

Осцилляции параметров течения в окрестности цилиндрического вихря

Т. А. Петрова^a, Ф. В. Шугаев^b

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

E-mail: ^atapetrova@phys.msu.ru, ^bshugaev@phys.msu.ru

Статья поступила 01.06.2011, подписана в печать 22.09.2011

В работах, посвященных вихревым течениям, осцилляции параметров исследованы недостаточно полно, не показана их связь с фундаментальным решением уравнений Навье–Стокса. Некоторые типы вихревых структур в двумерных стационарных течениях несжимаемой жидкости описаны в [1]. Ниже нелинейная система уравнений Навье–Стокса используется для расчета нестационарного течения в окрестности цилиндрического вихря в газе. Задача рассмотрена в полупространстве $z \geq 0$, показан осциллирующий характер решения, исследованы осцилляции температуры, плотности и давления. Особенность предложенного метода состоит в том, что не используются разностные схемы и модель применима при всех параметрах течения, когда газ можно считать совершенным ($c_p/c_v = \gamma = \text{const}$).

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, цилиндрический вихрь, осцилляции параметров.

УДК: 532.516.5. PACS: 47.10.ad.

Введение

Одна из моделей турбулентности, предложенная Хопфом и Ландау, состоит в следующем [2]. Решения уравнений Навье–Стокса существуют и при больших значениях времени t , но они являются квазипериодическими. То есть последовательно возбуждается все больше и больше вторичных осцилляций, так что в конце концов решение принимает вид $v(t) = f(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)$, где частоты ω_i связаны иррационально ($v(t)$ — скорость). При больших n решение становится достаточно сложным и может описывать хаотическое движение среды. Модель подтверждается тем, что решение линейризованной системы уравнений Навье–Стокса носит осциллирующий характер. Основу турбулентного течения составляют вихревые структуры (вихревые трубки и вихревые кольца). Поэтому представляет интерес изучение этих структур на основе полных нестационарных уравнений Навье–Стокса.

Системой уравнений Навье–Стокса описывается течение вязкого теплопроводного газа.

Нестационарные уравнения Навье–Стокса представляют собой параболическую систему, коэффициенты при старших производных зависят от неизвестных функций (далее используются эйлеровы переменные):

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla v = 0, \\ \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \\ \rho C_V \frac{dT}{dt} = \Phi - p \nabla v + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \end{cases} \quad (1)$$

где $\Phi = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{2}{3}\mu (\dot{\epsilon}_{kk})^2$ — диссипативная функция, $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, $P_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{2}{3}\mu \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} - p \delta_{ij}$, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Рассматривается воздух, его коэффициенты вязкости и теплопроводности зависят от температуры по степенному закону ($\mu = \mu_0 (T/T_0)^{0.75}$, $\lambda = \lambda_0 (T/T_0)^{0.75}$,

$T_0 = \text{const}$ — температура в начальный момент времени), C_V — теплоемкость при постоянном объеме, а давление, температура и плотность связаны уравнением Менделеева–Клапейрона $p = \frac{\rho RT}{M}$, где M — молярная масса.

Задача решается в цилиндрической системе координат r, z, ϕ (рис. 1). Вследствие симметрии течения решение не зависит от ϕ .

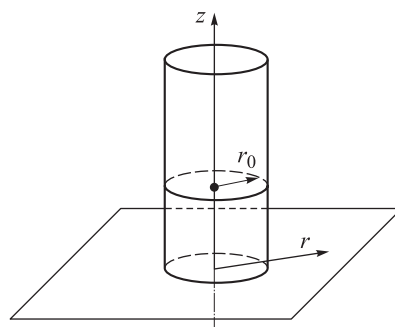


Рис. 1. Схема течения

Начальные условия таковы:

$$\begin{aligned} \Omega_r(t=0) &= \Omega_\phi(t=0) = 0, \\ \Omega_z(t=0) &= \Omega_0, & z > 0, \quad r \leq r_0, \\ \Omega_z(t=0) &= -\Omega_0, & z < 0, \quad r \leq r_0, \\ \Omega_z(t=0) &= 0, & r > r_0, \\ \omega(0) &= s(0) = h(0) = 0. \end{aligned}$$

На плоскости $z = 0$ выполняется условие прилипания

$$v_{z=0} = 0.$$

Постановка задачи

Систему (1) можно представить в виде

$$\frac{d\Omega_i}{dt} = \nu \Delta \Omega_i + f_{li},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{4}{3}\nu\Delta\varphi + \frac{1+h}{\gamma}\Delta\omega - \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\varphi}{2}e^w\right)\Delta h + f_2, \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{\gamma}{Pr}\eta\Delta h - (\gamma-1)(1+h)\varphi + f_3, \\ f_l &= f_l(x, t, \psi_j, \frac{\partial\psi_j}{\partial x_m}), \quad \Omega = \text{rot } v, \quad w = -\ln \rho, \quad \varphi = \text{div } v, \\ h &= T-1, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad \eta = \frac{\lambda}{\rho}, \quad \psi_1 = w, \quad \psi_2 = \varphi, \quad \psi_3 = h, \\ i &= 1, 2, 3; \quad l = 2, 3; \quad m = 1, 2, 3;\end{aligned}\quad (2)$$

ρ, T, μ, λ — плотность, температура, вязкость и теплопроводность соответственно; Δ — оператор Лапласа, Pr — число Прандтля ($Pr = \mu_0 C_p / \lambda_0$, где C_p — теплоемкость при постоянном давлении; для газов число Прандтля порядка единицы, для воздуха $Pr = 0.716$), γ — показатель адиабаты; f_{1i}, f_2, f_3 — нелинейные члены относительно первых производных [3]. С физической точки зрения задача может моделировать течение в окрестности смерча, если пренебречь влиянием конвекции.

Система (2) записана в безразмерном виде, характерная длина $l_0 = \nu_0 / c_0$, характерное время $t_0 = \nu_0 / c_0^2$, $\nu_0 = \mu_0 / \rho_0$. Величина ν есть кинематическая вязкость, c — скорость звука, индекс «0» соответствует состоянию в начальный момент времени.

Первое уравнение системы (2) есть результат применения операции rot к уравнению движения. Второе уравнение — это уравнение непрерывности. Третье уравнение получено применением операции div к уравнению движения. Четвертое уравнение представляет собой закон сохранения энергии.

Выражение для скорости таково [4]:

$$v(r, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\varphi(r+r', t) \cdot r + \Omega(r+r', t) \times r}{r^3} dV.$$

Таким образом, граничное условие на плоскости $z=0$ выполняется, если

$$\Omega_i(r, z, t) = -\Omega_i(r, -z, t), \quad \varphi(r, z, t) = \varphi(r, -z, t).$$

Метод решения задачи

Как сказано, система (2) является параболической. Для ее решения использован метод параметрикса, ранее разработанный для линейной параболической системы. Суть предложенного метода состоит в том, что система сводится к системе интегральных уравнений типа Вольтерра и затем используется итерационная процедура. Она может быть разделена на два этапа. На первом этапе мы находим приближенное фундаментальное решение, так называемый параметрикс [5, 6]. Второй этап — нахождение фундаментального решения. Нелинейные члены в правой части системы (2) учитываются на втором этапе, при построении фундаментального решения. Если n -я итерация известна, тогда нахождение $(n+1)$ -й итерации сводится к решению системы, в которой коэффициенты при старших производных зависят от функций, соответствующих n -й итерации. В качестве первой итерации берется решение линеаризованной системы, представимое в аналитическом

виде. Тогда коэффициенты, относящиеся к оператору Лапласа, известны. Таким образом получается система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Кроме того, мы предполагаем, что коэффициенты при старших производных зависят исключительно от времени, координаты рассматриваются как параметры. Обозначим этот параметр через y .

Применение метода к поставленной задаче, вторая итерация

Уравнения системы (2) для Ω_i слабо зависят от следующих трех. Поэтому они рассматриваются отдельно. В линейном случае они сводятся к параболическим с постоянными коэффициентами.

На первой итерации для завихренности имеем задачу Коши

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial t} &= \Delta \Omega, \\ \Omega_r(t=0) &= \Omega_\phi(t=0) = 0, \\ \Omega_z(t=0) &= 1.\end{aligned}$$

Зная фундаментальное решение задачи Коши, получаем выражение для завихренности

$$\Omega(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2t}^3} \int \Omega(\xi, 0) e^{-(|x-\xi|^2)/4t} d\xi.$$

или

$$\begin{aligned}\Omega_z(r, z, t) &= \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-(r^2+z^2)/4t} \int_0^1 \int_0^{+\infty} e^{-(r_1^2+z_1^2)/4t} I_0 \left[\frac{1}{2t} r r_1 \right] \times \\ &\times \left(e^{zz_1/2t} - e^{-zz_1/2t} \right) r_1 dr_1 dz.\end{aligned}$$

Уравнение для завихренности на второй итерации имеет вид

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial t} + v_m \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_m} = \nu \Delta \Omega_i + \Omega_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} - \Omega_i \varphi - \frac{1}{\gamma} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_{kj}} + \Lambda, \quad (3)$$

где Λ — член, содержащий первые и вторые производные вязкости и кинематической вязкости. По нашим оценкам, вклад этого члена несущественен и в расчетах не учитывался.

Согласно начальным условиям, в нулевой момент времени отлична от нуля только компонента Ω_z . Как показывает уравнение (3), при $t > 0$ за счет члена $\Omega_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m}$ на второй итерации появляется компонента Ω_ϕ . Зная значение Ω , вычисляем скорость. Используя численную скорость, ищем температуру и плотность на второй итерации, для этого учитываем нелинейные члены и фундаментальное решение.

Фурье-образы a_{ij} фундаментального решения линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса имеют вид [6]

$$\begin{aligned}a_{j1} &= b_{j1}(k) e^{\sigma_1(k)(t-\tau)}, \\ a_{j2} &= b_{j2}(k) e^{\sigma_2(k)(t-\tau)} \cos(\omega(k)(t-\tau)), \\ a_{j3} &= b_{j3}(k) e^{\sigma_2(k)(t-\tau)} \sin(\omega(k)(t-\tau)), \quad j = 1, 2, 3. \\ 0 &\leq k \leq k_*, \quad k_* \approx 1, \quad \sigma_1(k) < 0, \quad \sigma_2(k) < 0.\end{aligned}$$

Решение при $k > k_*$ не имеет физического смысла.

Кривая $\omega(k)$ имеет две ветви. Мы брали ветвь, соответствующую меньшим значениям коэффициентов затухания σ_1, σ_2 .

В системе, в которой сохранены высшие производные и сами функции, рассмотрим n -ю итерацию, выполним преобразование Фурье и произведем замену функций

$$\tilde{w}' = e^{-ik_j\beta_j}\tilde{w}, \quad \tilde{s}' = e^{-ik_j\beta_j}\tilde{s}, \quad \tilde{h}' = e^{-ik_j\beta_j}\tilde{h},$$

$$\beta_j = \int_0^t v_j(x, \tau) d\tau.$$

При этом конвективные члены выпадают. Далее штрих опускается. Здесь тильда означает Фурье-образ соответствующей функции. Имеем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{w}^{(n)}}{dt} = \tilde{\varphi}^{(n)}, \\ \frac{d\tilde{\varphi}^{(n)}}{dt} = \frac{4}{3}k^2 e^{w^{(n-1)}}(1+h^{(n-1)})^{3/4}\tilde{\varphi}^{(n)} - \\ - \frac{k^2}{\gamma}(1+h^{(n-1)})w^{(n-1)}\frac{1+h}{\gamma}\tilde{w}^{(n)} + (\gamma-1)\tilde{h}^{(n)}, \\ \frac{d\tilde{h}^{(n)}}{dt} = -\frac{\gamma}{\text{Pr}}k^2 e^{w^{(n-1)}}(1+h^{(n-1)})^{3/4}\tilde{h}^{(n)} - \\ - (\gamma-1)(1+h^{(n-1)})\tilde{\varphi}^{(n)}, \\ h^{(n-1)} = h^{(n-1)}(y, t), \quad w^{(n-1)} = w^{(n-1)}(y, t), \end{cases} \quad (4)$$

верхний индекс означает порядок итерации.

Пусть $A_{ij}(\mathbf{y}, t; \mathbf{k}, \tau)$ — фундаментальное решение системы (4). Параметрикс Y_{ij} находим с помощью обратного преобразования Фурье

$$Y_{ij}(x - \xi, t; \xi, \tau) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int e^{ik(x-\xi)} A_{ij}(y, t; k, \tau) dk \Big|_{y=\xi}.$$

Фундаментальное решение $\Gamma_{ij}(x, t; \xi, \tau)$ ищем в виде

$$\Gamma_{ij}(x, t; \xi, \tau) = Y_{ij}(x - \xi, t; \xi, \tau) + \int_0^t d\sigma \int_{R^n} Y_{im}(x - y, t; y, \sigma) F_{mj}(y, \sigma; \xi, \tau) dy.$$

Представим три последних уравнения системы (2) в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a_{ij}^{(0)}(x, t, D_x) u_i + a_{ij}^{(1)}(x, t, D_x) u_i.$$

Здесь $a_{ij}^{(0)}$ — главная часть оператора дифференцирования (соответствует вторым производным по координатам);

$$F_{mj}(y, \sigma; \xi, \tau) = \sum_n K_{mj}^{(n)}(y, \sigma; \xi, \tau),$$

$$\sum_n K_{mj}^{(n)}(y, \sigma; \xi, \tau) = \int_{\tau}^{\sigma} d\psi \int_{R^n} K_{mr}^{(1)}(y, \sigma; \eta, \tau) K_{rj}^{(m-1)}(\eta, \sigma; \xi, \tau) d\eta,$$

$$K_{mj}^{(1)} = K_{mj},$$

$$K_{mj}(y, \sigma; \xi, \tau) =$$

$$= \{a_{mq}^{(0)}(y, \sigma, D_y) - a_{mq}^{(0)}(\xi, \tau, D_y)\} Y_{qj}(y - \xi, \sigma; \xi, \tau) + a_{mq}^{(1)}(y, \sigma, D_y) Y_{qj}(y - \xi, \sigma; \xi, \tau).$$

Основные результаты

При вычислении кратных интегралов использован метод Коробова [7]. Результаты расчетов представлены на рис. 2–8. Видно, что параметры течения осциллируют и затухают со временем.

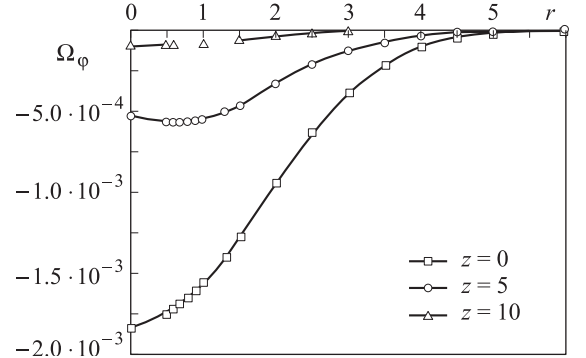


Рис. 2. Зависимость ϕ -компоненты вектора Ω от радиуса

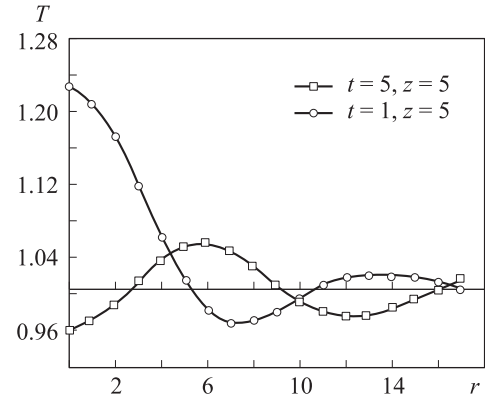


Рис. 3. Зависимость температуры от радиуса при различных значениях времени

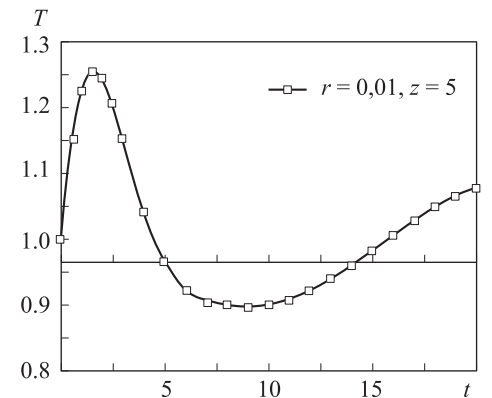


Рис. 4. Зависимость температуры от времени вблизи оси цилиндра

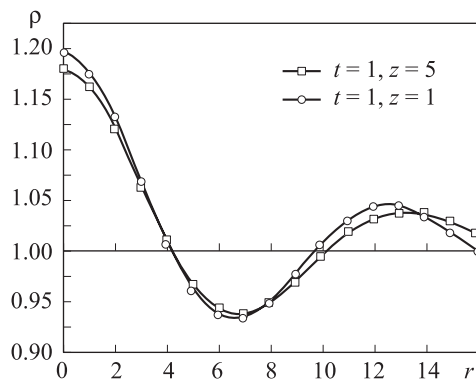


Рис. 5. Зависимость плотности от радиуса при различных значениях координаты z

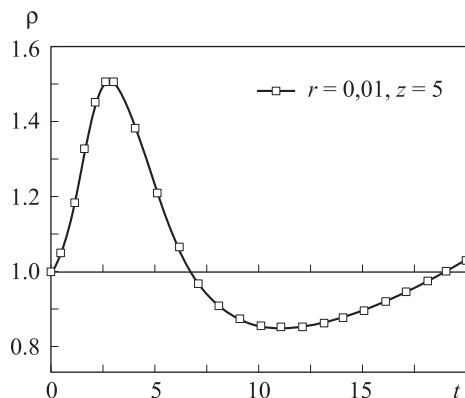


Рис. 6. Зависимость плотности от времени вблизи оси цилиндра

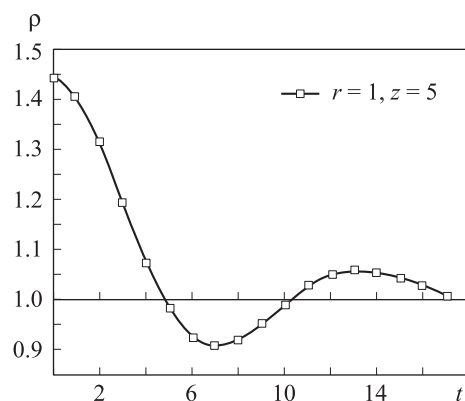


Рис. 7. Зависимость давления от радиуса при фиксированных значениях времени и координаты z

При малых временах параметры (плотность, температура, давление) максимальны вблизи оси, в противоположность стационарному случаю.

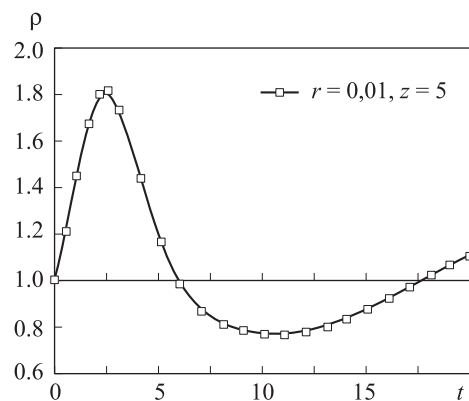


Рис. 8. Зависимость давления от времени вблизи оси цилиндра

Заключение

Исследована эволюция цилиндрического вихря в вязком теплопроводном газе. Получены результаты для температуры, плотности и угловой скорости на второй итерации. Используемая процедура нахождения фундаментального решения уравнений Навье–Стокса показывает, что само это решение имеет осциллирующий характер.

Для линейной параболической системы сходимость итерационной процедуры доказана [5]. В нашем случае нелинейной системы доказать сходимость последовательных итераций затруднительно. Наши оценки показывают, что третья итерация не вносит существенных изменений по сравнению со второй, что позволяет сделать предположение о сходимости итерационной процедуры.

Список литературы

1. Bazant M.Z., Moffatt H.K. // J. Fluid Mech. 2005. N 541. P. 55.
2. Marsden J.E. // Turbulence Seminar, Berkeley. 1977. P. 615.
3. Shugaev F.V., Terentiev E.N. et al. // Proc. SPIE. Optics in Atmospheric Propagation and Adaptive Systems. 2007. N 5983. P. 102.
4. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., 1965.
5. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
6. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М., 1964.
7. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.

Oscillations of the flow parameters in the vicinity of a cylindrical vortex

T. A. Petrova^a, F. V. Shugaev^b

Department of Quantum Statistics and Field Theory, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^atapetrova@phys.msu.ru, ^bshugaev@phys.msu.ru.

In modern literature, the oscillations of parameters are investigated insufficiently, their connection with the fundamental solution of the Navier–Stokes equations isn't shown. Some types of vortex structures in two-dimensional steady incompressible flow described in [1]. In this paper, nonlinear system of the Navier–Stokes equations is used for calculation the unsteady flow around a cylindrical vortex in the gas.

A vortex in a halfspace $z \geq 0$ was considered and shown that the solution is oscillatory. The oscillations of temperature, density and pressure were studied. The distinctive feature of the method is that no finite-difference schemes are used.

Keywords: Navier–Stokes equations, cylindrical vortex, oscillation of parameters.

PACS: 47.10.ad.

Received 1 June 2011.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 1(2012).

Сведения об авторах

1. Петрова Татьяна Андреевна — аспирант; тел.: (495) 939-28-16, e-mail: tatyana.a.petrova@gmail.com.
2. Шугаев Федор Васильевич - докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-28-16, e-mail: shugaev@phys.msu.ru.