$$
$$t \in \Pi, \quad x \in X^\ell, \qquad (1)$$

где $u \in D$ – управление, $\theta \in X^\ell$, $f : \Pi \times R^\ell \times \times R^s \to R^m$ – заданная функция, такая, что:

F$_1$) для всех $y \in X^\ell$, $u \in D$ суперпозиция $f\big(.,y(.),u(.)\big)$ принадлежит Z^m.

Уравнение (1) можно получить, например, из функционально-операторного уравнения

$$z(t) = f\big(t, A[z](t), u(t)\big),$$
$$t \in \Pi, \ z \in Z^m, \qquad (2)$$

изучаемого в [1–5] (в случае лебеговых пространств). Для этого достаточно подействовать на (2) оператором A и произвести замену $A[z] = x$. При этом уравнения (1) и (2) будут эквивалентны при условии единственности решения того и другого уравнения. Как свидетельствуют многочисленные примеры из [2, 3], к уравнению (2), в свою очередь, с помощью *метода обращения главной части* может быть сведен довольно широкий класс управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ). Как видно из следующего примера, в некоторых случаях перейти от управляемой НКЗ к уравнению (1) можно и непосредственно.

А именно, рассмотрим управляемую задачу Гурса – Дарбу:

$$\begin{cases} x''_{t_1t_2}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t = (t_1, t_2) \in \Pi = [0, T_1] \times [0, T_2]; \\ x(t_1, 0) = \omega_1(t_1), & t_1 \in [0, T_1]; \\ x(0, t_2) = \omega_2(t_2), & t_2 \in [0, T_2]; \\ \omega_1(0) = \omega_2(0). \end{cases} \qquad (3)$$

Будем считать, что функции ω_1 и ω_2 абсолютно-непрерывны, а функция f удовлетворяет условию F$_1$) при $\ell = 1$, $m = 1$, $X = L_q(\Pi)$, $Z = = L_p(\Pi)$, $1 \le p < q < +\infty$, $U = L_r(\Pi)$, $r \in [1, \infty)$. Решение задачи (3) будем понимать в смысле п.в. и искать его среди функций из $L_q(\Pi)$, имеющих смешанную производную класса $L_p(\Pi)$. В таком случае, обращая дифференциальный оператор этой задачи, приводим ее к виду:

$$x(t_1, t_2) = \omega_1(t_1) + \omega_2(t_2) - \omega_1(0) + \\ + \int_0^{t_1} d\xi_1 \int_0^{t_2} f(\xi, x(\xi), u(\xi)) d\xi_2.$$

Полученное уравнение равносильно следующему:

$$x(t) = w(t) + A[f(.,x,u)](t), t \in \Pi, x \in L_q(\Pi), \ (4)$$

где $w(t_1, t_2) = \omega_1(t_1) + \omega_2(t_2) - \omega_1(0)$, $w \in L_q(\Pi)$, $A : L_p(\Pi) \to L_q(\Pi)$ – оператор, определяемый формулой:

$$A[z](t_1,t_2)=\int_0^{t_1}d\xi_1\int_0^{t_2}z(\xi_1,\xi_2)d\xi_2.$$

Уравнение (4) имеет вид (1) и удовлетворяет всем предположениям, которые мы приняли относительно уравнения (1). В данном примере оператор A возникает как разрешающий оператор НКЗ, обращающий главную часть дифференциального уравнения. Его свойства отражают характер зависимости решения соответствующего линейного дифференциального уравнения от правой части при нулевых начально-краевых условиях.

При численной оптимизации сосредоточенных и распределенных управляемых систем удобно понимать целевой функционал задачи оптимизации как функционал, зависящий только от управления. Для управляемых НКЗ, допускающих описание в форме (1), речь здесь идет о представлении критерия оптимальности в виде

$$J[u]=F[x_u,u], \tag{5}$$

где $u\in D$ – управление, а $x_u\in X^{\ell}$ – отвечающее ему решение уравнения (1), $F:X^{\ell}\times\times D\to R$ – дифференцируемый (в том или ином смысле) функционал. Удобство такого представления связано с тем, что в противном случае приходится рассматривать целевой функционал как функционал $F[x,u]$ на множестве пар (x,u), связанных соотношением (условием связи) (1). В результате в множество ограничений задачи оптимизации включается весьма нетривиальное (для учета и исследования) ограничение (1). Кроме того, представление (5) дает нам возможность для оптимизации уравнения (1) применить алгоритм метода условного градиента [6, § XV.4] для общей задачи минимизации в банаховом пространстве и при обосновании сходимости этого метода использовать некоторые общие идеи [6, § XV.4]. Тем не менее отметим одно отличие. Распространенным требованием при доказательстве сходимости метода условного градиента в общей задаче минимизации в банаховом пространстве является липшицевость градиента целевого функционала (см., например, [6, 7]; в [7, § VIII.4] соответствующие абстрактные результаты в качестве иллюстрации применяются к задаче минимизации квадратичного функционала, заданного на решениях управляемой задачи Коши, связанной с обыкновенным линейным дифференциальным уравнением). Мы изначально рассматриваем более конкретную задачу минимизации функционала вида (5) и вместо указанного требования предполагаем существование единственного решения уравнения (1) для всех $u\in D$ и равномерную поточечную ограниченность этого решения. Достаточные условия, гарантирующие выполнение этих предположений, можно найти в [8]. Кроме того, нам требуется также равномерная поточечная оценка приращения решения уравнения (1) через приращение управления. Условия, при которых такая оценка имеет место, формулируются в данной статье. Дадим некоторые пояснения касательно наших предположений.

Представление (5) само по себе приводит к необходимости рассмотрения проблемы *сохранения разрешимости* уравнения (1) при варьировании управления. В частности, дифференцируемость функционала $J[u]$ в точке $u_0\in D$ предполагает, что он определен в некоторой окрестности этой точки, следовательно, имеет место сохранение разрешимости уравнения (1), а стало быть, сохранение глобальной разрешимости соответствующей НКЗ, при варьировании управления u_0 в пределах этой окрестности. О том что эта проблема не является надуманной (сохранение глобальной разрешимости распределенных систем может не иметь места даже при малых вариациях управления), свидетельствуют, в частности, примеры из [2, 3]. Достаточные условия сохранения глобальной разрешимости управляемых начально-краевых задач при малых (в определенном смысле) вариациях управления можно найти, например, в [1–5, 9, 10]. Вместе с тем использование некоторых градиентных методов для минимизации функционала (5) на множестве D, в частности градиентного метода с дроблением шага и метода условного градиента, предполагает, что соответствующее уравнение (1) обладает свойством разрешимости *тотально*, то есть на всем множестве D допустимых управлений. Иными словами, речь идет о *тотальном сохранении разрешимости* (ТСР) указанного уравнения. Кроме того, представление функционала в виде (5) возможно лишь тогда, когда уравнение (1) не просто разрешимо для соответствующих управлений, а однозначно разрешимо.

В следующих далее двух параграфах приводятся точные формулировки основных результатов, вкратце обозначенных выше. Теорема о сходимости метода условного градиента формулируется в §1. Теорема о равномерной оценке приращения решения формулируется в § 2. Применение доказанных абстрактных результатов иллюстрируется на примере управляемой задачи Гурса – Дарбу. Совершенно аналогичным образом можно рассмотреть и многие другие, достаточно содержательные примеры (в частности, при соответствующих условиях – примеры из статьи [2]).

1. Формулировка основного результата

В данном параграфе будем считать выполненными следующие предположения.

H$_1$) Для каждого $u \in D$ уравнение (1) имеет, и притом единственное, решение $x_u \in X^{\ell}$.

H$_2$) Существуют $u_* \in U$, $x_* \in X$ такие, что $|u(t)| \le u_*(t)$, $|x_u(t)| \le x_*(t)$ $\forall u \in D$.

H$_3$) Существует положительный ЛОО $B_* : U \to X$ такой, что для всех управлений $u_0, u_1 \in D$ и отвечающих им решений $x_0, x_1 \in X^{\ell}$ уравнения (1) справедлива оценка:

$$|\Delta x| \le B_*[|\Delta_u f(x_0)|],$$

где $\Delta x = x_1 - x_0$, $\Delta_u f(x_0) = f(.,x_0(.),u_1(.)) - - f(.,x_0(.),u_0(.))$.

Будем предполагать также, что рассматриваемые пространства удовлетворяют условиям:

S$_1$) Существуют БИП Z_X и числа $K_X > 0$ и $\alpha_X > 0$ такие, что для всех $x \in X$, $y \in Z_X$ имеем: $yx \in Z$, и справедливо неравенство $\|yx\|_Z \le K_X \cdot \|y\|_{Z_X}^{\alpha_X} \cdot \|x\|_X$.

S$_2$) Существуют БИП Z_U и числа $K_U > 0$ и $\alpha_U > 0$ такие, что для всех $x \in U$, $y \in Z_U$ имеем: $yx \in Z$, и справедливо неравенство $\|yx\|_Z \le K_U \cdot \|y\|_{Z_U}^{\alpha_U} \cdot \|x\|_U$.

S$_3$) БИП Z, Z_X и Z_U являются пространствами с порядково-непрерывной нормой.

Замечание 1. *Напомним* (*см., например,* [*6, п. 4.3.2*]), *что БИП* $Z = Z(\Pi)$ *называется БИП с порядково-непрерывной нормой, если из того, что последовательность* $\{z_n\} \subset Z$ *для п.в.* $t \in \Pi$ *монотонно стремится к нулю:* $z_n(t) \searrow 0$, *следует, что* $\|z_n\| \to 0$. *Так, например,* $Z = L_\infty(\Pi)$ *не является пространством с порядково-непрерывной нормой, но вложено в любое* $L_p(\Pi)$, $p \in [1,\infty)$, *каждое из которых по теореме Лебега о сходимости является БИП с порядково-непрерывной нормой.*

Относительно функции f и ЛОО A предполагаем, что помимо условия F$_1$), указанного выше, выполняются следующие условия.

F$_2$) Функция $f(t,y,u)$ непрерывно дифференцируема по переменным $y \in R^{\ell}$, $u \in R^s$ и вместе с производными измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $\{y;u\} \in R^{\ell} \times R^s$.

F$_3$) Для всех $\{y,u\} \in X^{\ell} \times U^s$ суперпозиции $f_y'(.,y(.),u(.)) \in Z_X^{m\times\ell}$, $f_u'(.,y(.),u(.)) \in Z_U^{m\times s}$.

A$_0$) Для всякого $y \in Z_X^{m\times\ell}$ операторы $A_{(y)} : X^{\ell} \to X^{\ell}$ и $A_{[y]} : Z^m \to Z^m$, определяемые соответственно формулами:

$$A_{(y)}[x] = A[yx], \quad x \in X^{\ell};$$

$$A_{[y]}[z] = yA[z], \quad z \in Z^m,$$

являются квазинильпотентными, то есть их спектральные радиусы $\rho(A_{(y)}) = \rho(A_{[y]}) = 0$.

Замечание 2. *Пользуясь неравенством Гельдера, нетрудно показать, что если, например,* $Z = L_p(\Pi)$, $X = L_q(\Pi)$, $q \ge p \ge 1$, *то условие* S$_1$) *выполнено при* $Z_X = L_\sigma(\Pi)$, $K_X = = \alpha_X = 1$, *где* $\frac{1}{q} + \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{p}$ *(при* $q = p$, *соответственно,* $\sigma = \infty$*). Мы ссылаемся на это обстоятельство в приведенном ниже примере. Однако выполнение условия* S$_1$) *не является свойством одних только лебеговых пространств. В частности, его выполнение можно установить и в более общей ситуации пространств Орлича* (*обобщающих, как известно, лебеговы пространства*). *А именно, пусть* $X = L_{M_X}$, $Z = L_{M_Z}$ *– пространства Орлича* (*см.* [*6, § IV.3*]), *причем существует* N*-функция* $M_{\hat X}(.)$ *такая, что* $M_Z(2M_{\hat X}(.)) = M_X(.)$. *Тогда функция* $M_Y(.) = M_Z(2M_{\hat X}^*(.))$ *будет, очевидно,* N*-функцией. Соответственно определено пространство Орлича* $Y = L_{M_Y}$. *При этом будет справедливо неравенство:* $\|xy\|_{L_{M_Z}} \le 2\|x\|_{L_{M_X}} \|y\|_{L_{M_Y}}$, *и тем самым, условие* S$_1$) *выполняется. Однако доказательство этого факта намного менее тривиально, чем для случая лебеговых пространств.*

Замечание 3. *Достаточные условия выполнения предположений* A$_0$) *можно найти в* [*8, 11*].

Далее в целях простоты изложения мы будем предполагать, что элемент $\theta \in X^{\ell}$ в уравнении (1) фиксирован, то есть не является управляющим. Это требование не является особо ограничительным, поскольку с помощью замены $x - \theta = \overline{x}$ уравнение (1) сводится к уравнению вида (1) с $\theta = 0$ и управляющим набором u, расширенным добавлением всех компонент θ, при условии, что $X = U$. Последнее условие несущественно, поскольку вместо пространства U^s можно рассмотреть прямое произведение различных БИП, удовлетворяющих сходным условиям. Соответствующие изменения в условиях, формулировках и доказательствах весьма очевидны, но приводят к еще большему усложнению и без того достаточно громоздких выкладок. Исключительно по этой причине мы рассматриваем здесь указанный упрощенный случай. Соответственно, будем рассматривать целевой функционал вида

$$J[u] = \Phi[F(.,x_u,u)],$$

где $\Phi : \hat{Z}^{\hat{m}} \to R$ – некоторый линейный непрерывный функционал[2], $\hat{Z}$ – БИП, удовлетворяющее таким же условиям, как пространство Z с заменой Z_X, Z_U на $\hat{Z}_X, \hat{Z}_U$ соответственно; функция $F(t,x,u)$ удовлетворяет таким же условиям, как функция $f(t,x,u)$ с заменой m на $\hat{m}$, Z на $\hat{Z}$, Z_X на $\hat{Z}_X$, Z_U на $\hat{Z}_U$; $x_u \in X^{\ell}$ – решение уравнения (1), отвечающее управлению u.

Теорема 1. *При сделанных предположениях существует константа $M > 0$, такая, что для любого выбора управлений $u_0, u_1 \in D$ справедлива оценка:*

$$|J(u_1) - J(u_0)| \le M \cdot \|u_1 - u_0\|.$$

Теорема 2. *При сделанных предположениях для любого выбора управлений $u_0, u_1 \in D$ функционал $J[u]$ имеет производную по вектору*[3] *$h = u_1 - u_0$, определяемую формулой*

$$J_h'(u_0) = \Psi[f_u'(.,x_0,u_0)h] + \Phi[F_u'(.,x_0,u_0)h], \quad (6)$$

где $x = x_0 \in X^{\ell}$ – решение уравнения (1), отвечающее управлению $u = u_0$, $\Psi = \Phi\hat{\Lambda}_0 R(A\Lambda_0)A \in (Z^m)^*$, $\Lambda_0 : X^{\ell} \to Z^m$ – оператор умножения на функцию $f_y'(.,x_0,u_0)$; $\hat{\Lambda}_0 : X^{\ell} \to \hat{Z}^{\hat{m}}$ – оператор умножения на функцию $F_y'(.,x_0,u_0)$; $R(A\Lambda_0) = \sum_{k=0}^{\infty}(A\Lambda_0)^k = (I - A\Lambda_0)^{-1}$. Более того, существует функция $\gamma(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +0$ такая, что для остатка в соответствующей формуле приращения

$$J(u_0 + \lambda h) - J(u_0) = \lambda J_h'(u_0) + r_\lambda(u_0,u_1) \quad (7)$$

справедлива равномерная оценка: $|r_\lambda(u_0,u_1)| \le \lambda \cdot \gamma(\lambda)$ для всех $u_0, u_1 \in D$.

Замечание 4. *Таким образом, существует производная $\frac{\partial J}{\partial h}(u_0) = J_h'(u_0)$ по любому возможному для множества D в точке $u_0 \in D$ направлению $h \in U^s$, $\|h\| = 1$.*

Теорема 3. *Функционал $\Psi \in (Z^m)^*$ является единственным решением сопряженного уравнения*

$$\Psi - A^*\Lambda_0^*\Psi = A^*\hat{\Lambda}_0^*\Phi.$$

Согласно теореме 2, для любых управлений $u_0, u_1 \in D$ существует производная функционала J по вектору $h = u_1 - u_0$, то есть $J_h'(u_0)$, которая определяется формулой (6). Заметим, что выражение в правой части формулы (6) имеет смысл для всех $h \in U^s$, и более того, функционал $J_\Gamma'(u_0) : U^s \to R$, определяемый ею, является линейным и непрерывным: $J_\Gamma'(u_0) \in (U^s)^*$, и справедливо равенство:

$$J_h'(u_0) = J_\Gamma'(u_0)[h] \text{ для всех } h = u_1 - u_0,$$

где $u_i \in D$, $i = 0,1$.

Если бы производная $J_h'(u_0)$ существовала для всех $h \in U^s$, то функционал $J_\Gamma'(u_0)$ был бы производной функционала J по Гато в точке u_0. Это обстоятельство служит оправданием принятого нами обозначения, хотя при сделанных нами предположениях функционал $J_\Gamma'(u_0)$, вообще говоря, производной по Гато не является. Тем не менее установленное равенство позволяет организовать итерационную последовательность $\{u_k\}$ по методу условного градиента, а именно:

$$u_0 \in D, \quad u_{k+1} = u_k + \varepsilon_k(w_k - u_k), \quad (8)$$

где $w_k \in D$ выбирается из условия:

$$J_\Gamma'(u_k)[w_k] = \min_{u \in D} J_\Gamma'(u_k)[u], \quad (9)$$

а величина спуска ε_k находится из равенства:

$$J[u_{k+1}] = \min_{\lambda\in[0;1]} J[u_k + \lambda(w_k - u_k)]. \qquad (10)$$

Собственно говоря, именно здесь нам и требуется ТСР уравнения (1). При сделанных предположениях можно обосновать корректность формул (8)–(10). Кроме того, нетрудно понять, что вопрос о существовании минимума в формуле (9) в случае, когда множество D определяется как конусный отрезок:

$$D = \{u \in U^s : \ \bar{u}(t) \le u(t) \le \hat{u}(t) \text{ п.в. } t \in \Pi\} = = [\bar{u};\hat{u}], \quad \bar{u},\hat{u} \in U^s,$$

решается достаточно просто.

Далее по аналогии с [6, п. XV.4.5, с. 603] точку $u_* \in D$ будем называть *стационарной* точкой функционала $J[u]$ на множестве D, если

$$J'_\Gamma(u_*)[u_*] = \min_{u\in D} J'_\Gamma(u_*)[u].$$

Можно показать, что все точки локального минимума функционала $J[u]$ на множестве D стационарны.

Теорема 4. *Для последовательностей* $\{u_k\}$ *и* $\{w_k\}$, *определяемых формулами* (8)–(10), *справедливо соотношение:*

$$|J'_\Gamma(u_k)[w_k - u_k]| = -J'_\Gamma(u_k)[w_k - u_k] \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Замечание 5. *В силу теоремы 4 метод условного градиента* (8)–(10) *сходится, и в качестве критерия останова можно использовать условие малости величины* $|J'_\Gamma(u_k)[w_k - u_k]|$. *Более того, если функция* $J'_\Gamma(.) : D \to (U^s)^*$ *непрерывна, то в силу теоремы 4 любая предельная точка последовательности* (8) *является стационарной точкой функционала* $J[u]$ *на множестве* D. *В случае выпуклости функционала* $J[u]$ *нетрудно показать, что последовательность* (8) *является минимизирующей. Что касается достаточных условий выполнения этих дополнительных требований, то они должны быть предметом отдельного рассмотрения.*

2. Оценка приращения решения

Пусть $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ – σ-алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств множества Π. Далее для всякого множества $H \in \Sigma$ оператор умножения на характеристическую функцию χ_H будем обозначать P_H независимо от того, в каком именно БИП он действует.

Определение. *Систему* $\mathcal{B}(A) = \{H \in \Sigma : P_H A P_H = P_H A\}$ *будем, следуя* [9], *называть* ***системой вольтерровых множеств*** *ЛОО* $A : Z^m \to X^\ell$. *При этом для числа* $\delta > 0$ *подсистему*

$$\mathcal{T} = \{\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi\} \subset \mathcal{B}(A)$$

будем, следуя [3,5], *называть*

1) ***вольтерровой*** δ***-цепочкой*** *ЛОО* A, *если* $\|P_h A P_h\| < \delta$ *для всех* $h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$;

2) ***вольтерровой*** δ***-малой по мере цепочкой множеств*** *ЛОО* A, *если* $\operatorname{mes}(h) < \delta$ *для всех* $h = H_i \setminus H_{i-1}$, $i = \overline{1,k}$.

В дополнение к уже перечисленным во введении условиям будем предполагать, кроме того, что выполняются уже упомянутое в § 1 условие S_1), а также следующие условия:

S'_3) БИП Z_X является пространством с порядково-непрерывной нормой.

F'_2) Функция $f(t,y,u)$ дифференцируема по переменной $y \in R^\ell$ и вместе с производной $f'_y(t,y,u)$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $\{y,u\} \in R^\ell \times R^s$.

F'_3) Для всех $x \in X^\ell$, $u \in U^s$ суперпозиция $f'_y(.,x(.),u(.)) \in Z_X^{m\times\ell}$.

A_1) Существует положительная мажоранта[4] $B : Z \to X$ ЛОО $A : Z^m \to X^\ell$, обладающая для всех $\delta > 0$ вольтерровой δ-малой по мере цепочкой множеств.

Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема 5. *Пусть заданы функции* $x_* \in X^+$, $u_* \in U^+$ *и множества* $N_X = \{x \in X^\ell : |x| \le x_*\}$, $N_U = \{u \in X^\ell : |u| \le u_*\}$. *Тогда найдется положительный ЛОО* $B_* : U \to X$, *определяемый ими и такой, что для всех управлений* $u_0, u_1 \in N_U$ *и отвечающих им решений* $x_0, x_1 \in N_X$ *уравнения* (1), *если такие существуют, справедлива оценка:*

$$|\Delta x| \le B_*[|\Delta_u f(x_0)|], \text{ где } \Delta x = x_1 - x_0,$$
$$\Delta_u f(x_0) = f(.,x_0(.),u_1(.)) - f(.,x_0(.),u_0(.)).$$

Замечание 6. *В случае монотонности оператора* A *для выполнения условия* A$_1$) *достаточно, чтобы ЛОО* A *обладал для всякого* $\delta > 0$ *вольтерровой* δ*-малой по мере цепочкой множеств. Это следует из того, что в качестве положительной мажоранты можно взять операто:* $B[z] = \sum_{i=1}^{\ell} A^{(i)}[z \cdot \vec{e}]$, *где* $\vec{e} = \{1, \ldots, 1\} \in R^m$. *При этом, как показано в* [8], *при выполнении условий* S$_1$) *и* S_3') *будет выполнено также и условие* A$_0$).

3. Пример

Вернемся к задаче (3), рассмотренной во введении. Как уже было показано, она может быть переформулирована в виде функционально-операторного уравнения (3). Будем считать далее, что $r < q$. Тогда в силу замечания 2 условия S$_1$) – S$_3$) выполняются. Условия F$_1$) – F$_3$) выполняются в силу исходных предположений относительно задачи (3). В качестве множества D возьмем конусный отрезок: $D = [\bar{u}; \hat{u}]$. Очевидно, что оператор A положительный, а значит, и монотонный. Поэтому если дополнительно потребовать монотонности функции $f(t, y, u)$ по (y, u), можно воспользоваться достаточными условиями выполнения предположений H$_1$) – H$_3$) из [8].

Покажем, что оператор A обладает для всякого $\delta > 0$ вольтерровой δ-малой по мере цепочкой множеств. В соответствии с замечанием 6 из этого будет следовать, что выполнены условия § 2, а стало быть, по теореме 5, и предположение H$_4$).

Для всякого $\tau \in [0, T]$, где $T = T_1 + T_2$, множества вида $H_\tau = \{t \in \Pi : \ t_1 + t_2 \le \tau\}$ являются вольтерровыми множествами оператора A. Действительно, для п.в. $t \in H_\tau$ значения оператора $A[z](t)$ зависят лишь от значений функции $z(\xi)$ при $\xi \in [0, t_1] \times [0, t_2] \subset H_\tau$. Таким образом, $P_{H_\tau} A P_{H_\tau} = P_{H_\tau} A$, то есть $H_\tau \in B(A)$ для всех $\tau \in [0, T]$.

Выберем произвольно $\tau', \tau'' \in [0, T]$, $\tau' < \tau''$, и, положив $h = H_{\tau''} \setminus H_{\tau'}$ и $\sigma = \tau'' - \tau'$, оценим меру $\mathrm{mes}(h) < \sigma^2$. Таким образом, выбирая число $\sigma > 0$ из условия $\sigma^2 < \delta$, получаем, что $T = \{H_{\tau_0}, \ldots, H_{\tau_k}\}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = T$, $\tau_i - \tau_{i-1} \le \sigma$, является вольтерровой δ-малой по мере цепочкой множеств оператора A при заданном (произвольно выбранном) $\delta > 0$.

В качестве функционала рассмотрим

$$J[u] = \int_\Pi F(t, x_u(t), u(t))dt,$$

где x_u – решение задачи (3), отвечающее управлению u; F удовлетворяет условиям F$_1$) – F$_3$) при замене Z и m на $\hat{Z} = L_1(\Pi)$, $\hat{m} = 1$.

Стало быть, можно пользоваться результатами, сформулированными в § 1. При этом, согласно формуле (6), градиент функционала принимает вид

$$J'_\Gamma(u_k)[h] = J'_h(u_k) = \int_\Pi G_k(t)h(t)dt,$$

где

$$G_k(.) = \psi_k(.) f'_v(., x_k(.), u_k(.)) +$$
$$+ F'_v(., x_k(.), u_k(.)) \in L_{r'}(\Pi), \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1,$$

x_k – решение НКЗ, отвечающее управлению u_k, $\psi_k(.) \in L_{q'}(\Pi)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, – единственное решение сопряженного уравнения (см. теорему 3; линейные непрерывные функционалы отождествляем с соответствующими функциями Рисса):

$$\psi(t) - A^*[(f'_y(., x_k, u_k))^* \psi](t) =$$
$$= A^*[(F'_y(., x_k, u_k))^*](t),$$

$A^* : L_{q'}(\Pi) \to L_{p'}(\Pi)$ оператор, сопряженный по отношению к оператору A, то есть ЛОО, определяемый формулой:

$$A^*[z](t) = \int_{t_1}^{T_1} d\xi_1 \int_{t_2}^{T_2} z(\xi_1, \xi_2) d\xi_2.$$

Тогда в соответствии с формулой (9) направление спуска $w_k(.)$ определяется из условия:

$$w_k(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), & \text{если} \quad G_k(t) > 0; \\ \hat{u}(t), & \text{если} \quad G_k(t) < 0; \\ \forall u \in [\bar{u}(t); \hat{u}(t)], & \text{если} \quad G_k(t) = 0. \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00495) и аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» Минобрнауки РФ (регистрационный номер 2.1.1/3927).

Примечания

1. Пусть $S = S(\Pi)$ – множество всех измеримых функций на множестве $\Pi \subset R^n$. Напомним, что банахово пространство $E \subset S$ измеримых функций называется *банаховым идеальным пространством*, если из того, что $y \in E$, $x \in S$, $|x(t)| \le |y(t)|$ для п.в. $t \in \Pi$, следует, что $x \in E$, $\|x\|_E \le \|y\|_E$.

2. Опять же в целях простоты изложения. В принципе, можно считать этот функционал всего лишь дифференцируемым по Фреше.

3. То есть $J_h'(u_0) = \lim\limits_{\lambda \to +0} \frac{1}{\lambda}\{J(u_0 + \lambda h) - J(u_0)\}$.

То есть ЛОО $B : Z^+ \to X^+$ такой, что $|A[z]| \le$ $\le B[|z|]$ для всех $z \in Z^m$.

Список литературы

1. Сумин В.И. // ДАН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059.
2. Сумин В.И. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.
3. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Н. Новгород: ННГУ, 1992. 110 с.
4. Сумин В.И. // Изв. вузов. Математика. 1995. № 9. С. 67–77.
5. Сумин В.И. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 2 (19). С. 138–151.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
7. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
8. Чернов А.В. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 3. С. 130–137.
9. Сумин В.И., Чернов А.В. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. Вып. 1 (26). С. 39–49.
10. Сумин В.И., Чернов А.В. Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений. ННГУ: Н. Новгород, 2000. Деп. в ВИНИТИ 25.04. 2000. № 1198-В00.
11. Сумин В.И., Чернов А.В. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.

ON CONDITIONAL GRADIENT METHOD CONVERGENCE IN DISTRIBUTED OPTIMIZATION PROBLEMS

A.V. Chernov

For an optimization problem of a nonlinear controlled function-operator equation in a Banach ideal space, a theorem is formulated on sufficient conditions for conditional gradient method convergence. The application of the theory presented is illustrated by the example of controlled Goursat – Darboux problem.

Keywords: nonlinear controlled function-operator equation, optimization problems, conditional gradient method.