



МЕХАНИКА

УДК 539.3

ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНОЙ ТРЕЩИНЕ С НАПОЛНИТЕЛЕМ В ПОЛОСЕ

Н. Н. Антоненко

Антоненко Нина Николаевна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры общей математики, Запорожский национальный технический университет, Украина, antonenkonina@i.ua

Предложен способ решения задачи о центральной продольной трещине с наполнителем в полосе. Предполагается, что скачки компонент вектора перемещений на берегах трещины пропорциональны соответствующим напряжениям в точках ее верхнего берега. Для решения задачи использовано интегральное преобразование Фурье. Задача сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений относительно производных от скачков перемещений на берегах трещины. На основании численных результатов сделаны такие выводы: увеличение полуширины полосы и коэффициента, который характеризует наполнитель трещины, приводит к уменьшению КИНов; увеличение модуля сдвига и коэффициента Пуассона полосы приводят к увеличению КИНов; для трещины, берега которой свободны от напряжений, упругие характеристики полосы практически не влияют на КИНЫ.

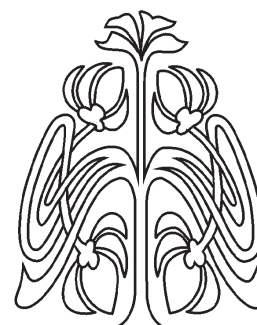
Ключевые слова: полоса, трещина, наполнитель, коэффициенты интенсивности напряжений, интегральное преобразование Фурье, интегро-дифференциальное уравнение.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-315-322

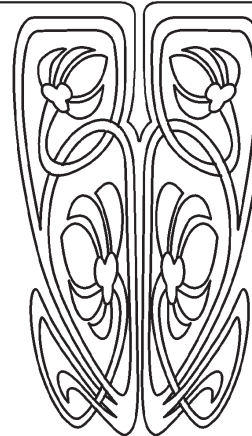
ВВЕДЕНИЕ

Во время изготовления и эксплуатации инженерных объектов в их элементах возникают дефекты различного типа (трещины, каверны, полости, включения), что может привести к преждевременному разрушению конструкций. Поэтому расчет напряженно-деформированного состояния конструкций с трещинами вызывает значительный практический и теоретический интерес. Одним из элементов инженерных сооружений могут выступать балки. В случае плоской деформации балку можно моделировать упругой полосой.

Задачи о прямолинейной трещине в полосе сводятся к решению интегральных уравнений или их систем. В работе [1] серия задач о центральной трещине в полосе с различными типами граничных условий на гранях полосы и берегах трещины сведена к парным интегральным уравнениям, решения которых найдены методом ортогональных полиномов. Методы большого и малого параметров использовались в [2–7]. В [8] приведены аналитические и графические результаты, которые иллюстрируют зависимость КИНов от безразмерного параметра, связанного с толщиной полосы и полушириной



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**

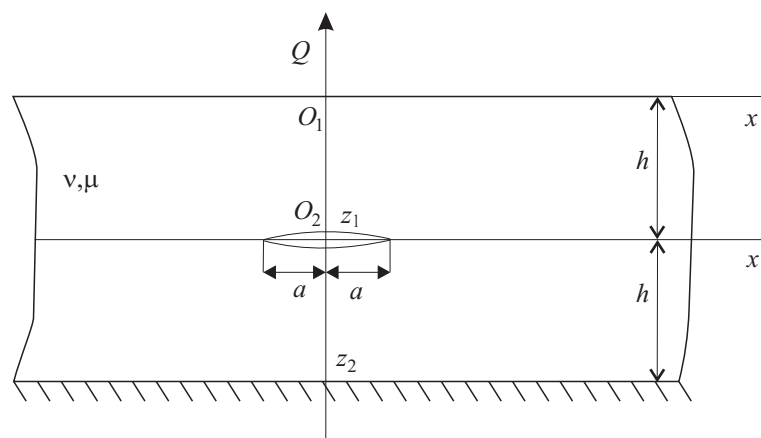


трещины для прямолинейных трещин в полосе с различными условиями на гранях полосы и берегах трещины, с указанием методов, при помощи которых они получены. Во всех указанных работах трещина моделируется физическим разрезом. На практике трещины могут быть наполнены неким клейким веществом.

В данной статье предлагается способ решения задачи о прямолинейной трещине с наполнителем, которая симметрично расположена относительно граней полосы. Наполнитель моделируется следующим образом [9]: скачки компонент вектора перемещений пропорциональны соответствующим напряжениям в точках верхнего берега трещины.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим упругую полосу толщины $2h$. Полосу будем характеризовать двумя упругими параметрами: модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона ν . Нижняя граница полосы жестко заделана, а к верхней границе приложена нормальная сосредоточенная нагрузка. Введем две локальные декартовые системы координат $O_i x z_i$ ($i = 1, 2$) так, как показано на рисунке.



Полоса с трещиной

На срединной плоскости полосы при $z_1 = h$, есть продольная трещина с наполнителем, занимающая область $x \in (-a, a)$. Напряжения и перемещения, которые относятся к верхней части полосы ($x \in (-\infty, +\infty), z_1 \in [0; h]$) будем обозначать нижним индексом 1, а к нижней части полосы ($x \in (-\infty, +\infty), z_2 \in [0; h]$) — нижним индексом 2.

Граничные условия:

$$\sigma_{z1}(x, 0) = Q\delta(x), \quad \tau_{xz1}(x, 0) = 0, \quad u_2(x, h) = 0, \quad w_2(x, h) = 0. \quad (1)$$

В рамках модели трещины с наполнителем полагаем, что при $z_1 = h$ выполняются следующие условия [9]:

$$\sigma_{z2}(x, 0) = \sigma_{z1}(x, h), \quad \tau_{xz2}(x, 0) = \tau_{xz1}(x, h), \quad (2)$$

$$w_2(x, 0) - w_1(x, h) = \begin{cases} A(x), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad u_2(x, 0) - u_1(x, h) = \begin{cases} B(x), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (3)$$

$$A(x) = \sqrt{a^2 - x^2}f(x), \quad B(x) = \sqrt{a^2 - x^2}g(x), \quad (4)$$

$$\sigma_{z1}(x, h) = cf(x), \quad |x| < a, \quad \tau_{xz1}(x, h) = cg(x), \quad |x| < a, \quad (5)$$

где c — заданная константа, которая характеризует наполнитель, $f(x)$, $g(x)$ — неизвестные функции, $f(x)$, $g(x) \in C^2[-a, a]$, $f(\pm a) = 0$, $g(\pm a) = 0$.

Требуется определить скачки перемещений на берегах трещины и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).



Введем безразмерные величины $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{z}_k = z_k/a$, $\tilde{u}_k = u_k/a$, $\tilde{w}_k = w_k/a$, $\tilde{\sigma}_{zk} = \sigma_{zk}/\mu$, $\tilde{\tau}_{xzk} = \tau_{xzk}/\mu$, $\tilde{h} = h/a$, $\tilde{c} = c/\mu$, где a , μ — полудлина трещины и модуль сдвига полосы соответственно. В дальнейшем тильды над функциями и переменными будем опускать, считая, что все преобразования выполняются над безразмерными величинами.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения задачи воспользуемся интегральным преобразованием Фурье:

$$\bar{s}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x)e^{i\xi x} dx, \quad s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{s}(\xi)e^{-i\xi x} d\xi.$$

В пространстве трансформант компоненты напряженно-деформированного состояния могут быть представлены в виде линейных комбинаций вспомогательных функций $\alpha = \alpha(\xi)$, $\beta = \beta(\xi)$, $\gamma = \gamma(\xi)$, $\delta = \delta(\xi)$, которые связаны с напряжениями и перемещениями точек верхней границы полосы такими формулами [10]:

$$\alpha = \bar{\sigma}_z(\xi, 0), \quad \beta = \mu W(\xi, 0), \quad \gamma = \mu S(\xi, 0), \quad \delta = \frac{-i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi, 0), \quad (6)$$

где $W(\xi, z) = p\bar{w}(\xi, z)$, $S(\xi, z) = -i\xi\bar{u}(\xi, z)$, $p = |\xi|$.

Трансформанты напряжений и перемещений в точках полосы имеют вид [10]:

$$2\mu W(\xi, z) = ((2 - \omega) \operatorname{sh} pz - \omega pz \operatorname{ch} pz) \alpha + 2(-\omega pz \operatorname{sh} pz + \operatorname{ch} pz) \beta + \\ + 2((1 - \omega) \operatorname{sh} pz - \omega pz \operatorname{ch} pz) \gamma - \omega pz \operatorname{sh} pz \delta, \quad (7)$$

$$2\mu S(\xi, z) = \omega pz \operatorname{sh} pz \alpha + 2((1 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \beta + \\ + 2(\omega pz \operatorname{sh} pz + \operatorname{ch} pz) \gamma + ((2 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \delta, \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_z(\xi, z) = (\operatorname{ch} pz - \omega pz \operatorname{sh} pz) \alpha + 2\omega (\operatorname{sh} pz - pz \operatorname{ch} pz) \beta - \\ - 2\omega pz \operatorname{sh} pz \gamma - ((1 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \delta, \quad (9)$$

$$-\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi, z) = (-(1 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \alpha + 2\omega pz \operatorname{sh} pz \beta + \\ + 2\omega (\operatorname{sh} pz + pz \operatorname{ch} pz) \gamma + (\omega pz \operatorname{sh} pz + \operatorname{ch} pz) \delta, \quad (10)$$

где $\omega = \frac{1}{2(1 - \nu)}$, $p = |\xi|$.

Запишем условия (1)–(3) с учетом формул (6) в пространстве трансформант Фурье:

$$\alpha_1 = Q, \quad \delta_1 = 0, \quad \beta_2 - \mu W_1(\xi, h) = \mu p M(\xi), \quad \gamma_2 - \mu S_1(\xi, h) = \mu(-i\xi)N(\xi), \\ S_2(\xi, h) = 0, \quad W_2(\xi, h) = 0,$$

где $M(\xi) = \int_{-a}^a A(t)e^{i\xi t} dt$, $N(\xi) = \int_{-a}^a B(t)e^{i\xi t} dt$.

Используя формулы (7)–(10), из последних соотношений найдем β_1 , γ_1 , α_2 , β_2 , γ_2 , δ_2 . Трансформанты нормальных и касательных напряжений при $z_1 = h$ примут такой вид:

$$\bar{\sigma}_{z1}(\xi, h) = \frac{pA_1(p)M(\xi) + i\xi A_2(p)N(\xi) - QA_3(p)}{D(p)}, \quad (11)$$

$$\bar{\tau}_{xz1}(\xi, h) = i \operatorname{sgn}(\xi) \frac{-pA_2(p)M(\xi) + i\xi A_4(p)N(\xi) + QA_5(p)}{D(p)}, \quad (12)$$

где $A_1(p) = -\mu\omega (a_1 + a_2e^{-2\tilde{p}} + a_3e^{-4\tilde{p}} + a_4e^{-6\tilde{p}} - a_1e^{-8\tilde{p}})$, $A_2(p) = 2\mu\omega (b_1 + b_2e^{-2\tilde{p}} + b_1e^{-4\tilde{p}})e^{-2\tilde{p}}$, $A_3(p) = c_1e^{-\tilde{p}} + c_2e^{-3\tilde{p}} + c_3e^{-5\tilde{p}} + c_4e^{-7\tilde{p}}$, $A_4(p) = \mu\omega (a_1 + d_1e^{-2\tilde{p}} - a_3e^{-4\tilde{p}} + d_2e^{-6\tilde{p}} - a_1e^{-8\tilde{p}})$,



$$A_5(p) = a_1 \tilde{p} e^{-\tilde{p}} + f_1 e^{-3\tilde{p}} + f_2 e^{-5\tilde{p}} + a_1 \tilde{p} e^{-7\tilde{p}}, \quad D(p) = a_1 + k e^{-4\tilde{p}} + a_1 e^{-8\tilde{p}}, \quad a_1 = \omega^2 - 2\omega, \\ a_2 = 2\tilde{\omega}(-\tilde{\omega} + 2\omega\tilde{p} + 2\omega\tilde{p}^2), \quad a_3 = 8\tilde{p}(\tilde{\omega} + \omega^2 + 2\omega^2\tilde{p}^2), \quad a_4 = 2\tilde{\omega}(\tilde{\omega} + 2\omega\tilde{p} - 2\omega\tilde{p}^2), \quad b_1 = \tilde{\omega} + 2\omega\tilde{p}^2, \\ b_2 = -2\tilde{\omega}, \quad c_1 = -a_1(1 + \tilde{p}), \quad c_2 = 2\tilde{\omega} + \omega^2 + 3\omega^2\tilde{p} + 4\omega^2\tilde{p}^2, \quad c_3 = 2\tilde{\omega} + \omega^2 - 3\omega^2\tilde{p} + 4\omega^2\tilde{p}^2, \quad c_4 = -a_1(1 - \tilde{p}), \\ d_1 = -2\tilde{\omega}(\tilde{\omega} + 2\omega\tilde{p} - 2\omega\tilde{p}^2), \quad d_2 = 2\tilde{\omega}(\tilde{\omega} - 2\omega\tilde{p} - 2\omega\tilde{p}^2), \quad k = -2(2 + a_1 + 8\omega^2\tilde{p}^2), \quad f_1 = 2\tilde{\omega} - \omega^2\tilde{p} + 4\omega^2\tilde{p}^2, \\ f_2 = -2\tilde{\omega} - \omega^2\tilde{p} - 4\omega^2\tilde{p}^2, \quad \tilde{p} = ph, \quad \tilde{\omega} = 1 - \omega.$$

Используя граничные условия (5) и связь между оригиналами и трансформантами напряжений, получим систему интегральных уравнений задачи:

$$\begin{cases} \pi c f(x) = \int_{-1}^1 A(t) K_1(t-x) dt - \int_{-1}^1 B(t) K_2(t-x) dt - Q F_1(x), \\ \pi c g(x) = \int_{-1}^1 A(t) K_2(t-x) dt - \int_{-1}^1 B(t) K_3(t-x) dt - Q F_2(x), \end{cases} \quad (13)$$

где

$$K_1(z) = \int_0^{+\infty} \frac{p A_1(p)}{D(p)} \cos(pz) dp, \quad K_2(z) = \int_0^{+\infty} \frac{p A_2(p)}{D(p)} \sin(pz) dp, \quad K_3(z) = \int_0^{+\infty} \frac{p A_4(p)}{D(p)} \cos(pz) dp, \\ F_1(z) = \int_0^{+\infty} \frac{A_3(p)}{D(p)} \cos(pz) dp, \quad F_2(z) = \int_0^{+\infty} \frac{A_5(p)}{D(p)} \sin(pz) dp.$$

Проинтегрировав по частям первые два слагаемых в каждом из уравнений системы (13), получим:

$$\begin{cases} \pi c f(x) = - \int_{-1}^1 A'(t) R_1(t-x) dt - \int_{-1}^1 B'(t) R_2(t-x) dt - Q F_1(x), \\ \pi c g(x) = \int_{-1}^1 A'(t) R_2(t-x) dt + \int_{-1}^1 B'(t) R_3(t-x) dt - Q F_2(x), \end{cases} \quad (14)$$

где

$$R_1(z) = \int_0^{+\infty} \frac{A_1(p)}{D(p)} \sin(pz) dp, \quad R_2(z) = \int_0^{+\infty} \frac{A_2(p)}{D(p)} \cos(pz) dp, \quad R_3(z) = \int_0^{+\infty} \frac{A_4(p)}{D(p)} \sin(pz) dp.$$

Выделим в ядрах уравнений системы (14) сингулярные и регулярные части:

$$\begin{cases} \pi c f(x) = - \int_{-1}^1 A'(t) L_1(t-x) dt - \int_{-1}^1 B'(t) R_2(t-x) dt + \mu\omega \int_{-1}^1 A'(t) L_3(t-x) dt - Q F_1(x), \\ \pi c g(x) = \int_{-1}^1 A'(t) R_2(t-x) dt + \int_{-1}^1 B'(t) L_2(t-x) dt + \mu\omega \int_{-1}^1 B'(t) L_3(t-x) dt - Q F_2(x), \end{cases} \quad (15)$$

где

$$L_1(z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{A_1(p)}{D(p)} + \mu\omega \right) \sin(pz) dp, \quad L_2(z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{A_4(p)}{D(p)} - \mu\omega \right) \sin(pz) dp, \\ L_3(z) = \int_0^{+\infty} \sin(pz) dp.$$



Воспользуемся равенством (в смысле теории обобщенных функций) [11]:

$$\int_0^{+\infty} \sin(pz) dp = \frac{1}{z}. \quad (16)$$

С учетом (16) система (15) принимает вид

$$\begin{cases} \pi c f(x) = - \int_{-1}^1 A'(t) L_1(t-x) dt + \mu\omega \int_{-1}^1 \frac{A'(t)}{t-x} dt - \int_{-1}^1 B'(t) R_2(t-x) dt - Q F_1(x), \\ \pi c g(x) = \int_{-1}^1 A'(t) R_2(t-x) dt + \int_{-1}^1 B'(t) L_2(t-x) dt + \mu\omega \int_{-1}^1 \frac{B'(t)}{t-x} dt - Q F_2(x), \end{cases}$$

Введем новые переменные $\varphi(t) = A'(t)$, $\psi(t) = B'(t)$ и перепишем последнюю систему в виде

$$\begin{cases} \pi c f(x) = - \int_{-1}^1 \varphi(t) L_1(t-x) dt + \mu\omega \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt - \int_{-1}^1 \psi(t) R_2(t-x) dt - Q F_1(x), \\ \pi c g(x) = \int_{-1}^1 \varphi(t) R_2(t-x) dt + \int_{-1}^1 \psi(t) L_2(t-x) dt + \mu\omega \int_{-1}^1 \frac{\psi(t)}{t-x} dt - Q F_2(x). \end{cases} \quad (17)$$

Из того, что $A(\pm 1) = 0$ и $B(\pm 1) = 0$, получаем условия

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 \psi(t) dt = 0. \quad (18)$$

Неизвестные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ будем искать в виде

$$\varphi(x) = \frac{\hat{f}(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \psi(x) = \frac{\hat{g}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (19)$$

Построим интерполяционные многочлены Лагранжа для функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^N S_m(x) \frac{f_m}{\sqrt{1-t_m^2}}, \quad \psi(x) = \sum_{m=1}^N S_m(x) \frac{g_m}{\sqrt{1-t_m^2}}, \quad (20)$$

где $S_m(x) = \prod_{r \neq m} (x - t_r) (t_r - t_m)^{-1}$, $f_m = \hat{f}(t_m)$, $g_m = \hat{g}(t_m)$.

Используя связь между $A'(x)$ и $f(x)$, $B'(x)$ и $g(x)$, левые части системы (17) представим в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=1}^N \int_{-1}^x \frac{S_m(z) f_m}{\sqrt{1-z^2}} dz, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=1}^N \int_{-1}^x \frac{S_m(z) g_m}{\sqrt{1-z^2}} dz. \quad (21)$$

Согласно методу механических квадратур [4] систему (17) и условия (18) с учетом формул (20) и (21) сводим к системе N линейных уравнений относительно N неизвестных:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ \left[-\frac{cN}{\sqrt{1-x_r^2}} \int_{-1}^{x_r} \frac{S_m(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz - L_{1rm} + \frac{\mu\omega}{t_m - x_r} \right] f_m - R_{2rm} g_m \right\} - Q F_{1r} = 0, \\ \frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ R_{2rm} f_m + \left[-\frac{cN}{\sqrt{1-x_r^2}} \int_{-1}^{x_r} \frac{S_m(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz + L_{2rm} + \frac{\mu\omega}{t_m - x_r} \right] g_m \right\} - Q F_{2r} = 0, \\ \sum_{m=1}^N f_m = 0, \quad \sum_{m=1}^N g_m = 0, \end{cases} \quad (22)$$



где $L_{irm} = L_i(t_m - x_r)$, $R_{2rm} = R_2(t_m - x_r)$, $F_{ir} = F_i(x_r)$, $t_m = \cos \frac{2m-1}{2N}\pi$, $x_r = \cos \frac{\pi r}{N}$, $i = 1, 2$, $r = \overline{1, N-1}$, $m = \overline{1, N}$.

Из системы (22) находим f_m , g_m и строим интерполяционные многочлены для функций $\hat{f}(x)$ и $\hat{g}(x)$. Искомые скачки перемещений находим по формулам:

$$A(x) = \int_{-1}^x \frac{\hat{f}(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz, B(x) = \int_{-1}^x \frac{\hat{g}(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz.$$

Формулы для расчета КИНов, полученные на основании асимптотического поведения нормальных и касательных напряжений на берегах трещины, принимают вид [4]:

$$K_I = -\mu\omega\sqrt{\pi a}\hat{f}(\pm 1), K_{II} = -\mu\omega\sqrt{\pi a}\hat{g}(\pm 1),$$

где

$$\begin{aligned}\hat{f}(1) &= -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (-1)^k f_k \operatorname{ctg} \left(\frac{2k-1}{4n} \pi \right), & \hat{f}(-1) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+N} f_k \operatorname{tg} \left(\frac{2k-1}{4n} \pi \right), \\ \hat{g}(1) &= -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (-1)^k g_k \operatorname{ctg} \left(\frac{2k-1}{4n} \pi \right), & \hat{g}(-1) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+N} g_k \operatorname{tg} \left(\frac{2k-1}{4n} \pi \right).\end{aligned}$$

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные расчеты проведены для трещины длины $2a = 2$. К верхней границе полосы приложена нормальная сосредоточенная сила $Q = 1$ так, как показано на рисунке. В табл. 1–4 приведены результаты, которые иллюстрируют зависимость КИНов от упругих характеристик полосы, ее полуширины и наполнителя трещины.

Таблица 1

Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от толщины
полосы h ($\mu = 1$, $\nu = 0.3$)

h	2	3	4	5	10
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 1$	0.11182	0.08411	0.06609	0.05407	0.0590
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 0$	0.30904	0.21556	0.16470	0.13297	0.06733
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 1$	0.02450	0.01459	0.00914	0.00616	0.00261
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 0$	0.03290	0.02276	0.01485	0.01017	0.00279

Таблица 2

Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от модуля сдвига
полосы μ ($\nu = 0.3$, $h = 10$)

μ	1	2	3	4	5	10
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 1$	0.02788	0.03945	0.04577	0.04976	0.05250	0.0590
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 0$	0.06733	0.06733	0.06733	0.06733	0.06733	0.06733
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 1$	0.00165	0.00207	0.00227	0.00238	0.00245	0.00261
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 0$	0.00279	0.00279	0.00279	0.00279	0.00279	0.00279



Таблица 3

Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений
от коэффициента Пуассона полосы ν ($\mu = 1$, $h = 10$)

ν	0.1	0.2	0.3
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}$, $c = 1$	0.02375	0.02563	0.02788
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}$, $c = 0$	0.06697	0.06709	0.06733
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}$, $c = 1$	0.00149	0.00157	0.00165
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}$, $c = 0$	0.00280	0.00280	0.00279

Таблица 4

Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от коэффициента, который
характеризует наполнитель c ($\nu = 0.3$, $\mu = 1$, $h = 10$)

c	1	2	3	4	5	10
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}$	0.02788	0.01757	0.01282	0.01009	0.00832	0.00443
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}$	0.00165	0.00117	0.00091	0.00074	0.00062	0.00035

Анализ результатов, приведенных в табл. 1–4, позволяет сделать такие выводы:

- 1) увеличение полуширины полосы и коэффициента c приводит к уменьшению КИНов;
- 2) для трещины с наполнителем к увеличению КИНов приводит увеличение модуля сдвига и коэффициента Пуассона полосы;
- 3) для случая трещины, берега которой свободны от напряжений ($c = 0$), упругие характеристики полосы практически не влияют на КИНы.

Библиографический список

1. Fichter W. B. Stresses at the tip of a longitudinal crack in a plate strip. Washington : National Aeronautics and Space Administration, 1967. 55 p.
2. Александров В. М., Сметанин Б. И. Равновесная трещина в слое малой толщины // ПММ. 1965. Т. 29, вып. 4. С. 782–785.
3. Сметанин Б. И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое // МТТ. 1968. № 2. С. 115–122.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев : Наук. думка, 1981. 324 с.
5. Александров В. М., Сметанин Б. И. Продольная трещина в преднапряженном тонком упругом слое со свободными границами // ПММ. 2005. Т. 69, вып. 1. С. 150–159.
6. Александров В. М. Продольная трещина в ортотропной упругой полосе со свободными гранями // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 115–124.
7. Пожарский Д. А., Молчанов А. А. Асимптотические решения смешанных задач для упругой полосы и клина // Вестн. ДГТУ. 2010. Т. 10. С. 447–454.
8. Murakami Y. Stress intensity factors handbook. Pergamon Press, 1987. Vol. 1. 1566 p.
9. Антоненко Н. М., Величко І. Г. Моделирование межфазной трещины с наполнителем на границе упругой полосы и упругой полуплоскости // Вісник Донецького національного університету. Сер. А : Природничі науки. 2013. № 1. С. 23–27.
10. Ткаченко І. Г. Двовірна мішана задача термопружності для багатоплощинної основи // Прикладні проблеми механіки і математики. 2005. Вип. 3. С. 70–78.
11. Александров В. М., Пожарский Д. А. К задаче о трещине на границе раздела упругой полосы и полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 86–93.



The Problem of a Longitudinal Crack with a Filler in a Strip

N. N. Antonenko

Antonenko Nina Nikolayevna, Zaporozhye National Technical University, 64, Zhukovsky st., 69063, Zaporizhzhya, Ukraine, antonenkonina@i.ua

The method of the solution the problem of the central longitudinal crack with a filler in a strip is proposed. It is assumed that the jumps of the components of displacement vector is proportional to the corresponding stresses at its upper edge. Fourier's method of integral transformation is used. The problem is reduced to a system of integro-differential equations. The effects of influence of thickness, mechanical properties of a strip and a filler of the crack on Mode I and Mode II stresses intensity factors (SIFs) are examined. The following conclusions are made: increase the width of a strip and the coefficient that characterizes a filler leads to reduction of SIFs; increase of shear modulus and Poisson's ratio of a strip leads to the increase of SIF.

Key words: strip, crack, filler, stress intensity factors, method of Fourier integral transformation, integro-differential equation.

References

1. Fichter W. B. *Stresses at the tip of a longitudinal crack in a plate strip*. Washington, National Aeronautics and Space Administration, 1967, 55 p.
2. Aleksandrov V. M., Smetanin B. I. Equilibrium crack in a thin layer. *J. Appl. Math. Mech.* [Prikl. Mat. Mekh.], vol. 29, iss. 4, 1965, pp. 926–929.
3. Smetanin B. I. *Nekotorye zadachi o shhel'jah v uprugom kline i sloe* [Some of the problem of cracks in an elastic wedge and layer]. *Inzh. zh. MTT*, 1968, iss. 2, pp. 115–122 (in Russian).
4. Savruk M. P. *Dvumernye zadachi uprugosti dlia tel s treshchinami* [Solution of two-dimensional problems of the theory of elasticity for bodies with cracks]. Kiev, Nauk. dumka, 1981, 324 p. (in Russian).
5. Aleksandrov V. M., Smetanin B. I. A longitudinal crack in a prestressed thin elastic layer with free boundaries. *J. Appl. Math. Mech.* [Prikl. Mat. Mekh.], 2005, vol. 69, iss. 1, pp. 141–150.
6. Alexandrov V. M. Longitudinal crack in an orthotropic elastic strip with free faces. *Mech. Solids* [Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela], 2006, vol. 41, iss. 1, pp. 88–94.
7. Pozharskiy D. A., Molchanov A. A. Asymptotic solutions of mixed problems for elastic strip and wedge. *Vestnik of DSTU* [Vestnik of DSTU]. 2010, vol. 10, pp. 447–454 (in Russian).
8. Murakami Y. *Stress intensity factors handbook*. Pergamon Press, 1987, vol. 1, 1566 p.
9. Antonenko N.N. Modelirovanie mezhfaznoi treshchiny s napolnitelem na granitse uprugoi polosy i uprugoi poluploskosti [Modeling of a crack with a filler on the elastic strip-half-plane interface] *Visnik Donets'kogo natsional'nogo universitetu. Ser. A : Prirodnichi nauki*. 2013, no. 1, pp. 23–27 (in Russian).
10. Tkachenko I. G. Dvumirna mishana zadacha termopruzhnosti dlia bagatosharovoi osnovi [A two-dimensional mixed thermoelasticity problem for a multilayer foundation] *Prikladni problemi mehaniki i matematiki* [Applied problems of mechanics and mathematics]. 2005, vol. 3, pp. 70–78 (in Ukrainian).
11. Alexandrov V. M., Pozharskii D. A. To the problem of a crack on the elastic strip-half-plane interface. *Mech. Solids* [Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela], 2001, vol. 36, iss. 1, pp. 70–76.

УДК 532.591

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

К. Ю. Басинский

Басинский Константин Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования, Тюменский государственный университет, kbasinsky@mail.ru

Рассмотрена нелинейная задача о распространении волн по свободной поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины в плоском случае. С помощью метода малого параметра данная нелинейная задача раскладывается на задачи в первых двух приближениях, которые последовательно разрешаются. Получены нелинейные выражения для компонент вектора скорости, динамического давления и формы свободной поверхности. Изучается движение частиц вязкой жидкости, вызванное распространением волны по свободной поверхности. Установлено, что вязкость жидкости