УДК 539.3

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МЕХАНИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

© 2003 г. В.А. Еремеев, Д.А. Сухов

The problem of convective instability of mechanical balance of a flat infinite horizontal layer of a viscoelastic micropolar fluid is considered.

Введение. Интерес к исследованию конвективных течений и их устойчивости для жидкостей с особыми свойствами вызывается широким распространением таких жидкостей в природе и технике. К числу жидкостей, свойства которых не укладываются в рамки уравнений Навье–Стокса (модели вязкой ньютоновской жидкости), относятся микрополярные жидкости (МЖ).

Модель вязкой микрополярной жидкости (ВМЖ) впервые была предложена в [1, 2] и впоследствии нашла значительные приложения [3] для описания течения суспензий, магнитных жидкостей, взвесей, жидкокристаллических сред. Кроме того, модель МЖ получила развитие применительно к задачам трибологии для описания течения в узких каналах [4]. В рамках модели МЖ каждая точка среды обладает степенями свободы абсолютно твердого тела, так что, например, поле угловых скоростей жидкости кинематически независимо от поля скоростей. Кроме того, наряду с обычными напряжениями в микрополярной среде присутствуют и моментные напряжения. В [5, 6] получено обобщение модели ВМЖ на случай жидкой среды с памятью общего вида (вязкоупругой микрополярной жидкости (ВУМЖ). Характерной особенностью ВУМЖ является ее способность выдерживать в состоянии равновесия касательные и моментные напряжения, подобно жидким кристаллам. Предложенная [5, 6] модель может быть использована для описания реологии жидких кристаллов более сложной структуры (например, двухосных нематиков).

В данной работе рассмотрена задача о конвективной неустойчивости механического равновесия плоского горизонтального подогреваемого снизу слоя ВУМЖ со свободными границами (задача Рэлея). Использованы уравнения состояния ВУМЖ дифференциального типа. Показано, что учет эффектов вязкоупругости приводит к повышению критического числа Рэлея по сравнению со случаями ньютоновской и ВМЖ

1. *Уравнения движения ВУМЖ. Плоская задача.* Рассмотрим модель ВУМЖ [6], согласно которой каждая частица среды обладает шестью степенями свободы абсолютно твердого тела, и ориентация которой определяется тройкой ортонормированных направляющих векторов $\mathbf{D}_k(t)$ $(k=1,2,3)$. В случае плоской задачи ориентация частиц определяется одним параметром – углом поворота $\alpha(X,Y,t)$ триэдра $\mathbf{D}_k$ вокруг некоторой оси. Для определенности будем считать, что ось совпадает с направлением $\mathbf{D}_3$. Согласно [6], в случае плоской задачи уравнения движения и условие несжимаемости для тяжелой ВУМЖ принимают вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\pi}{\partial X}+\frac{\partial S_{11}}{\partial X}+\frac{\partial S_{21}}{\partial Y}=\rho\frac{dV_1}{dt},\\
\frac{\partial\pi}{\partial Y}+\frac{\partial S_{12}}{\partial X}+\frac{\partial S_{22}}{\partial Y}-\rho g=\rho\frac{dV_2}{dt},\\
\frac{\partial M_{13}}{\partial X}+\frac{\partial M_{23}}{\partial Y}+S_{12}-S_{21}=\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2},\\
\frac{\partial V_1}{\partial X}+\frac{\partial V_2}{\partial Y}=0.
\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22} – компоненты девиаторной части тензора напряжений $\mathbf{S}$; M_{13}, M_{23} – компоненты тензора моментных напряжений $\mathbf{M}$; π – давление; ρ – плотность; V_1, V_2 – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости $\mathbf{V}$; γ – скалярная мера вращательной инерции частиц; g – ускорение свободного падения; d/dt – материальная производная по времени.

Для $\mathbf{S}$ и $\mathbf{M}$ принимаются следующие зависимости

$$\begin{gathered}
\mathbf{S}=\mu_1\boldsymbol{\varepsilon}+\mu_2\boldsymbol{\varepsilon}^T-\left(\nu_1\mathbf{B}+\nu_2\mathbf{B}^T\right)\cdot\mathbf{B}^T,\\
\mathbf{M}=\eta_1\boldsymbol{\zeta}+\eta_2\boldsymbol{\zeta}^T+\nu_1\mathbf{B}+\nu_2\mathbf{B}^T.
\end{gathered}\tag{2}$$

Здесь μ_1, μ_2, η_1, η_2 – коэффициенты динамической вязкости; ν_1, ν_2 – упругие постоянные; $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\zeta}$ – тензоры скоростей деформации и изгибной деформации, которые определяются формулами

$$\boldsymbol{\varepsilon}=Grad\,\mathbf{V}+\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\zeta}=Grad\ \boldsymbol{\omega};\tag{3}$$

$\mathbf{B}$ – тензор кривизны, который в случае плоской задачи определяется формулой

$$\mathbf{B}=\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_3\frac{\partial\alpha}{\partial X}+\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3\frac{\partial\alpha}{\partial Y}.\tag{4}$$

Поля линейной и угловой скоростей имеют вид
$\mathbf{V} = V_1(X,Y,t)\mathbf{e}_1 + V_2(X,Y,t)\mathbf{e}_2$, $\omega = \omega(X,Y,t)\mathbf{e}_3$. (5)

Величина угловой скорости ω связана с углом поворота формулой

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}. \qquad (6)$$

Здесь и далее X,Y,Z – декартовы координаты, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – ортонормированный декартовый базис.

Учитывая формулы (2) – (6), уравнения движения и уравнение несжимаемости ВУМЖ (1) можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} + \mu_1 \Delta V_1 + (\mu_1 - \mu_2)\frac{\partial \omega}{\partial Y} - \nu_1\left(\frac{\partial \alpha}{\partial X}\left(2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial Y}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial X \partial Y}\right) = \rho \frac{dV_1}{dt},$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Y} + \mu_1 \Delta V_2 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{\partial \omega}{\partial X} - \nu_1\left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y}\left(2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial X}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial X \partial Y}\right) - \rho g = \rho \frac{dV_2}{dt}, \qquad (7)$$

$$\eta_1 \Delta \omega + \nu_1 \Delta \alpha + (\mu_1 - \mu_2)\left(\frac{\partial V_2}{\partial X} - \frac{\partial V_1}{\partial Y} - 2\omega\right) = \gamma \frac{d^2 \alpha}{dt^2},$$

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial X} + \frac{\partial V_2}{\partial Y} = 0.$$

Здесь и далее $\Delta = \partial^2/\partial X^2 + \partial^2/\partial Y^2$ – плоский лапласиан.

2. *Конвективная неустойчивость плоского слоя ВУМЖ со свободными границами.* Рассмотрим задачу о конвективной неустойчивости механического равновесия плоского бесконечного горизонтального слоя ВУМЖ толщиной h $(-\infty < X < \infty,\ 0 \le Y \le h)$. Температура и угол ориентации микроструктуры на границах слоя фиксированы. Верхняя граница поддерживается при температуре θ_B и угле ориентации микроструктуры α_B, а нижняя – при θ_H и α_H соответственно.

Потерю устойчивости (переход к конвективному движению) для слоя ВУМЖ будем рассматривать аналогично случаю вязкой жидкости [7] в приближении Обербека–Буссинеска. Для этого выведем уравнения, описывающие конвекцию вязкоупругой микрополярной жидкости в случае плоской задачи. По аналогии с [7] представим поле температуры в виде

$$T = T_0 + \theta, \qquad (8)$$

где T_0 есть некоторое среднее значение, от которого отсчитывается неравномерность температуры θ. Будем рассматривать жидкость как механически несжимаемую, т.е. изменением плотности от изменения давления будем пренебрегать, но изменение плотности в результате нагревания будет учитываться, поэтому закон сжимаемости примем в следующем виде

$$\rho = \rho_0(1 - \beta\theta), \qquad (9)$$

где ρ_0 – значение плотности при температуре T_0; β – температурный коэффициент расширения жидкости $(\beta > 0)$. Согласно гидростатическому закону, давление представим в следующем виде

$$\pi = -\rho_0 g Y + P + const, \qquad (10)$$

где P – новая неизвестная функция.

Добавим к системе уравнений (7) уравнение теплопроводности, в котором поле температур представлено формулой (8). В системе уравнений (7) используем представление давления (10), а в слагаемых с массовыми силами положим зависимость плотности от температуры в виде (9), в остальных же слагаемых зависимостью плотности от температуры будем пренебрегать и считать плотность постоянной и равной ρ_0. Опуская индекс у ρ_0, получим полную систему уравнений, описывающих свободную конвекцию в плоском слое ВУМЖ

$$-\frac{\partial P}{\partial X} + \mu_1 \Delta V_1 + (\mu_1 - \mu_2)\frac{\partial \omega}{\partial Y} - \nu_1\left(\frac{\partial \alpha}{\partial X}\left(2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial Y}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial X \partial Y}\right) = \rho \frac{dV_1}{dt},$$

$$-\frac{\partial P}{\partial Y} + \mu_1 \Delta V_2 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{\partial \omega}{\partial X} - \nu_1\left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y}\left(2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2}\right) + \frac{\partial \alpha}{\partial X}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial X \partial Y}\right) - \rho g \beta \theta = \rho \frac{dV_2}{dt}, \qquad (11)$$

$$\eta_1 \Delta \omega + \nu_1 \Delta \alpha + (\mu_1 - \mu_2)\left(\frac{\partial V_2}{\partial X} - \frac{\partial V_1}{\partial Y} - 2\omega\right) = \gamma \frac{d^2 \alpha}{dt^2},$$

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}, \frac{\partial V_1}{\partial X} + \frac{\partial V_2}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \theta}{\partial X} + V_2 \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \chi \Delta \theta.$$

Здесь χ – коэффициент температуропроводности.

Используя дифференциальные уравнения (11) и рассматривая малые возмущения механического равновесия, зависящие от времени как $e^{-\lambda t}$, где λ декремент возмущений, линеаризованные уравнения движения, описывающие поведение малых возмущений равновесия в плоском слое ВУМЖ, можно представить соотношениями

$$-\frac{\partial p}{\partial X} + \Delta v_1 + S_1 \frac{\partial \omega}{\partial Y} - S_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X \partial Y} = -\lambda v_1, \qquad (12)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial Y} + \Delta v_2 - S_1 \frac{\partial \omega}{\partial X} - S_2\left(2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2}\right) + Ra\,\tau = -\lambda v_2,$$

$$\Delta \omega + S_3 \Delta \alpha + S_4\left(\frac{\partial v_2}{\partial X} - \frac{\partial v_1}{\partial Y} - 2\omega\right) = -\lambda S_6 \omega,$$

$$\omega - S_5 v_2 = -\lambda \alpha, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \quad \Delta \tau + v_2 = -\lambda \Pr \tau.$$

Здесь p, v_1, v_2, α, ω, τ – соответственно малые возмущения давления, горизонтальной и вертикальной компонент вектора скорости, угла ориентации микроструктуры, величины угловой скорости микроструктуры и температуры. Данная система уравнений записана в безразмерном виде. За единицы измерения длины, частоты, скорости, давления и температуры выбраны соответственно h, $\dfrac{\mu_1}{h^2\rho}$, $\dfrac{\mu_1}{h\rho}$, $\dfrac{\mu_1^2}{h^2\rho}$ и $\dfrac{A\mu_1 h}{\chi\rho}$. Входящие в систему уравнений (12) безразмерные параметры определяются формулами

$$Ra=\rho g\beta\frac{Ah^4}{\mu_1\chi},\ \Pr=\frac{\mu_1}{\rho\chi},\ S_1=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1},\ S_2=\nu_1\rho\frac{Bh}{\mu_1^2},$$

$$S_3=\nu_1\rho\frac{h^2}{\eta_1\mu_1},\ S_4=\frac{(\mu_1-\mu_2)h^2}{\eta_1},\ S_5=Bh,\ S_6=\frac{\mu_1\gamma}{\rho\eta_1}.$$

Здесь Ra – число Рэлея, $\Pr$ – число Прандтля, постоянные A и B даются формулами $A=(\theta_H-\theta_B)/h$, $B=(\alpha_B-\alpha_H)/h$.

При этом в случае подогрева жидкости снизу $A>0$. Постоянную B в дальнейшем будем считать положительной величиной $(B>0)$.

По аналогии с [8] рассмотрим частные решения системы уравнений (12), периодические вдоль направления оси X (так называемые нормальные возмущения)

$$\begin{gathered}\upsilon_1(X,Y)=\mathrm{v}_1(Y)e^{-ikx},\ p(X,Y)=\mathrm{p}(Y)e^{-ikx},\\ \omega(X,Y)=\omega(Y)e^{-ikx},\ \upsilon_2(X,Y)=\mathrm{v}_2(Y)e^{-ikx},\\ \tau(X,Y)=\tau(Y)e^{-ikx},\ \alpha(X,Y)=\alpha(Y)e^{-ikx}.\end{gathered}\tag{13}$$

Здесь k – вещественное волновое число, характеризующее периодичность возмущений вдоль направления оси X, а $\mathrm{v}_1(Y)$, $\mathrm{v}_2(Y)$, $\mathrm{p}(Y)$, $\tau(Y)$, $\omega(Y)$, $\alpha(Y)$ – амплитуды возмущений. Подставляя (13) в (12), получим систему однородных линейных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений. Исключая из этой системы уравнений последовательно амплитуды возмущений давления $\mathrm{p}(Y)$, горизонтальной компоненты скорости $\mathrm{v}_1(Y)$, угла ориентации микроструктуры $\alpha(Y)$ и угловой скорости микроструктуры $\omega(Y)$, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами для амплитуд возмущений вертикальной компоненты скорости $\mathrm{v}_2(Y)$ и температуры $\tau(Y)$

$$\begin{gathered}(\lambda-F_1)\left(\mathrm{v}_2^{(VI)}-k^2\mathrm{v}_2^{(IV)}\right)+\\ \left(\lambda^2(F_2+1)+\lambda F_3+F_4\right)\left(\mathrm{v}_2^{(IV)}-k^2\mathrm{v}_2^{(II)}\right)+\\ +\left(\lambda^3F_2-\lambda^2F_5+\lambda F_6-F_7\right)\left(\mathrm{v}_2^{(II)}k^2-\mathrm{v}_2\right)+\\ +k^2\left((F_1-\lambda)\left(\tau^{(II)}-k^2\tau\right)+\left(\lambda^2F_2-\lambda F_8\right)\tau\right)=0;\\ \tau^{(II)}-k^2\tau+\mathrm{v}_2=-\lambda\Pr\tau.\end{gathered}\tag{14}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{gathered}F_1=S_3,\ F_2=S_6,\ F_3=2k^2-S_3-2S_4+S_1S_4,\\ F_4=k^2(2S_3+S_2S_5),\ F_5=k^2+k^2S_6+2S_4,\\ F_6=k^2\left(k^2+S_3+2S_4-S_1S_4+S_2S_4S_5\right),\\ F_7=k^2\left(k^2S_3+k^2S_2S_5+2S_2S_4S_5\right),\ F_8=2S_4.\end{gathered}$$

Граничные условия для системы уравнений (14) примут вид

$$\mathrm{v}_2=0,\ \mathrm{v}_2^{(II)}=0,\ \mathrm{v}_2^{(IV)}=0,\ \tau=0$$

$$\text{при } Y=0 \text{ и } Y=h. \tag{15}$$

Система уравнений (14) имеет нетривиальные решения при определенных значениях декрементов возмущений λ, которые являются собственными числами этой задачи. Как и в случае обычной ньютоновской жидкости [8], для граничных условий (15) решение задачи оказывается элементарным, и собственные функции задачи имеют вид простых гармоник

$$\mathrm{v}_2=a\sin(\pi nY),\ \tau=b\sin(\pi nY)\ \ (n=1,2,3,\ldots),\tag{16}$$

где n определяет характерный масштаб возмущений по вертикали, a и b некоторые коэффициенты.

Рассматривая монотонно изменяющиеся со временем возмущения в единичном слое ВУМЖ, подогреваемом снизу ($Ra>0$), и пользуясь тем, что собственные функции задачи имеют вид (16), получим следующие выражения для критических чисел Рэлея

$$\begin{gathered}Ra_1^*=\Big(S_3\left(\pi^6n^6+k^2\pi^4n^4\right)+\\ +k^2(2S_3+S_2S_5)\left(\pi^4n^4+k^2\pi^2n^2\right)+\\ +k^2\left(k^2S_3+k^2S_2S_5+2S_2S_4S_5\right)\left(\pi^2n^2+k^2\right)\Big)/k^2S_3;\end{gathered}\tag{17}$$

$$\begin{gathered}Ra_2^*=\Big(\pi^6n^6+k^2\pi^4n^4+\\ +\left(2k^2+2S_4-S_1S_4\right)\left(\pi^4n^4+k^2\pi^2n^2\right)+\\ +k^2\left(k^2+2S_4-S_1S_4\right)\left(\pi^2n^2+k^2\right)\Big)\left(\pi^2n^2+k^2\right)/\\ /\left(k^2\left(\pi^2n^2+k^2+2S_4\right)\right).\end{gathered}$$

Формулы (17) определяют нейтральные кривые в плоскости (Ra,k), разграничивающие области устойчивости и неустойчивости соответственно для случая ВУМЖ и ВМЖ. Для любого n нейтральная кривая $Ra(k)$ имеет минимум и при всех k наименьшее значение имеет число Рэлея для $n=1$. Возмущениям, имеющим меньший масштаб по вертикали $(n>1)$, соответствуют более высокие значения чисел Рэлея.

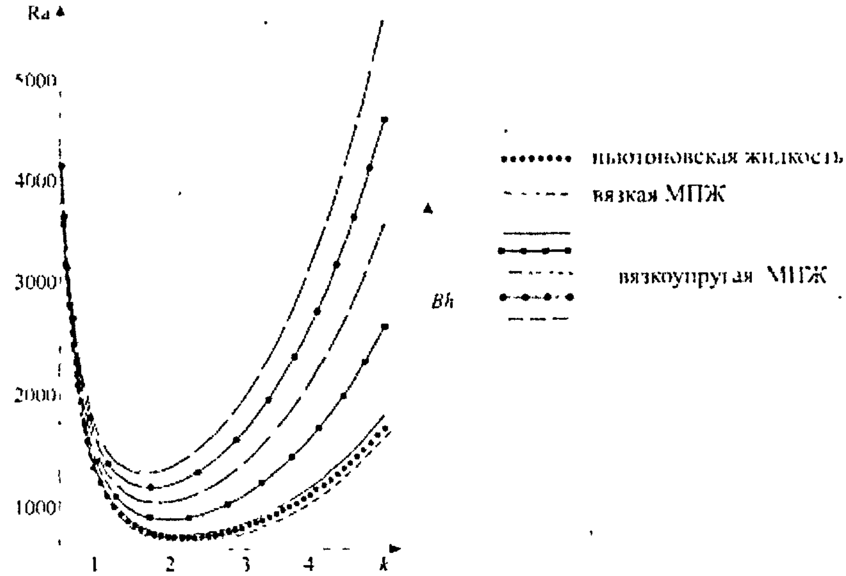
3. *Заключение и результаты.* Полученные значения критических чисел Рэлея и соответствующих ему волновых чисел приведены в табл. 1 для ВУМЖ и в табл. 2 – для ВМЖ.

Графики зависимости числа Рэлея Ra от волнового числа k приведены на рисунке для характерных значений параметров жидкости. Стрелкой показано направление возрастания параметра закрученности микроструктуры $S_5\equiv Bh$, который изменялся от 0,1 до π.

Таблица 1

Минимальные критические числа Рэлея и волновые числа ВУМЖ при $S_2 = 10^{-6}$ и $S_3 = 10^{-6}$ $(n=1, h=1)$

S_4	S_5	Ra_1^*	k^*
-1	0,1	676,26	2,19
-1	$\pi/4$	796,23	2,02
-1	$\pi/2$	921,47	1,89
-1	$3\pi/4$	1038,53	1,80
-1	π	1149,92	1,72
0	0,1	679,19	2,18
0	$\pi/4$	818,09	2,01
0	$\pi/2$	963,57	1,87
0	$3\pi/4$	1100,02	1,78
0	π	1230,29	1,70
1/2	0,1	680,66	2,19
1/2	$\pi/4$	828,99	2,00
1/2	$\pi/2$	984,54	1,86
1/2	$3\pi/4$	1130,64	1,77
1/2	π	1270,30	1,69



Нейтральные кривые

Этот параметр определяет степень искривления микроструктуры. Значение $S_5 = 0$ соответствует отсутствию поворота частиц жидкости.

Таблица 2

Минимальные критические числа Рэлея ВМЖ при $S_4 = S_1$ $(n=1, h=1)$

S_1	Ra_2^*	k^*
-1	605,68	2,17
0	657,51	2,22
1/2	606,05	2,21

Проведенный анализ зависимости Ra показал, что учет вязкоупругих эффектов приводит к повышению числа Рэлея по сравнению со случаем чисто ВМЖ и вязкой ньютоновской жидкости. При этом чем сильнее начальное искривление микроструктуры жидкости, тем больший перепад температур требуется для потери устойчивости. Значение волнового числа, соответствующее Ra уменьшается. Заметим, что случай ВМЖ оказывается более неустойчивым (число Рэлея меньше) по сравнению со случаем обычной жидкости.

Таким образом, показано, что учет эффектов ориентационной упругости подобных присутствующим в гидромеханике жидких кристаллов оказывает стабилизирующее действие при переходе к конвективному течению. Полученные результаты согласуются с результатами работы [9].

Авторы благодарят Л.М. Зубова за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (01-01-00529) и КЦФЕ при СПбГУ (Е02-4.0-91).

Литература

1. *Аэро Э.Л. и др.* // ПММ. 1965. Т. 29. № 2. С. 297–308.
2. *Eringen A.C.* // J. Math. and Mech. 1966. Vol. 16. № 1. P. 1–18.
3. *Мигун Н.П., Прохоренко П.П.* Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурной жидкости. Минск, 1984.
4. *Бессонов Н.М., Аэро Э.Л.* // Трение и износ. 1993. Т. 14. № 1. С. 107–111.
5. *Зубов Л.М., Еремеев В.А.* // Докл. РАН. 1996 Т. 351. № 4. С. 472–475.
6. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* // ПММ. 1999. Т. 64. № 5. С. 801–815.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М., 1988.
8. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., 1972.
9. *Та Нгок Кау.* Некоторые математические аспекты модели микрополярной жидкости: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1990. 22 с.

Ростовский государственный университет

17 апреля 2003 г.