УДК 519.234

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ ПРОИЗВОДНЫХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В. Г. Алексеев

Введение. Настоящая статья, как и предшествующие работы автора [1–6], посвящена прикладному спектральному анализу стационарных случайных процессов (ССП) с дискретным временем. По своей идейной направленности она наиболее близка к работе [6], в которой было предложено заменить весовую функцию $w(x)$, используемую для осреднения периодограммы при построении оценки спектральной плотности, дискретным набором весовых коэффициентов $\{w(k)\}$. Если при использовании весовой функции $w(x)$ важные ограничения, налагаемые нами на моменты вида $\int x^j w(x)\,dx$, могли выполняться лишь приближенно, то при переходе к набору весовых коэффициентов $\{w(k)\}$ все условия, налагаемые нами на моменты вида $\sum\limits_k k^j w(k)$, выполняются (в пределах разрядной сетки компьютера) безошибочно. Это последнее обстоятельство приобретает особую важность в случае использования весовых функций $w(x)$ высших порядков, т. е. в тех случаях, когда некоторые из моментов четных порядков функции $w(x)$ должны обращаться в нуль. Если же интересующие нас моменты функции $w(x)$ обращаются в нуль лишь с той или иной степенью приближения, то ожидаемое нами уменьшение смещения оценки спектральной плотности не происходит. Применение весовых функций высших порядков в этих условиях не достигает цели или достигает ее лишь частично. В настоящей статье рекомендации, аналогичные рекомендациям работы [6], формулируются для случая, когда нас интересуют производные спектральной плотности не выше четвертого порядка. Весовую функцию $v(x)$ (ядро оценки той или иной производной спектральной плотности исследуемого ССП) мы предлагаем заменить дискретным набором весовых коэффициентов $\{v(k)\}$. Что же дает нам вычисление производных спектральной плотности? Так как смещение непараметрической (классической периодограммной) оценки спектральной плотности в первом приближении пропорционально одной из ее производных четного порядка (в зависимости от условий, налагаемых нами на моменты весовой функции $w(x)$, используемой для осреднения периодограммы), а дисперсия оценки пропорциональна квадрату самой спектральной плотности, получаем возможность вместе с оценкой интересующей нас спектральной плотности вычислить и средний квадрат ошибки оценивания, равный сумме дисперсии оценки и квадрата ее смещения. Кроме того, оценивая производные спектральной плотности, получаем возможность проверить и уточнить наши априорные предположения относительно степени ее гладкости. Ближайший раздел статьи будет посвящен краткому описанию математического аппарата, используемого при построении оценок производных спектральной плотности. Что же касается собственно оценок производных спектральной плотности, то им будут посвящены четыре последующих раздела статьи.

1. Некоторые предварительные сведения. В качестве основного инструмента, используемого нами в дальнейшем для построения оценок производных спектральной плотности, будут избраны полиномиальные тригонометрические ядра типа Джексона и их разложения в ряд Фурье. Говоря о ядрах типа Джексона, имеем в виду конечные тригонометрические полиномы $J_{l,n}(\mu)$, определяемые для любых натуральных l и n соотношением

$$J_{l,n}(\mu) = C_{l,n}\left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)}\right]^{2l}, \tag{1}$$

где $C_{l,n}$ — нормирующий множитель, обеспечивающий выполнение равенства

$$\int\limits_{\Pi} J_{l,n}(\mu)\,d\mu = 2\pi, \quad \Pi = [-\pi, \pi].$$

Для $l = \overline{1,5}$ нормирующие множители $C_{l,n}$ равны

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{3}{2n^3+n}, \quad \frac{20}{11n^5+5n^3+4n}, \quad \frac{315}{151n^7+70n^5+49n^3+45n}$$

и соответственно

$$\frac{36288}{15619n^9+7350n^7+5187n^5+4100n^3+4032n}.$$

Ядра $J_{1,n}(\mu)$, $J_{2,n}(\mu)$ широко известны под названием ядер Фейера и соответственно Джексона. Начиная с $l = 3$ принято говорить о ядрах типа Джексона. Объединяя все рассматриваемые нами ядра под общим названием «ядра типа Джексона», мы лишь констатируем их однотипность: каждое из ядер $J_{l,n}(\mu)$ пропорционально l-й степени ядра Фейера $J_{1,n}(\mu)$. Читателю, желающему ознакомиться с важнейшими свойствами ядер типа Джексона (включая ядра Фейера и Джексона), может быть рекомендована книга [7, гл. II, § 3]. Наибольший интерес для нас в дальнейшем будут представлять разложения в ряд Фурье ядер типа (1), т. е. коэффициенты $j_{l,n}(k)$ в формуле

$$J_{l,n}(\mu) = \sum_{k=-l(n-1)}^{l(n-1)} j_{l,n}(k)e^{ik\mu}.$$

Для $l = 1$ и 2 коэффициенты $j_{l,n}(k)$ описываются формулами

$$j_{l,n}(k) = 1 - |k|/n, \quad |k| \leqslant n,$$

и соответственно

$$j_{2,n}(k) = \begin{cases} 1 - \frac{3|k|+6nk^2-3|k|^3}{4n^3+2n}, & \frac{|k|}{n} \leqslant 1, \\ (2n-|k|)\frac{[(2n-|k|)^2-1]}{4n^3+2n}, & 1 \leqslant \frac{|k|}{n} \leqslant 2. \end{cases}$$

Для $l = 3, 4$ и 5 разложения в ряд Фурье ядер типа (1) описываются существенно более объемными формулами, приведенными в работах

[8,9] и соответственно [5]. Воспроизводить эти формулы в настоящей работе за ненадобностью не будем. Как и в работе [6], положим

$$\begin{aligned} w_{2,n}(k) &= q_{1,n}(k), \\ w_{4,n}(k) &= 2q_{1,n}(k) - q_{2,n}(k), \\ w_{6,n}(k) &= 3q_{1,n}(k) - 3q_{2,n}(k) + q_{3,n}(k), \\ w_{8,n}(k) &= 4q_{1,n}(k) - 6q_{2,n}(k) + 4q_{3,n}(k) - q_{4,n}(k) \end{aligned}$$

и

$$w_{10,n}(k) = 5q_{1,n}(k) - 10q_{2,n}(k) + 10q_{3,n}(k) - 5q_{4,n}(k) + q_{5,n}(k),$$

где $n \in \mathbb{N}$ и

$$q_{l,n}(k) = j_{l,n}(k)/(n^{2l}C_{l,n}).$$

Выписанные выше наборы $\{w_{m,n}(k)\}$, $m = 2,4,6,8,10$, и являются тем завершающим звеном, которое позволяет нам приступить к построению оценок производных спектральной плотности. Основное свойство каждого из наборов $\{w_{m,n}(k)\}$ состоит в том, что он удовлетворяет условиям $w_{m,n}(-k) = w_{m,n}(k)$, $\sum\limits_k w_{m,n}(k) = 1$ и

$$\sum_k k^j w_{m,n}(k) = 0, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Замечание. Легко видеть, что формулы, определяющие предлагаемые нами наборы $\{w_{m,n}(k)\}$, не содержат никаких неопределенностей типа бесконечных сумм, интегралов или специальных функций. Кроме того, в табл. 1 каждой из работ [10,8,9,11] приведены точные значения величин $n^{2l}q_{l,n}(k)$ для ряда значений n, равных целой положительной степени числа 2. Тем самым читателю предоставляется возможность в ряде случаев существенно ускорить вычисление интересующего его набора $\{w_{m,n}(k)\}$.

2. Оценки производной спектральной плотности. Итак, пусть $\{X(k),\, k \in \mathbb{Z}\}$ — стационарный в широком смысле случайный процесс со средним $\mathbf{E}X(k) \equiv 0$, корреляционной функцией $R(k) = \mathbf{E}X(j)X(j+k)$ и спектральной плотностью

$$f(\omega) = (2\pi)^{-1} \sum_{k \in Z} e^{-ik\omega} R(k), \quad \omega \in \Pi = [-\pi, \pi].$$

Пусть требуется по N последовательным отсчетам ССП $X(k)$ оценить производную $f'(\omega)$ в заданной точке $\omega = \omega_0 \in [0, \pi]$. Согласно формуле (12) работы [4] в качестве непараметрической оценки величины $f'(\omega_0)$ может быть принята случайная величина

$$Df_N(\omega_0) = h_N^{-2} \int\limits_{-\pi}^{2\pi} v\left(\frac{\omega - \omega_0}{h_N}\right) I_N(\omega)\, d\omega. \tag{2}$$

Здесь $I_N(\omega)$ — периодограмма, определяемая соотношением

$$I_N(\omega) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{k=1}^{N} X(k) e^{ik\omega} \right|^2,$$

h_N — некоторая числовая последовательность такая, что $0 < h_N \leqslant \pi$ для всех натуральных N и

$$h_N + \left(N h_N^3\right)^{-1} \to 0 \quad (N \to \infty),$$

а $v(x)$ — некоторая нечетная ограниченная функция, удовлетворяющая условиям $v(x) = 0$, если $|x| \geqslant 1$, и

$$\int\limits_{-1}^{1} x v(x)\, dx = 1.$$

Нечетное число $r \geqslant 3$ назовем *порядком весовой функции* $v(x)$, если она, в дополнение к сформулированным выше предположениям, удовлетворяет следующему условию:

$$\int\limits_{-1}^{1} x^j v(x)\, dx = \begin{cases} 0, & j = \overline{2, r-1}, \\ c \neq 0, & j = r. \end{cases} \tag{3}$$

Как и в случае оценивания самой спектральной плотности, применение весовых функций высших порядков (т. е. в данном случае порядков $r > 3$) может привести к очень большому выигрышу в точности оценивания, если только

а) объем выборки N не слишком мал,

б) оцениваемая спектральная плотность $f(\omega)$ является достаточно гладкой (многократно дифференцируемой) функцией.

Наши дальнейшие рассуждения, касающиеся вычисления оценки (2) величины $f'(\omega_0)$, совпадают с соответствующими рассуждениями работы [6], касающимися вычисления оценок самой спектральной плотности $f(\omega)$. При вычислении величины $Df_N(\omega_0)$ интеграл в правой части равенства (2) неизбежно заменяется интегральной суммой. При этом соотношение (3) для всех нечетных j, не превосходящих $r-2$, будет выполняться уже не точно, а приближенно и эффект (уменьшение смещения оценки $Df_N(\omega_0)$), ожидаемый нами от применения весовой функции $v(x)$ порядка $r > 3$, может быть не достигнут. Естественным образом мы приходим к необходимости замены весовой функции $v(x)$ дискретным набором весовых коэффициентов $\{v(k)\}$, удовлетворяющих условиям

$$v(-k) = -v(k), \tag{4}$$

$$\sum_k kv(k) = 1 \tag{5}$$

и

$$\sum_k k^j v(k) = 0, \quad j = \overline{2, r-1}. \tag{6}$$

Формула (2) для величины $Df_N(\omega_0)$ заменяется в этом случае соотношением

$$Df_N(\omega_0) = \frac{1}{\Delta\omega} \sum_k v(k) I_N(\omega_0 + k\Delta\omega),$$

где $\Delta\omega$ — шаг разбиения по частотному аргументу при переходе от интеграла (2) к интегральной сумме. Предлагаемые нами наборы весовых коэффициентов $\{v_{r,n}(k)\}$, удовлетворяющих условиям (4)–(6), описываются соотношениями

$$
\begin{aligned}
v_{3,n}(k) &= \frac{1}{2}[w_{2,n}(k-1) - w_{2,n}(k+1)],\\
v_{5,n}(k) &= \frac{1}{12}[-w_{4,n}(k-2) + 8w_{4,n}(k-1) - 8w_{4,n}(k+1) + w_{4,n}(k+2)],\\
v_{7,n}(k) &= \frac{1}{60}[w_{6,n}(k-3) - 9w_{6,n}(k-2) + 45w_{6,n}(k-1)\\
&\quad - 45w_{6,n}(k+1) + 9w_{6,n}(k+2) - w_{6,n}(k+3)],\\
v_{9,n}(k) &= \frac{1}{840}[-3w_{8,n}(k-4) + 32w_{8,n}(k-3)\\
&\qquad - 168w_{8,n}(k-2) + 672w_{8,n}(k-1) - 672w_{8,n}(k+1)\\
&\qquad + 168w_{8,n}(k+2) - 32w_{8,n}(k+3) + 3w_{8,n}(k+4)]
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
v_{11,n}(k) = \frac{1}{2520}&[2w_{10,n}(k-5) - 25w_{10,n}(k-4)\\
&+ 150w_{10,n}(k-3) - 600w_{10,n}(k-2) + 2100w_{10,n}(k-1)\\
&- 2100w_{10,n}(k+1) + 600w_{10,n}(k+2) - 150w_{10,n}(k+3)\\
&+ 25w_{10,n}(k+4) - 2w_{10,n}(k+5)],
\end{aligned}
$$

где величины $w_{m,n}(k)$, $n \in \mathbb{N}$, $m = 2, 4, 6, 8, 10$, определены в разд. 1. Число отличных от нуля коэффициентов в каждом из наборов $\{v_{r,n}(k)\}$ равно $n(r-1)+1$.

3. Оценки второй производной спектральной плотности. Для построения оценок второй производной спектральной плотности нам потребуются наборы весовых коэффициентов $\{v(k)\}$, удовлетворяющие следующим условиям: $v(-k) = v(k)$,

$$\sum_k v(k) = 0, \quad \sum_k k^2 v(k) = 2$$

и (для ряда четных значений $r \geqslant 4$)

$$\sum_k k^j v(k) = 0, \quad j = \overline{3, r-1}.$$

Предлагаемые нами наборы $\{v_{r,n}(k)\}$, удовлетворяющие всем перечисленным выше условиям, описываются соотношениями

$$\begin{aligned}
v_{4,n}(k) &= w_{2,n}(k-1) - 2w_{2,n}(k) + w_{2,n}(k+1),\\
v_{6,n}(k) &= \frac{1}{12}[-w_{4,n}(k-2) + 16w_{4,n}(k-1)\\
&\quad - 30w_{4,n}(k) + 16w_{4,n}(k+1) - w_{4,n}(k+2)],\\
v_{8,n}(k) &= \frac{1}{180}[2w_{6,n}(k-3) - 27w_{6,n}(k-2) + 270w_{6,n}(k-1)\\
&\quad - 490w_{6,n}(k) + 270w_{6,n}(k+1)\\
&\quad - 27w_{6,n}(k+2) + 2w_{6,n}(k+3)],\\
v_{10,n}(k) &= \frac{1}{5040}[-9w_{8,n}(k-4) + 128w_{8,n}(k-3) - 1008w_{8,n}(k-2)\\
&\quad + 8064w_{8,n}(k-1) - 14350w_{8,n}(k) + 8064w_{8,n}(k+1)\\
&\quad - 1008w_{8,n}(k+2) + 128w_{8,n}(k+3) - 9w_{8,n}(k+4)]
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
v_{12,n}(k) &= \frac{1}{25200}[8w_{10,n}(k-5) - 125w_{10,n}(k-4)\\
&\quad + 1000w_{10,n}(k-3) - 6000w_{10,n}(k-2)\\
&\quad + 42000w_{10,n}(k-1) - 73766w_{10,n}(k)\\
&\quad + 42000w_{10,n}(k+1) - 6000w_{10,n}(k+2)\\
&\quad + 1000w_{10,n}(k+3) - 125w_{10,n}(k+4) + 8w_{10,n}(k+5)].
\end{aligned}$$

Как и в предыдущем разделе, все величины $w_{m,n}(k)$, $n \in \mathbb{N}$, $m = 2, 4, 6, 8, 10$, заимствуются нами из разд. 1. Число отличных от нуля коэффициентов в каждом из наборов $\{v_{r,n}(k)\}$ равно $n(r-2)+1$. Полагая теперь

$$D^2 f_N(\omega_0) = \frac{1}{(\Delta\omega)^2} \sum_k v(k) I_N(\omega_0 + k\Delta\omega),$$

где $\Delta\omega$ — шаг разбиения по частоте и $\{v(k)\}$ — один из приведенных выше наборов $\{v_{r,n}(k)\}$, мы и получим оценку второй производной спектральной плотности.

4. Оценки третьей производной спектральной плотности. Для построения оценок третьей производной спектральной плотности нам потребуются наборы весовых коэффициентов $\{v(k)\}$, удовлетворяющие следующим условиям: $v(-k) = -v(k)$,

$$\sum_k kv(k) = 0, \quad \sum_k k^3 v(k) = 6$$

и (для ряда нечетных значений $r \geqslant 5$)

$$\sum_k k^j v(k) = 0, \quad j = \overline{4, r-1}.$$

Предлагаемые нами наборы $\{v_{r,n}(k)\}$, удовлетворяющие всем перечисленным выше условиям, описываются соотношениями

$$\begin{aligned}
v_{5,n}(k) &= \left[\frac{1}{2}w_{4,n}(k-2) - 2w_{4,n}(k-1) + 2w_{4,n}(k+1) - w_{4,n}(k+2)\right], \\
v_{7,n}(k) &= \frac{1}{8}[-w_{6,n}(k-3) + 8w_{6,n}(k-2) - 13w_{6,n}(k-1) \\
&\quad + 13w_{6,n}(k+1) - 8w_{6,n}(k+2) + w_{6,n}(k+3)], \\
v_{9,n}(k) &= \frac{1}{240}[7w_{8,n}(k-4) - 72w_{8,n}(k-3) + 338w_{8,n}(k-2) \\
&\quad - 488w_{8,n}(k-1) + 488w_{8,n}(k+1) - 338w_{8,n}(k+2) \\
&\quad + 72w_{8,n}(k+3) - 7w_{8,n}(k+4)]
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
v_{11,n}(k) = \frac{1}{30240}[&-205w_{10,n}(k-5) + 2522w_{10,n}(k-4) \\
&- 14607w_{10,n}(k-3) + 52428w_{10,n}(k-2) - 70098w_{10,n}(k-1) \\
&+ 70098w_{10,n}(k+1) - 52428w_{10,n}(k+2) + 14607w_{10,n}(k+3) \\
&- 2522w_{10,n}(k+4) + 205w_{10,n}(k+5)].
\end{aligned}$$

Число отличных от нуля коэффициентов в каждом из наборов $\{v_{r,n}(k)\}$ равно $n(r-1)+1$. Оценка третьей производной спектральной плотности строится теперь с помощью соотношения

$$D^3 f_N(\omega_0) = \frac{1}{(\Delta\omega)^3} \sum_k v(k) I_N(\omega_0 + k\Delta\omega),$$

где $\{v(k)\}$ — один из предлагаемых нами наборов $\{v_{r,n}(k)\}$.

5. Оценки производной четвертого порядка спектральной плотности. Для построения оценок производной четвертого порядка спектральной плотности нам потребуются наборы весовых коэффициентов $\{v(k)\}$, удовлетворяющие следующим условиям: $v(-k) = v(k)$,

$$\sum_k v(k) = \sum_k k^2 v(k) = 0, \quad \sum_k k^4 v(k) = 24$$

и (для ряда четных значений $r \geqslant 6$)

$$\sum_k k^j v(k) = 0, \quad j = \overline{5, r-1}.$$

Предлагаемые нами наборы $\{v_{r,n}(k)\}$, удовлетворяющие всем перечисленным выше условиям, описываются соотношениями

$$\begin{aligned}
v_{6,n}(k) = \frac{1}{4}[&w_{4,n}(k-3) - 2w_{4,n}(k-2) - w_{4,n}(k-1) + \\
&4w_{4,n}(k) - w_{4,n}(k+1) - 2w_{4,n}(k+2) + w_{4,n}(k+3)], \\
v_{8,n}(k) = \frac{1}{48}[&-5w_{6,n}(k-4) + 32w_{6,n}(k-3) - 44w_{6,n}(k-2) \\
&- 32w_{6,n}(k-1) + 98w_{6,n}(k) - 32w_{6,n}(k+1) \\
&- 44w_{6,n}(k+2) + 32w_{6,n}(k+3) - 5w_{6,n}(k+4)], \\
v_{10,n}(k) = \frac{1}{240}[&8w_{8,n}(k-5) - 73w_{8,n}(k-4) + 264w_{8,n}(k-3) \\
&- 284w_{8,n}(k-2) - 272w_{8,n}(k-1) + 714w_{8,n}(k) \\
&- 272w_{8,n}(k+1) - 284w_{8,n}(k+2) + 264w_{8,n}(k+3) \\
&- 73w_{8,n}(k+4) + 8w_{8,n}(k+5)]
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
v_{12,n}(k) = \frac{1}{30240}[&-293w_{10,n}(k-6) + 3352w_{10,n}(k-5) \\
&- 16816w_{10,n}(k-4) + 44984w_{10,n}(k-3) - 40179w_{10,n}(k-2) \\
&- 48336w_{10,n}(k-1) + 114576w_{10,n}(k) - 48336w_{10,n}(k+1) \\
&- 40179w_{10,n}(k+2) + 44984w_{10,n}(k+3) - 16816w_{10,n}(k+4)
\end{aligned}$$

$$+ 3352 w_{10,n}(k+5) - 293 w_{10,n}(k+6)].$$

Число отличных от нуля коэффициентов в каждом из наборов $\{v_{r,n}(k)\}$ равно $n(r-2)+3$. Полагая теперь

$$D^4 f_N(\omega_0) = \frac{1}{(\Delta\omega)^4} \sum_k v(k) I_N(\omega_0 + k\Delta\omega),$$

где $\{v(k)\}$ — один из приведенных выше наборов $\{v_{r,n}(k)\}$, мы и получим оценку производной четвертого порядка спектральной плотности.

Заключение. Предлагаемые нами алгоритмы статистического оценивания производных спектральной плотности $f(\omega)$ ССП $\{X(k), k \in \mathbb{Z}\}$ просты в исполнении, не требуют привлечения громоздких вычислительных процедур. Во всех случаях (при вычислении производных функции $f(\omega)$ порядков $v = 1, 2, 3, 4$) предлагаемые нами наборы весовых коэффициентов $\{v_{r,n}(k)\}$ предоставляют исследователю возможность широкого маневра в выборе параметров оценки производной спектральной плотности избранного им порядка. При этом во всех случаях устраняется погрешность, возникающая при переходе от теоретической оценки, включающей в себя интеграл от произведения периодограммы на ту или иную весовую функцию $v(x)$, к ее машинной реализации. Применительно к оценке первой производной функции $f(\omega)$ речь идет о погрешности, возникающей при переходе от интеграла (2) к интегральной сумме, реализуемой на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев В. Г.* О вычислении спектров стационарных случайных процессов по выборкам большого объема // Проблемы передачи информации. 1980. Т. 16, № 1. С. 42–49.
2. *Алексеев В. Л.* К вопросу о построении сверхразрешающих спектральных оценок // Автометрия. 1986. № 1. С. 3–7.
3. *Алексеев А. Г.* Выбор спектрального окна при построении оценки спектральной плотности // Радиотехника. 1999. № 9. С. 38–40.
4. *Алексеев А. Г.* О непараметрических оценках спектральной плотности // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, № 2. С. 185–190.
5. *Алексеев В. Г.* Оценка спектральной плотности типа Уэлча. Случай дискретного аргумента // Автометрия. 2001. № 6. С. 91–97.

6. *Алексеев В. Г.* О непараметрических оценках спектральной плотности стационарного случайного процесса с дискретным временем // Автометрия. 2003. Т. 39, № 1. С. 82–87.

7. *Дзядык В. К* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

8. *Алексеев В. Г.* Ядра типа Джексона и их применение к построению фильтров низких частот // Проблемы передачи информации. 1994. Т. 30, № 1. С. 97–102.

9. *Алексеев В Г.* Полиномиальные тригонометрические ядра и их применение к построению фильтров низких частот // Проблемы передачи информации. 1996. Т. 32, № 4. С. 16–22.

10. *Алексеев В. Г.* О некоторых новых линейных цифровых фильтрах // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41, № 2. С. 206–209.

11. *Алексеев В. Г.* Новые дискретные фильтры нижних частот // Радиотехника. 2002. № 6. С. 44–46.

г. Москва *11 мая 2004 г.*