

ТЕЧЕНИЯ ЗА ТРОЙНЫМИ ТОЧКАМИ ПРИ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ УДАРНЫХ ВОЛН

1. Аналитические модели нерегулярных взаимодействий и отражений относительно слабых ударных волн в газах и газожидкостных пузырьковых средах [1] описывают как вырожденные режимы (B, B'' с вырождением отражённых ударных волн), так и невырожденные режимы (C, C''), когда отражённые волны ударные. Для невырожденных режимов характерны неклассические условия за тройной точкой A (для частиц, прошедших через падающий AN и отражённый AB фронты и через фронт Маха AS): при равенстве давлений или продольных скоростей $\mu^+ = \mu^-$ имеет место непараллельность потока, характеризующаяся углом $\Delta\delta$ (рис. 1). Этот разрыв в направлении потока связан с разрывом поперечной составляющей скорости v в тройной точке $\Delta\delta \equiv \frac{\text{tg } \Delta\delta}{P_0^{3/2} R_0^{3/2}(\gamma)} = v^+ - v^-$, вычисляется теоретически [2] и подтверждается экспериментальными измерениями [3].

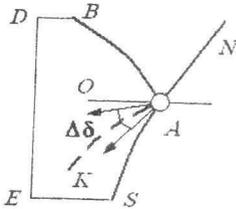


Рис. 1

Целью настоящей статьи является построение в некоторой малой окрестности тройной точки A (в области $ABDESA$) аналитического решения системы уравнений коротких волн (μ, v – компоненты скорости; δ, Y – полярные координаты)

$$2(\mu - \delta)\mu_\delta + v_Y + \mu = 0, \quad \mu_Y = v_\delta, \quad (1)$$

содержащего неклассическую особенность в точке A : $\Delta v_A \neq 0, \Delta \mu_A = 0$.

Для построения решения (1) используется класс точных параметрических решений Заславского – Гриба [4] (q – параметр)

$$\mu = \varphi_2(q)Y^2 + \varphi_1(q)Y + \varphi_0(q),$$

$$\delta = qY^2 + \chi_1(q)Y + \chi_0(q),$$

$$v = \psi_3(q)Y^3 + \psi_2(q)Y^2 + \psi_1(q)Y + \psi_0(q), \quad (2)$$

который позволяет точно удовлетворить условиям динамической совместности на фронтах ударных волн [2]: Маха AS при $q = q_0 = \text{const}$; отражённом AB при $q = q_1 = 1/6$. В дальнейшем эти два решения вблизи фронтов AS, AB считаются известными.

2. Идея построения решения с особенностью в точке A состоит в построении семейства кривых AK , характеризуемых параметром $q_k = q_k(\delta, Y)$, содержащего фронты Маха ($q_k = q_0$) и отражённый ($q_k = q_1 = 1/6$) и переходе от переменных δ, Y к переменным q_k, Y для анализа решений системы уравнений (1) коротких волн. Семейство кривых AK ($q_k = \text{const}$), содержащее фронты AS ($q_k = q_0$), AB ($q_k = 1/6$), имеет вид

$$q_k \equiv F(\delta, Y) = \frac{\delta - \delta_A + q_0(Y - Y_A)d_1}{Y^2 - Y_A^2 + (Y - Y_A)d_1}, \quad d_1 = \frac{\chi_1(1/6, \alpha^\nu, \eta)}{1/6 - q_0}. \quad (3)$$

Здесь в общем случае нерегулярных взаимодействий 2-х ударных волн α^ν, η – параметры подобия задачи [1]. Анализ (3) показывает, что параметр q_k имеет особенность при подходе AK к оси OA (для области BAO : $1/6 \geq q_k > -\infty$; для области SAO : $q_0 \leq q_k < \infty$). Эта особенность исключается введением нового параметра

$$p = \frac{(q_0 - 1/6) \cdot (1 - 6F(\delta, Y))}{(7 - 6F(\delta, Y)) \cdot (q_0 - 1/6) + 1 - 6F(\delta, Y)}, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad (4)$$

принимаяющего значение 0 на AB ; 1 – на AS ; $p = p_0$ на AO .

Решая (4) относительно $F(\delta, Y)$, получим

$$F(\delta, Y) \equiv F(p) = \frac{m_1 p - m_0}{m_2 p - m_0}, \quad p_0 = \frac{m_0}{m_0 + 1};$$

$$m_0 = q_0 - 1/6; \quad m_1 = 6q_0 + m_0; \quad m_2 = 6m_0 + 6. \quad (5)$$

Окончательно семейство кривых AK в плоскости δ, Y получим из (2), (3) в виде

$$\delta - \delta_A = k_1(Y - Y_A) + [Y^2 - Y_A^2 - k_3(Y - Y_A)] \cdot F(p), \quad 0 \leq p \leq 1;$$

$$k_1 = q_0 k_3; \quad k_3 = \frac{\chi_1}{m_0}; \quad F(p) = \frac{p_0^2}{p - p_0} + p_0 + \frac{1}{6}. \quad (6)$$

3. Перейдём в системе уравнений (1) коротких волн от переменных δ, Y к переменным p, Y , используя (4) ($M(p, Y)$ – регулярная, ограниченная функция)

$$2(\mu - \delta)\mu_p p_\delta + \nu_Y + \nu_p p_Y + \mu = 0; \quad \nu_p p_\delta = \mu_Y + \mu_p p_Y;$$

$$p_\delta = -\frac{(p - p_0)^2}{p_0(Y + Y_A - k_3)} \cdot \frac{1}{Y - Y_A}; \quad p_Y = -\frac{(p - p_0)^2 M(p, Y)}{p_0^2(Y + Y_A - k_3)^2} \cdot \frac{1}{Y - Y_A}. \quad (7)$$

Анализ (7) показывает, что вблизи точки A на фронтах AS ($p = 1$), AB ($p = 0$) $p_\delta, p_Y \sim 0 \left(\frac{1}{Y - Y_A} \right)$, и на фронтах AS, AB в точке A имеются условия

$$\mu_p(1, Y_A) = 0, \quad v_p(1, Y_A) = 0, \quad \mu_p(0, Y_A) = 0, \quad v_p(0, Y_A) = 0. \quad (8)$$

В средней части течения при $|p - p_0| \ll 1$, $|Y - Y_A| \ll 1$, вблизи OA имеем согласно (7) для старших членов уравнения

$$v_Y + \mu = 0; \quad \mu_Y = 0. \quad (9)$$

4. Решение для области OAB ($0 \leq p \leq p_0$) ищем в виде

$$v(p, Y) = a_0(Y) + a_1(Y)p, \quad \mu(p, Y) = b_0(Y) + b_1(Y)p. \quad (10)$$

На фронте AB ($p = 0$) имеем согласно (2), (8)

$$a_0(Y) = v(1/6, Y); \quad b_0(Y) = \mu(1/6, Y); \quad (11)$$

$$a_1(Y_A) = 0; \quad b_1(Y_A) = 0. \quad (12)$$

На OA ($p = p_0, Y = Y_A$) имеем

$$v(p_0, Y_A) = v_A^+, \quad \mu(p_0, Y_A) = \mu_A. \quad (13)$$

Решения уравнений (9) вида (10), удовлетворяющие условиям (12), имеют вид

$$b_1(Y) = \frac{1}{p_0} [\mu_A - \mu(1/6, Y)]; \quad a_1(Y) = \frac{1}{p_0} [v_A^+ - v(1/6, Y) + \mu_A(Y_A - Y)]. \quad (14)$$

Здесь $v(1/6, Y)$, $\mu(1/6, Y)$ известны согласно (2).

5. Решение для области SAO ($p_0 \leq p \leq 1$) ищем в виде

$$v(p, Y) = c_0(Y) + c_1(Y)p + c_2(Y)p^2, \quad \mu(p, Y) = d_0(Y) + d_1(Y)p. \quad (15)$$

На фронте SA ($p = 1$) имеем согласно (2), (8)

$$c_0(Y) + c_1(Y) + c_2(Y) = v(q_0, Y), \quad d_0(Y) + d_1(Y) = \mu(q_0, Y), \quad (16)$$

$$c_1(Y_A) + 2c_2(Y_A) = 0, \quad d_1(Y_A) = 0. \quad (17)$$

На OA ($p = p_0, Y = Y_A$) имеем

$$c_0(Y_A) + c_1(Y_A)p_0 + c_2(Y_A)p_0^2 = v_A^+, \quad d_0(Y_A) + d_1(Y_A)p_0 = \mu_A. \quad (18)$$

Совместный анализ (16) при $Y = Y_A$, (17), (18) даёт значения

$$d_0(Y_A) = \mu_A; \quad d_1(Y_A) = 0;$$

$$c_0(Y_A) = v_A^- + \frac{\Delta v}{(1 - p_0)^2}; \quad c_1(Y_A) = -\frac{2\Delta v}{(1 - p_0)^2}; \quad c_2(Y_A) = \frac{\Delta v}{(1 - p_0)^2}. \quad (19)$$

Решения уравнений (9) вида (15), удовлетворяющие условиям (19) и условиям (16), позволяют получить выражения

$$d_0(Y) = \frac{1}{p - p_0} [\mu_A - p_0 \mu(q_0, Y)]; \quad d_1(Y) = \frac{1}{p - p_0} [\mu(q_0, Y) - \mu_A];$$

$$c_0(Y) = \frac{p_0 \Delta v}{(1 - p_0)^2} - \frac{1}{1 - p_0} [p_0 v(q_0, Y) - v_A^+ + \mu_A(Y - Y_A)];$$

$$c_1(Y) = \frac{1}{(1 - p_0)} [v(q_0, Y) - v_A^+ + \mu_A(Y - Y_A)] - \frac{(1 + p_0) \Delta v}{(1 - p_0)^2}; \quad c_2(Y) = \frac{\Delta v}{(1 - p_0)^2}. \quad (20)$$

Здесь $v(q_0, Y)$, $\mu(q_0, Y)$ известны согласно (2).

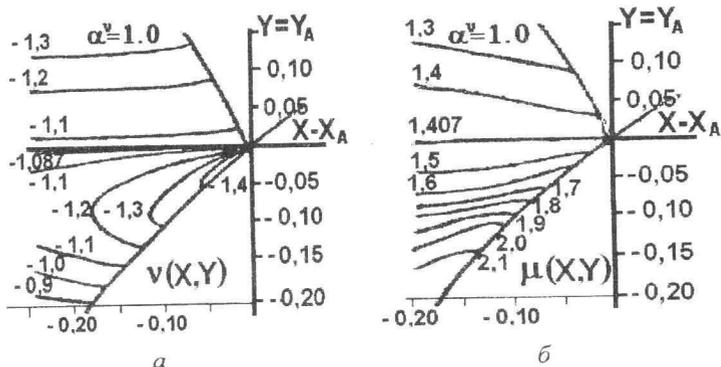


Рис. 2

6. Анализ решения. Линии равных значений скорости (давления, $\mu = P^{(1)}$) $v(X, Y) = \text{const}$; $\mu(X, Y) = \text{const}$ ($\delta = X + 0,5Y^2$) удобно строить параметрически, решая совместно (10), (11), (14), (6) и (15), (20), (6). Можно, однако, построить изолинии v , μ явно, выражая p из (6) и подставляя в (10), (15).

На рис. 2 (а, б) построены поля скоростей $v(X, Y) = \text{const}$, $\mu(X, Y) = \text{const}$ при невырожденном нерегулярном отражении ($\eta = 1$) при $\alpha^v = 1,0$. Обращает внимание горизонтальное поведение линий вблизи оси $Y = Y_A$. Эта особенность вблизи точки A отмечалась ранее при численном решении задачи. Все линии $v(X, Y) = \text{const}$ в диапазоне $v^- \leq v \leq v^+$ образуют пучок кривых, выходящих из точки A в нижней области SAO и заканчивающихся на фронте Маха SA . Решение (15), (20) для нижней области SAO при подходе к точке A имеет особенность ($p_0 \leq p \leq 1$)

$$\bar{v} \equiv \frac{v(p, Y_A) - v_A^-}{\Delta v} = \left(\frac{1-p}{1-p_0} \right)^2; \quad v'_p(p, Y_A) = -\frac{2\Delta v(1-p)}{(1-p_0)^2}. \quad (21)$$

На рис. 3 изображено предельное распределение (21) приведённой скорости \bar{v} в тройной точке A при подходе по различным кривым семейства АК ($p = \text{const}$) для невырожденного нерегулярного отражения ($\eta = 1$) при $\alpha^v = 1,0$. При изменении параметра подобия α^v ($\alpha^v = \text{tg}\alpha / \varepsilon_{10}^{1/2} L_0^{1/2}$) в диапазоне $0,5 \leq \alpha^v \leq 2,0$ [1] величина $1 - p_0$ изменяется в диапазоне $\frac{6}{11} \geq 1 - p_0 \geq 0$. При $\alpha^v \rightarrow 0,5$ разрыв поперечной скорости исчезает ($\Delta v \rightarrow 0$).

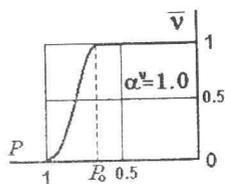


Рис. 3

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндятин Г. П. Маховское отражение и взаимодействие слабых ударных волн в условиях парадокса Неймана // Изв. РАН. МГЖ. 1996. №2. С. 183 – 190.
2. Шиндятин Г. П., Гамаюнова Е. Н. Аналитическое исследование общего случая нерегулярного взаимодействия и отражения ударных волн // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 225 – 229.
3. Adachi T., Suzuki T., Kobayashi S. Mach Reflection of a Weak shock wave // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. B. 1994. Vol. 60, № 575. P. 2281 – 2296.
4. Заславский Б. И. Некоторые частные решения уравнений коротких волн // ПМТФ. 1962. № 1. С. 63 – 69.