

УДК 533.9.082.76

СФЕРИЧЕСКИЙ ЗОНД В НЕПОДВИЖНОЙ ПЛАЗМЕ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ. СЛУЧАЙ ТОЛСТОГО СЛОЯ ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА

А. В. КАШЕВАРОВ

Рассчитаны вольт-амперные характеристики сферического зонда, помещенного в неподвижную слабоионизированную плазму, при наличии магнитного поля. Рассмотрение ограничено случаем предельно толстого слоя объемного заряда. Показано, что магнитное поле препятствует попаданию заряженных частиц на зонд, так что зондовый ток существенно уменьшается. Представлены картины линий равных концентраций заряженных частиц вокруг зонда и распределения плотности тока по поверхности сферы.

Ключевые слова: электрический зонд, замагниченная плазма.

ВВЕДЕНИЕ

Разнообразные условия использования электрического зонда в экспериментальной практике требуют теоретического рассмотрения многочисленных аспектов его работы, например [1, 2]. В последнее время возобновился интерес к теории зонда в присутствии внешнего магнитного поля. Например, в [3] исследовано его влияние на характеристики цилиндрического зонда в потоке плазмы повышенного давления, когда зонд работает в режиме сплошной среды. Наличие магнитного поля обуславливает разные скорости движения заряженных частиц вдоль и поперек силовых линий. Задача становится анизотропной и даже в наиболее простом случае сферического зонда в неподвижной плазме требуется численный анализ двумерной нелинейной системы дифференциальных уравнений, описывающих работу зонда.

Этот случай рассматривался в [4], где были сформулированы уравнения диффузионного движения заряженных частиц в самосогласованном электрическом поле с учетом анизотропии их коэффициентов диффузии. Численные решения управляющей нелинейной системы, состоящей из трех уравнений в частных производных, были получены при условии тонкого слоя объемного заряда, когда отношение $\alpha = \lambda_D/R \ll 1$ (λ_D — дебаевский радиус экранирования, R — радиус зонда).

Значительно проще рассчитать зондовые характеристики в предельном случае бесконечно толстого слоя объемного заряда $\alpha \rightarrow \infty$. Известно, например [5], что при этом система зондовых уравнений имеет аналитическое решение, если магнитное поле отсутствует, а химические реакции заморожены. При наличии магнитного поля получить аналитическое решение не удастся, но нелинейная система сведется всего лишь к одному линейному уравнению в частных производных. Результаты его численного решения могут быть полезными при тестировании программ расчета зондовых характеристик при $\alpha \sim 1$ и подтверждения достоверности получаемых численных результатов в этом случае.



КАШЕВАРОВ
Алексей Васильевич
кандидат физико-математических наук,
доцент МАИ
начальник сектора ЦАГИ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сферический зонд в неподвижной слабоионизованной изотермической плазме, содержащей положительные однозарядные ионы одного сорта и электроны, причем химические реакции между ними заморожены. Допустим, что имеется внешнее магнитное поле с индукцией B , направленное вдоль оси z декартовой системы координат. Используем математическую модель [4], включающую уравнения неразрывности диффузионно-дрейфового движения заряженных частиц и уравнение Пуассона для электрического потенциала. Эти уравнения можно записать в безразмерном виде:

$$\nabla \cdot \Gamma_{\pm} = 0, \quad (1)$$

$$\alpha^2 \Delta \psi = n_- - n_+. \quad (2)$$

Здесь n_- , n_+ — числовые концентрации отрицательно и положительно заряженных частиц, отнесенные к их значению на бесконечности N_{∞} ; ψ — безразмерный электрический потенциал, связанный с размерным потенциалом ϕ соотношением $\psi = e\phi/kT$, где e — элементарный заряд, k — постоянная Больцмана, T — температура плазмы. Пространственные координаты отнесены к радиусу зонда R .

Векторный поток Γ_{\pm} положительных и отрицательных частиц дается выражением

$$\Gamma_{\pm} = -\nabla \cdot (\mathbf{D}_{\pm} n_{\pm}) \mp n_{\pm} \nabla \psi, \quad (3)$$

где первый член описывает диффузионный перенос, а второй — перенос за счет подвижности. При записи выражения (3) использовано известное соотношение Эйнштейна между коэффициентом диффузии и подвижностью.

Отличие (1) — (3) от обычных зондовых уравнений [6] состоит лишь в том, что в присутствии магнитного поля коэффициенты диффузии \mathbf{D}_{\pm} становятся тензорными величинами. Согласно [4], тензор \mathbf{D}_{\pm} имеет вид:

$$\mathbf{D}_{\pm} = \begin{vmatrix} 1/(1+\Omega_{\pm}^2) & \Omega_{\pm}/(1+\Omega_{\pm}^2) & 0 \\ -\Omega_{\pm}/(1+\Omega_{\pm}^2) & 1/(1+\Omega_{\pm}^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Здесь $\Omega_{\pm} = \omega_{c\pm}/v_{\pm}$ — отношение циклотронной частоты $\omega_{c\pm} = eB/m_{\pm}c$ (m_{\pm} — масса соответствующей заряженной частицы, c — скорость света) к частоте столкновений v_{\pm} заряженных частиц с нейтральными. Компоненты тензора (4) отнесены к соответствующим значениям коэффициентов диффузии $D_{0\pm} = kT/mv_{\pm}$ при отсутствии магнитного поля ($\Omega_{\pm} = 0$). Выражение (4) справедливо при постоянных v_{\pm} , Ω_{\pm} для максвелловского взаимодействия (с силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния) заряженных частиц с молекулами, имеющими функцию распределения Максвелла.

При $\alpha \rightarrow \infty$ уравнение (2) вырождается в уравнение Лапласа

$$\Delta \psi = 0, \quad (5)$$

которое в сферических координатах r , θ , ϕ имеет решение

$$\psi(r) = \chi/r, \quad (6)$$

отвечающее граничным условиям $\psi(1) = \chi$ (задано), $\psi(\infty) = 0$. Пространственные распределения концентраций положительно и отрицательно заряженных частиц становятся независимыми друг от друга.

С учетом (3) — (5) уравнение (1) в декартовых координатах принимает вид

$$n_{\pm xx} + n_{\pm yy} + (1 + \Omega_{\pm}^2)n_{\pm zz} \pm [n_{\pm x}\psi_x + n_{\pm y}\psi_y + (1 + \Omega_{\pm}^2)n_{\pm z}\psi_z] + \Omega_{\pm}^2(n_{\pm x}\psi_y - n_{\pm y}\psi_x) = 0.$$

МЕТОД РЕШЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Переходя к сферическим координатам, учитывая симметрию задачи и решение (6), получим после преобразования $\xi = 1/r$, $\eta = \cos\theta$ для концентрации положительных частиц (индекс «+» не пишем):

$$A \frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2} - B \frac{\partial n}{\partial \xi} + C \frac{\partial^2 n}{\partial \eta^2} - D \frac{\partial n}{\partial \eta} + E \frac{\partial^2 n}{\partial \xi \partial \eta} - Fn = 0, \quad (7)$$

где

$$A = \xi^2(1 + \Omega^2\eta^2), \quad B = \chi\xi^2 + \Omega^2\xi[1 - \eta^2(3 - \chi\xi)], \quad C = (1 - \eta^2)(1 + \Omega^2), \\ D = \eta[2 + \Omega^2(1 - \eta^2)(3 - \chi\xi)], \quad E = 2\Omega^2\xi\eta(1 - \eta^2), \quad F = \Omega^2\chi\xi(3\eta^2 - 1).$$

Уравнение (7) описывает и распределение концентрации отрицательных частиц, но в соответствующих коэффициентах χ заменяется на $-\chi$.

Уравнение (7) решалось численно. Расчетная область представляла собой внутренность квадрата $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$. Граничными условиями являлись

$$n(0, \eta) = 1, \quad n(1, \eta) = 0.$$

Последнее означает полное поглощение заряженных частиц поверхностью, как обычно принимается в теории зонда [6]. Кроме того, из симметрии следует условие:

$$\partial n(\xi, \eta) / \partial \eta|_{\eta=0} = 0.$$

После аппроксимации уравнения (7) конечными разностями на квадратной сетке полученная система алгебраических уравнений решалась методом простой итерации. В качестве начального приближения использовалось аналитическое решение [5] для случая $\Omega = 0$:

$$n = \frac{\exp(\chi) - \exp(\chi\xi)}{\exp(\chi) - 1},$$

Итерационная процедура продолжалась до тех пор, пока во всем расчетном поле максимум разности значений концентрации, полученных в двух последовательных итерациях, не становился по модулю меньше, чем 10^{-8} . Затем рассчитывалась зависимость безразмерной плотности зондового тока $j(\eta)$, согласно формуле, полученной на основе (3):

$$j(\eta) = - \frac{1 + \Omega^2\eta^2}{1 + \Omega^2} \frac{\partial n}{\partial \eta} \Big|_{\xi=1}.$$

Безразмерный зондовый ток I определялся численно как среднее значение плотности тока по поверхности сферы

$$I = \int_0^1 j(\eta) d\eta.$$

Размерный ток J связан с безразмерным соотношением:

$$J = 4\pi e N_{\infty} D_0 R L.$$

Оценка погрешности вычислений осуществлялась сравнением значений I , рассчитанных на двух сетках: с шагом h и $h/2$. Оказалось, что для $h=0.01$ результат расчета I изменяется лишь в третьем десятичном знаке.

Распределения концентрации заряженных частиц вокруг зонда в цилиндрических координатах r, z представлены на рис. 1, 2. Картины симметричны относительно плоскости $z=0$. Магнитное поле существенно изменяет распределение концентрации, которая уменьшается вблизи зонда по сравнению со случаем, когда магнитное поле отсутствует. Особенно сильное истощение плотности заряженных частиц, распространяющееся на большое расстояние, наблюдается в направлениях по и против действия поля B вблизи оси z . Падение концентрации в приосевой зоне частично компенсируется увеличением плотности частиц в поперечном направлении вблизи углов $\theta=90^\circ$, где на некотором расстоянии от зонда концентрация превышает свое значение на бесконечности (см. рис. 2). Незначительный заброс концентрации в этой области, не показанный на рис. 1, имеет место и при потенциале зонда $\chi=1$ на расстояниях $r > 10$. Таким образом, имеется немонотонность изменения концентрации при удалении от зонда по угловым направлениям $\theta \approx 90^\circ$.

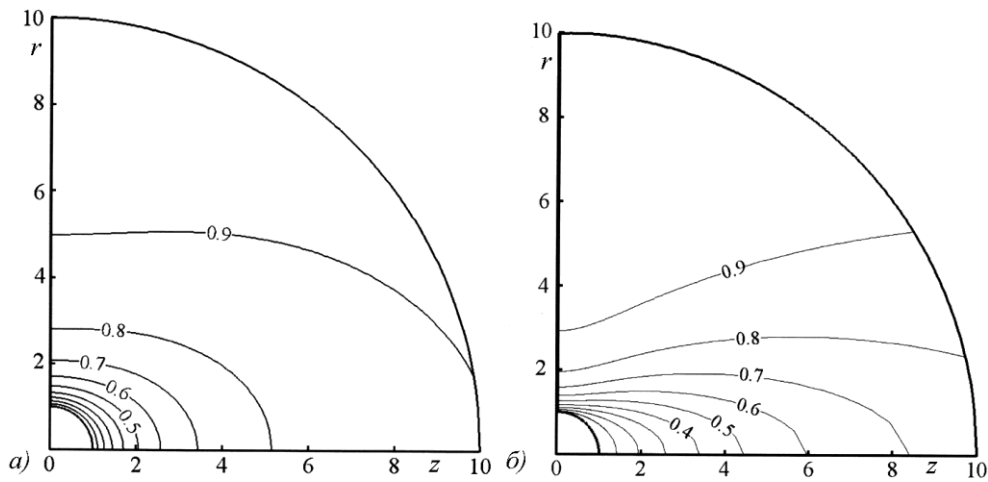


Рис. 1. Линии равных концентраций электронов вокруг зонда при $\chi = 1$ (или положительных ионов при $\chi = -1$):

$a - \Omega^2 = 1$; $b - \Omega^2 = 10$ (шаг изолиний 0.05)

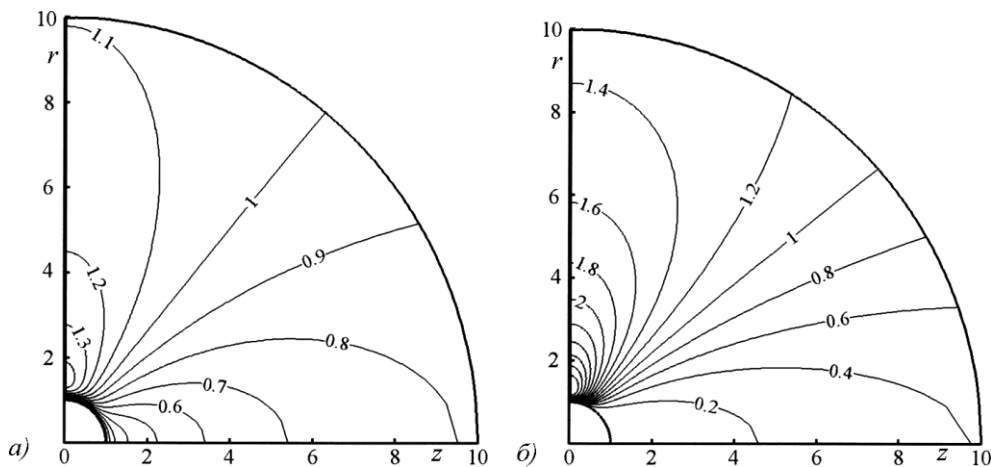


Рис. 2. То же, что на рис. 1, при $\chi = 10$

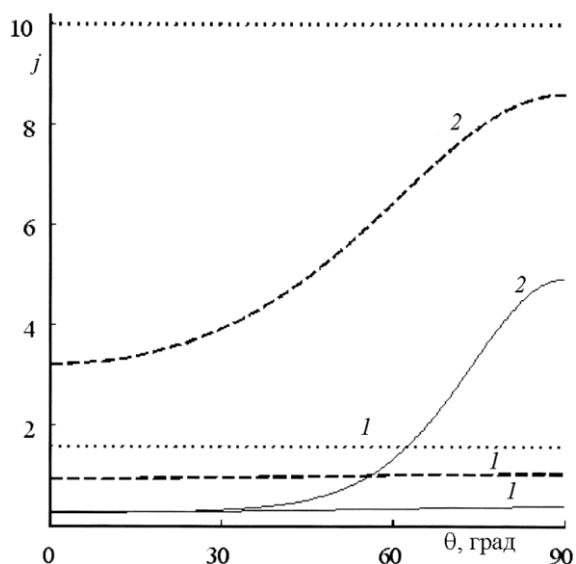


Рис. 3. Распределения плотности тока частиц одного знака по поверхности зонда при двух значениях потенциала χ и различных Ω^2 :

1 — $|\chi| = 1$; 2 — 10; — $\Omega^2 = 0$, ---- — 1, — — 10

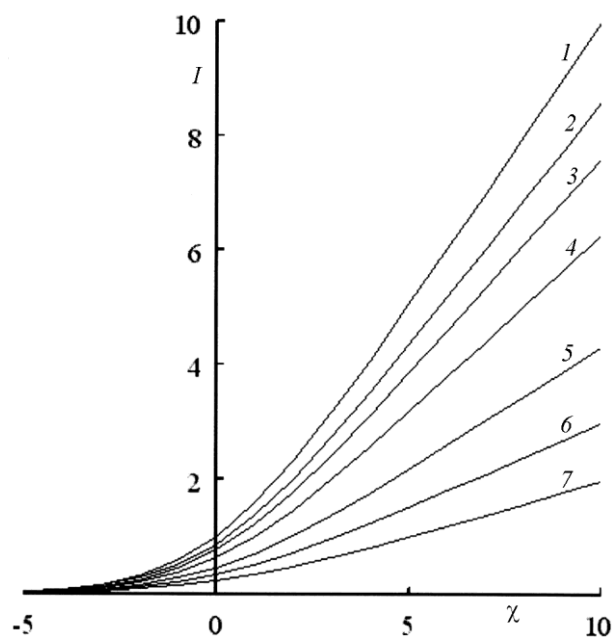


Рис. 4. Вольт-амперные характеристики (электронный ток) при различных значениях Ω^2 :

1 — $\Omega^2 = 0$; 2 — 0.25; 3 — 0.5; 4 — 1; 5 — 2.5; 6 — 5; 7 — 10 (ионный ток получается зеркальным отображением относительно вертикальной оси)

Распределения плотности зондового тока по поверхности сферы показаны на рис. 3. Максимальная плотность тока достигается при $\theta = 90^\circ$, но остается меньше, чем в отсутствии магнитного поля. Вольт-амперные характеристики зонда при различных значениях магнитного параметра Ω^2 , демонстрирующие уменьшение зондового тока с увеличением Ω^2 , приведены на рис. 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненный при $\alpha \rightarrow \infty$ численный анализ подтвердил вывод [4] об уменьшении тока на сферический зонд под действием внешнего магнитного поля. Сравнение полученных результатов с [4] свидетельствуют о более сильном влиянии магнитного поля при $\alpha \rightarrow \infty$, чем при $\alpha \sim 0.01 - 0.1$.

К сожалению, сделанное в статье предположение, облегчающее теоретическое рассмотрение, не выполняется в реальном зондовом эксперименте. Например, при радиусе зонда $R = 1$ мм и температуре электронов $T_e = 1$ эВ необходима слишком малая их концентрация $n_e \leq 5.5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$, чтобы иметь $\lambda_D/R \geq 10$. Однако полученные результаты могут быть полезными для контроля правильности расчетов при возможном проведении дальнейших численных исследований для малых значений α .

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 гг. (Гос. контракт № 14.740.11.1072).

ЛИТЕРАТУРА

1. К а ш е в а р о в А. В. Исследование разрешимости задачи о цилиндрическом зонде в неподвижной столкновительной плазме с химическими реакциями // Ученые записки ЦАГИ. 2003. Т. XXXIV, № 3—4, с. 59—64.
2. К а ш е в а р о в А. В. К теории электрического зонда в случае эмиссии частиц с поверхности // Ученые записки ЦАГИ. 2010. Т. XLI, № 6, с. 37—42.
3. К о т е л ь н и к о в В. А., К о т е л ь н и к о в М. В. Цилиндрический электрод в потоке ионизованного столкновительного газа в магнитном поле // ДАН. 2007. Т. 417, № 6, с. 769—773.

4. Niyogi K. K., Cohen I. M. Continuum electrostatic probe theory with magnetic field // Phys. Fluids. 1973. V. 16, N 1, p. 69—74.
 5. Chang J. S., Laframboise J. G. Probe theory for arbitrary shape in a large Debye length, stationary plasma // Phys. Fluids. 1976. V. 19, N 1, p. 25—31.
 6. Чан П., Тэлбот Л., Турян К. Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме. — М.: Мир, 1978. 202 с.
-

Рукопись поступила 5/VI 2013 г.