УДК 539.3
ББК 38.58

И.Т. АРТЕМЬЕВ, Э.И. АРТЕМЬЕВ, Ю.И. ГРИГОРЬЕВ, А.М. ПИНЯЕВ

ОБ ОГИБАЮЩЕЙ СЕМЕЙСТВА ОКРУЖНОСТЕЙ НА ОПОРНОЙ ЛИНИИ

Ключевые слова: *диаграмма Мора, огибающая, опорная линия.*

В методе диаграмм Мора в некоторых случаях условия пластичности интерпретируются как огибающие к семейству кругов Мора для предельного напряжённого состояния, иногда же они интерпретируются «опорной» линией, соединяющей верхние точки окружностей. Рассмотрен вопрос о возможности одновременной интерпретации огибающими и «опорными» линиями. Показано, что огибающая существует только для окружностей, построенных на «опорной» прямой с угловым коэффициентом, меньшим единицы, и не может существовать, когда «опорная» прямая имеет угловой коэффициент больше единицы.

I.T. ARTEMYEV, E.I. ARTEMYEV, U.I. GRIGORYEV, A.M. PINYAEV

PLASTICITY OF FAMILY CIRCLES ON SUPPORTING LINE

Key words: *Moor's diagramme, plasticity, supporting line.*

In the method of Moor`s diagram in some cases plasticity conditions are interpreted like enveloping to the family of Moor`s circles for overall stress, but sometimes they are interpreted like " supporting" line connecting the upper points of the circle. The article tuches the question of the opportunity to interpret enveloping and supporting lines simultaneously. It is shown, that the enveloping exists only for circles, constructed on the supporting line with the angular coefficient less than one and can not exist, when "supporting»" has the angle coefficient more than one.

При моделировании предельного состояния пластических тел часто эффективным оказывается метод диаграмм Мора. Суть его заключается в том, что напряжения, возникающие в точке деформируемого тела, интерпретируются окружностью, центр которой лежит на оси абсцисс и имеет координату равную среднему напряжению. Координаты левой и правой крайних точек окружности равны минимальному и максимальному нормальным напряжениям, а радиус окружности равен максимальному касательному напряжению в рассматриваемой точке [1]. При предельном сопротивлении пластических материалов вводится условие пластичности для компонент напряжения. В некоторых случаях условия пластичности интерпретируются как огибающие к семейству кругов Мора для предельного напряженного состояния, иногда (если условие пластичности записано для среднего и максимального касательного напряжений) они интерпретируются «опорной» линией, соединяющей верхние точки (вершины) окружностей. Здесь рассмотрим вопрос о возможности одновременной интерпретации огибающими и «опорными» линиями.

Пусть имеется прямая с угловым коэффициентом a, проходящая через начало координат:

$$y = a\,x\,. \tag{1}$$

Рассмотрим семейство окружностей с центром на оси x и «вершинами», принадлежащими прямой (1). Решим задачу о том: имеет ли семейство окружностей огибающую линию. Линию, на которой расположены «вершины» семейства окружностей, будем называть «опорной».

Пусть c – координата центра окружности, $a = tg\,\alpha$ – угловой коэффициент «опорной» прямой. Тогда радиус окружности $R = ac$.

Уравнение окружности имеет вид

$$F(x,y) = (x-c)^2 + y^2 - a^2c^2 = 0. \quad (2)$$

Найдем производную по параметру c

$$F_c^{/}(x,y) = -2(x-c) - 2a^2c = 0. \quad (3)$$

Параметрические уравнения огибающей имеют вид

$$F(x,y) = 0, \quad F_c^{/}(x,y) = 0. \quad (4)$$

Согласно (2) и (3) перепишем (4) в виде

$$y^2 = a^2c^2 - (x-c)^2, \quad (5)$$

$$c = \frac{x}{1-a^2}. \quad (6)$$

Уравнение (5) с учетом (6) запишем в виде

$$y^2 = \frac{a^2}{1-a^2}x^2. \quad (7)$$

Уравнения огибающих рассматриваемых окружностей имеют вид

$$y = \pm\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}x. \quad (8)$$

На рис. 1 изображены окружности с вершинами на «опорной» прямой с угловым коэффициентом $k_1 = \dfrac{R}{c} = tg\,\alpha = a$. Угловой коэффициент огибающей $k_2 = \dfrac{R}{\sqrt{c^2 - R^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$.

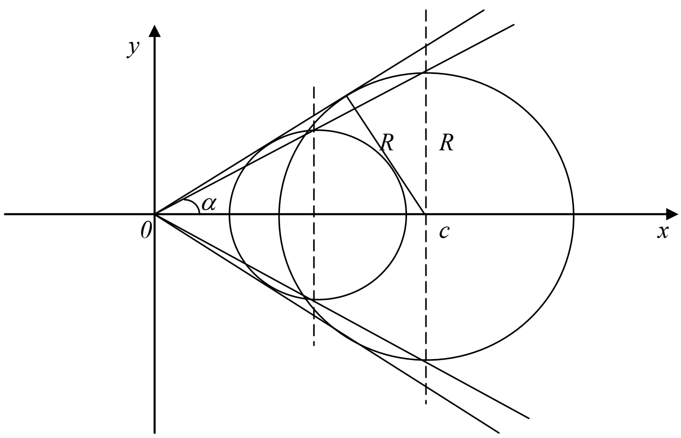

Рис. 1

Таким образом, огибающая возможна лишь при $|a| < 1$, т.е. огибающая существует только для окружностей, построенных на «опорной» прямой с угловым коэффициентом, меньшим единицы, когда «опорные» прямые составляют с осью x острый угол, меньший 45°.

Если «опорная» прямая составляет с осью x угол, равный 45° (рис.2), то огибающая для семейства окружностей, «опирающихся» на эту «опорную» линию, вырождается в прямую $x=0$.

На рис. 3 показан случай, когда «опорная» прямая составляет с осью x угол, больший 45°. Здесь окружности, «опирающиеся» на эту прямую, не могут иметь общей огибающей.

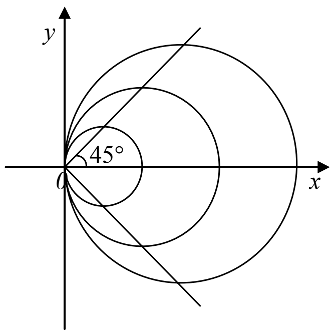

Рис. 2

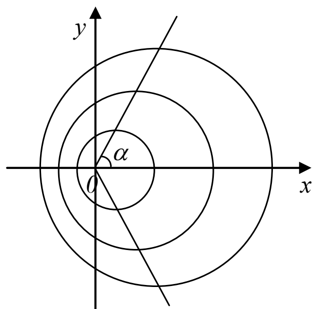

Рис. 3

Рассмотренные выше примеры позволяют объяснить следующий факт.

Пусть OAB – выпуклая линия $y = f(x)$. В точке A угловой коэффициент $y' = 1$. В точках дуги OA $y' > 1$, а в точках дуги AB $y' < 1$ (рис. 4). Тогда для окружностей, «опирающихся» на дугу AB, существует огибающая, а для окружностей, «опирающихся» на дугу OA, огибающей не существует.

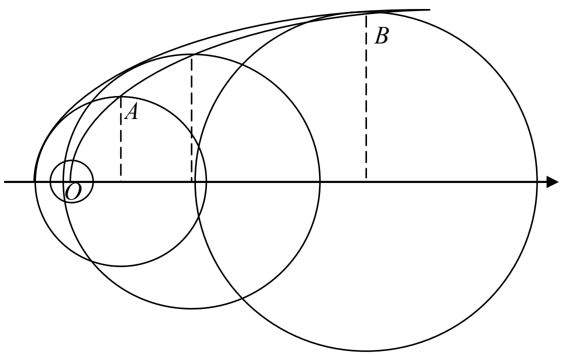

Рис. 4

Литература

1. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред / *Дж. Мейз*. М .: Наука, 1974. 318 с.

АРТЕМЬЕВ ИОСИФ ТИМОФЕЕВИЧ родился в 1949 г. Окончил Чувашский государственный университет. Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического и аппаратного обеспечения информационных систем Чувашского университета. Область научных интересов – механика деформируемого твёрдого

тела; математическое моделирование технологических процессов методами математической физики. Автор 115 научных работ.

АРТЕМЬЕВ ЭДУАРД ИОСИФОВИЧ родился в 1976 г. Окончил Чувашский государственный университет. Старший преподаватель кафедры математического и аппаратного обеспечения информационных систем Чувашского университета. Область научных интересов – математическое моделирование. Автор 15 научных работ.

ГРИГОРЬЕВ ЮРИЙ ИВАНОВИЧ родился в 1951 г. Окончил Чувашский государственный университет. Старший преподаватель кафедры естественнонаучных дисциплин Волжского филиала Московского автомобильно-дорожного института.

ПИНЯЕВ АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ родился в 1978 г. Окончил Чувашский государственный университет. Старший преподаватель кафедры высшей математики и информационных технологий филиала Чувашского университета в г. Алатыре. Область научных интересов – математическое моделирование технологических процессов методами математической физики. Автор 4 научных работ.