УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЦАГИ

Том XVII *1986* *№ 6*

УДК 629.7.015.4 : 533.6.013.43 : 629.7.023.2

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛОК СО СТУПЕНЧАТЫМИ ЭПЮРАМИ МАССОВЫХ И ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Я. М. Пархомовский

Установлены некоторые особенности крутильных колебаний балок с резкими перепадами крутильной жесткости и погонного массового момента инерции. Дано сравнение собственных характеристик (частот и форм собственных колебаний) ступенчатой балки и балки, несущей сосредоточенный жестко прикрепленный груз. Рассмотрено влияние на собственные характеристики резкого местного перепада жесткости.

В реальных конструкциях часты случаи, когда на сравнительно небольших их участках имеет место резкий перепад эпюр массовых и жесткостных характеристик. Они имеют разрывы первого рода — меняются ступенями. Перепады массовых характеристик обусловлены наличием жестко подвешенных грузов, перепады жесткостных — вырезами или трещинами и повреждениями, возникшими в процессе эксплуатации.

Ниже на примере крутильных колебаний балки рассмотрены те особенности, которыми отличаются колебания «ступенчатых» балок от колебаний балок с непрерывным распределением характеристик. Крутильные колебания выбраны потому, что перепады массовых моментов инерции достигают порою двух-трех порядков.

Для выявления этих особенностей достаточно ограничиться случаем одноступенчатой балки — когда имеется один разрыв (ступенька). Если перепад характеристик значителен, то вместо ступенчатой балки используют другую расчетную модель — «сосредоточенно-распределенную». Полагают, что если на малом участке длины имеется перепад массовых характеристик, то его можно заменить сосредоточенным массовым фактором — диском, если же наблюдается резкий локальный перепад жесткостей, то — пружиной. Иными словами, флуктуации распределенных характеристик балки, так сказать, изымаются из уравнения и включаются в краевые условия. (По существу, здесь в первом случае полагают абсолютно жестким участок балки, на котором имеет место флуктуация массы, во-втором — полагают безынертным участок балки, где происходит резкое падение жесткости).

Такая модель интуитивно представляется очевидной. Мы попытаемся установить границы ее применимости.

1. Пусть массовые и жесткостные характеристики балки заданы:

$$J=\begin{cases}J_1,\\ J_2,\end{cases}\quad C=\begin{cases}C_1,\ 0\leqslant x\leqslant l_1;\\ C_2,\ l_1\leqslant x\leqslant l.\end{cases} \tag{1}$$

Здесь J — массовый момент инерции единицы длины балки, C — жесткость на кручение. Ниже мы всегда будем считать $J_2\geqslant J_1$, $C_2\geqslant C_1$. Абсциссу x отсчитывают от места заделки балки.

Крутильные колебания такой балки описываются [1, 2] уравнениями

$$C_r\frac{\partial^2\vartheta_r}{\partial x^2}=J_r\frac{\partial^2\vartheta_r}{\partial t^2},\quad r=1,\ 2, \tag{2}$$

где θ — угол закручивания:

$$\vartheta=\begin{cases}\vartheta_1,\ 0\leqslant x\leqslant l_1,\\ \vartheta_2,\ l_1\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

Система краевых условий состоит из условий:

а) на закрепленном и свободном концах

$$\vartheta_1(0)=0,\ \left.\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}\right|_{x=l}=0, \tag{3}$$

б) на стыке

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta_1(l_1-0)=\vartheta_2(l_1+0);\\ &C_1\left.\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x}\right|_{x=l_1-0}=C_2\left.\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}\right|_{x=l_1+0}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Условия (4) выражают собой непрерывность углов закручивания и крутящего момента.

Если как обычно, искать

$$\vartheta_r(x,\ t)=\varphi_r(x)e^{i\lambda t},\quad r=1,\ 2, \tag{5}$$

где λ — собственная частота, то для формы колебаний $\varphi_r(x)$ получаем следующие удовлетворяющие условиям (3) выражения:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1(x)=A_1\sin k_1\lambda x,\quad 0\leqslant x\leqslant l_1;\\ &\varphi_2(x)=A_2\cos k_2\lambda(l-x),\ l_1\leqslant x\leqslant l,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где

$$k_r=\sqrt{\frac{J_r}{C_r}},\quad r=1,\ 2. \tag{7}$$

Собственные значения λ и отношение постоянных A_1/A_2 находим из условий (4). Из них следует, что λ — корни уравнения

$$\sin\mu\sin\alpha\mu-\frac{1}{\beta}\cos\mu\cos\alpha\mu=0 \tag{8}$$

или

$$\operatorname{tg}\mu\operatorname{tg}\alpha\mu=\frac{1}{\beta}. \tag{8 а}$$

Здесь

$$\mu=k_1l_1\lambda;\quad \alpha=\sqrt{\frac{J_2C_1l_2^2}{J_1C_2l_1^2}};\quad \beta=\sqrt{\frac{J_2C_2}{J_1C_1}};\quad l_2=l-l_1. \tag{9}$$

Отношение же A_1/A_2 равно

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{\cos\alpha\mu_n}{\sin\mu_n}, \tag{10}$$

где μ_n — n-й корень уравнения (8). Полагаем $A_2=1$. Тогда форма колебаний n-го тона будет

$$\varphi_n(\xi)=\left|\begin{array}{ll}\dfrac{\cos\alpha\mu_n}{\sin\mu_n}\sin\left(1+\dfrac{l_2}{l_1}\right)\mu_n\xi, & 0\leqslant\xi\leqslant\dfrac{l_1}{l_1+l_2};\\ \cos\alpha\mu_n\left(1+\dfrac{l_1}{l_2}\right)(1-\xi), & \dfrac{l_1}{l_1+l_2}\leqslant\xi\leqslant 1,\end{array}\right. \tag{11}$$

где $\xi=x/l$.

Уравнение (8) можно записать и в другом виде:

$$F(\mu)=\frac{\cos(1-\alpha)\mu}{\cos(1+\alpha)\mu}=\frac{\beta+1}{\beta-1}. \tag{12}$$

Левая часть $F(\mu)$ для $F(\mu)>0$ уравнения (12) для нескольких значений α дана на рис. 1.

Поведение корней уравнения (8) или (12) определяется двумя параметрами. Один из них — α, есть не что иное, как отношение частот ω_r каждого из элементов ступенчатой балки

$$\alpha=\omega_1/\omega_2, \tag{13}$$

где

$$\omega_r=K_r\sqrt{\frac{C_r}{J_r l_r^2}}, \quad r=1,\ 2.$$

Второй — β характеризует отношение массовых и жесткостных характеристик этих элементов. Чем больше β отличается от 1, тем больше перепад характеристик ($\beta=1$ соответствует «гладкая» в динамическом отношении балка).

Иногда вместо α и β будут использоваться другие параметры γ и δ, связанные с первыми соотношениями:

$$\gamma=\alpha\beta=\frac{J_2 l_2}{J_1 l_1}, \quad \delta=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{C_2 l_1}{C_1 l_2}. \tag{14}$$

2. Перейдем теперь к рассмотрению уравнений (8) или (12), дающих значения собственных частот μ*.

Нас будут интересовать, главным образом, случаи, когда $\beta\gg 1$. Они-то и характерны для крыльев, несущих сосредоточенные грузы. Для них, кроме того, $l_2/l_1\ll 1$. Здесь можно указать приближенные формулы для низших корней (8) или (12).

При $\beta\gg 1$ низший корень уравнения (12) $\mu_1\ll 1$. Для него с точностью до $O(\mu^4)$ имеет место формула

$$\mu_1\approx\sqrt{\frac{2}{1+2\gamma+\alpha^2}}. \tag{15}$$

---

* Величины μ и λ [см. (9)] пропорциональны. В тех случаях, когда это не вызывает недоразумений, мы не будем их различать.

(Её можно получить, если в (12) заменить $\cos(1 \pm \alpha)\mu \approx 1 - (1 \pm \alpha)^2 \frac{\mu^2}{2}$ и представить его в виде

$$1 - (1 - \alpha)^2 \frac{\mu^2}{2} = B\left[1 - \frac{(1+\alpha)^2}{2}\mu^2\right],$$

где $B = \frac{\beta + 1}{\beta - 1}$).

Далее, из (8а) следует, что при малых значениях α ($\alpha \ll 1$) главным при определении второго и третьего корней уравнения является множитель $\operatorname{tg}\mu$. Заменяя поэтому в (8а) $\operatorname{tg}\alpha\mu \approx \alpha\mu$, получаем, что с точностью до $(\alpha\mu)^3$ эти корни совпадают с корнями уравнения

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\alpha\beta}\frac{1}{\mu}, \tag{16}$$

приближенные значения которых при $\alpha \ll 1$ будут

$$\mu_{n+1} \approx n\pi + \frac{1}{n\pi\gamma\left[1 + (\gamma n^2\pi^2)^{-1}\right]}, \quad n = 1, 2. \tag{16 а}$$

Если же $\alpha \gg 1$, то следующие за μ_1 корни (8а) определяются, главным образом, уже множителем $\operatorname{tg}\alpha\mu$. Полагая $\operatorname{tg}\mu \approx \mu$, получаем, что корни μ_2 и μ_3 совпадают с корнями уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha\mu = \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\alpha\mu}, \tag{17}$$

приближенные значения которых при $\alpha \gg 1$

$$\mu_{n+1} \approx \frac{1}{\alpha}\left[n\pi + \frac{1}{n\pi\delta\left[1 + (\delta n^2\pi^2)^{-1}\right]}\right], \quad n = 1, 2. \tag{17 а}$$

Совокупность формул (15)—(17) позволяет (и притом с достаточной точностью) исследовать влияние параметров ступенчатой балки на собственные частоты. (Заметим, что аналогичного типа формулы можно получить и для других — промежуточных — областей параметра α.)

Можно заметить далее, что при $\beta \gg 1$, когда значения параметра α близки к $1, 2, \ldots$, две следующие друг за другом собственные частоты близки между собой. При $\alpha \approx 1$ достаточно близки между собой значения μ_2 и μ_3 (см., например, точки пересечения кривой $\alpha = 0{,}99$ с прямой $(\beta+1)/(\beta-1)$ при $\beta = 30$ на рис. 1). При $\alpha \approx 2$ близки значения μ_3 и μ_4 (см. кривую $\alpha = 2{,}01$ на рис. 1) и т. д. К примеру, при $\alpha = 1 - s$, где $s \ll 1$.

$$\mu_3 - \mu_2 \approx \frac{1}{\beta}\sqrt{4\beta + [\pi s(\beta+1)]^2}.$$

Наличие близких частот — одна из важных особенностей систем с резкими перепадами характеристик.

Приведем теперь некоторые результаты расчетов. Конечно, априори ясно, что с ростом J_2/J_1 (при фиксированных значения l_1/l_2 и C_1/C_2) собственные частоты будут падать. Менее очевидно другое: величина μ_1 определяется, в основном, только одним параметром — γ, т. е. только отношением массовых моментов инерции ступеньки и балки (см. рис. 2, *а*, на котором при $C_1/C_2 = 1$ даны (пунктиром) кривые $\mu_1 = f(\sqrt{\gamma})$ для разных значений δ). Но уже для μ_2 область автомодельности по δ имеет место лишь для сравнительно небольших значений γ (сплошные кривые на рис. 2, *а*)

При вариации J_2/J_1 изменяются и «относительные расстояния» $\Delta\mu_{k,\,k+1}$ между двумя соседними частотами:

$$\Delta\mu_{k,\,k+1} = \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{\mu_k}.$$

На рис. 2, *б* и 2, *в* приведены графики $\Delta\mu_{12} = f(\beta)$ и $\Delta\mu_{23} = f(\beta)$ для $C_1/C_2 = 1$ и $l_2/l_1 = \frac{1}{19}, \frac{1}{9}$. (По оси абсцисс нанесены также значения α).

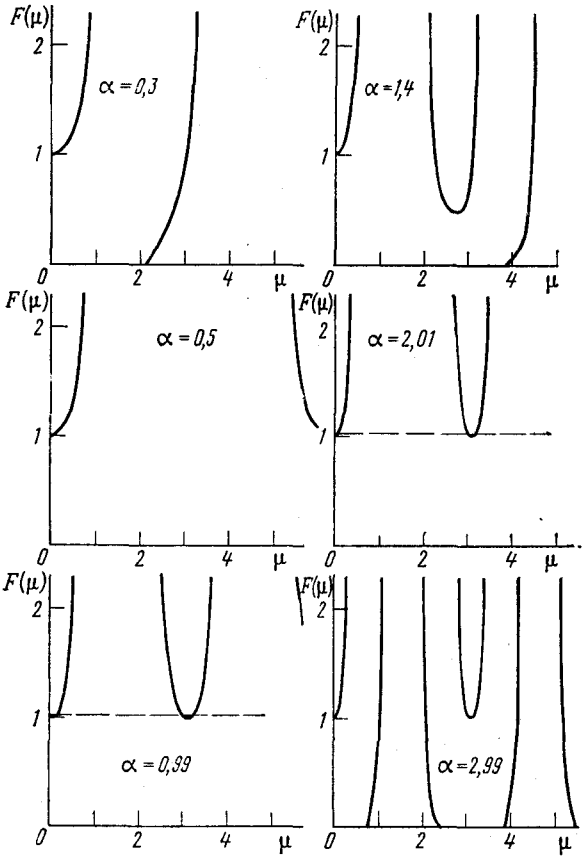


Рис. 1

Из графика для μ_{12} следует, что по мере увеличения β (т. е. J_2/J_1) значение $\Delta\mu_{12}$ возрастает — раздвигаются частоты первого и второго тонов колебаний. По-другому ведет себя $\Delta\mu_{23}$. Сперва это отношение увеличивается, и при некотором значении β становится максимальным. Затем при дальнейшем увеличении β оно начинает уменьшаться и достигает минимума при $\alpha \approx 1$. В этой области, как уже указывалось, частоты второго и третьего тонов колебаний близки между собой. В последующем увеличение β снова приводит к увеличению $\Delta\mu_{23}$.

Из формул (15) и (17а) следует, что $\Delta\mu_{12}$ и $\Delta\mu_{23}$ с ростом β (или, что то же, α) асимптотически стремятся первая — к величине π/δ, вторая — к единице.

Представление о том, как изменяются формы собственных колебаний $\varphi_n(\xi)$ при изменении J_2/J_1 или $C_1/C_2 = 1$ и $\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{9}$ дает рис. 3.

Там же для сравнения (пунктиром) нанесены формы колебаний балки постоянного сечения.

Можно видеть, что:

а) увеличение J_1/J_2 приводит к «выпрямлению» кривой $\varphi_1(\xi)$ на участке $0 \leqslant \xi \leqslant 0{,}9$. При $J_2/J_1 > 20$ форма $\varphi_1(\xi)$ практически остается неизменной;

б) при увеличении J_1/J_2 узел формы колебаний второго тона $\varphi_2(\xi)$ монотонно смещается вправо — к ступеньке, и начиная с некоторого

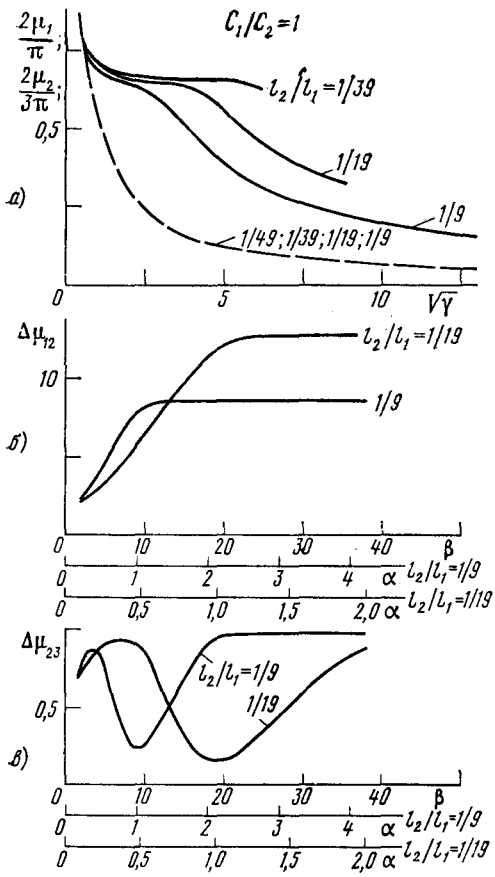


Рис. 2

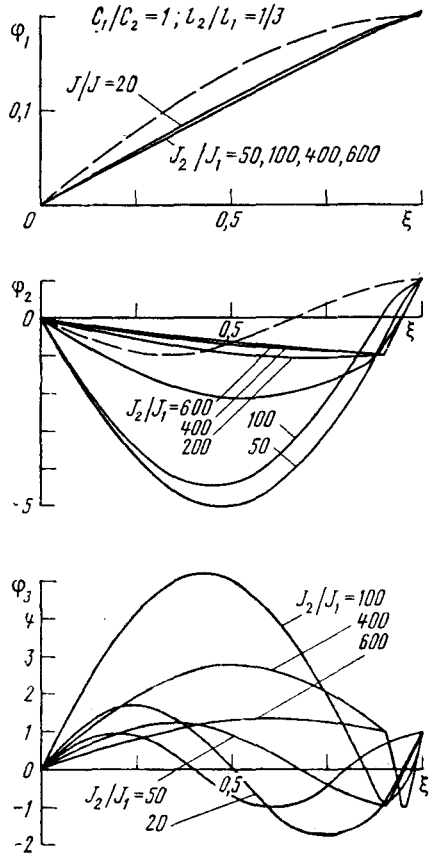


Рис. 3

его отношения положение узла почти не меняется. Он находится на ступеньке, а форма колебаний близка к ломаной линии, вершина которой — в месте стыка балки и ступеньки;

в) с увеличением J_2/J_1 оба узла формы колебаний $\varphi_3(\xi)$ смещаются вправо. При этом внутренний узел перманентно приближается к внешнему. Начиная с некоторого значения J_2/J_1 оба узла размещаются на ступеньке и их абсциссы практически не изменяются.

Отметим в заключение еще одну особенность крутильных колебаний ступенчатых балок. При некоторых значениях α выделяется группа корней уравнения (8) — собственных частот, **не зависящих от параметра** β.

Именно:

а) если $\alpha = \frac{2m_0 - 1}{2n_0}$, где m_0 и n_0 — натуральные числа, то корнями уравнения (8) будут значения

$$\mu_m = \frac{2m - 1}{2m_0 - 1} n_0 \pi, \tag{18}$$

при этом m — такие числа, при которых $(2m - 1)\ n_0$ кратны $2m_0 - 1$.

При этих μ_m один из узлов форм собственных колебаний находится в месте стыка балки и ступеньки. Единая система при μ_m, определяемых по (18), как бы разбивается на две самостоятельные изолированные;

б) если же $\alpha = \frac{2n_0}{2m_0 - 1}$, то также имеется совокупность корней уравнения (8), не зависящих от β. Это числа

$$\mu_n = \frac{(2m_0 - 1)n}{2n_0} \pi, \tag{19}$$

где n — такие натуральные числа, при которых частное $\frac{(2m_0 - 1)n}{2n_0}$ — нечетное число. При $\mu = \mu_n$ обращаются в нуль $\cos \mu_n$ и $\sin \alpha\mu_n$ и, следовательно, в месте стыка равен нулю крутящий момент. (Единая колебательная система снова как бы разбивается на две изолированные.)*

Собственные значения, определяемые формулой (18) или (19), соответствуют высшим тонам колебаний ступенчатых балок.

3. Сравним теперь собственные характеристики ступенчатой балки с ее моделью — балкой, несущей на свободном конце сосредоточенный диск, массовый момент инерции I которого равен массовому моменту инерции ступеньки $I = J_2 l_2$ (у которых, следовательно, совпадают значения γ).

Собственные характеристики такой балки (см., например, [3, 4]) $\lambda_ж$, $\widetilde{\varphi}_n(\xi)$ даются формулами:

$$\lambda_ж = k_1 l_1 \mu_ж, \quad \widetilde{\varphi}_n(\xi) = \frac{\sin \mu_n \xi}{\sin \mu_ж}, \quad \xi = \frac{x}{l_1},$$

где $\mu_ж$ — корни уравнения

$$\operatorname{tg} \mu_ж = \frac{1}{\gamma \mu_ж}. \tag{20}$$

При больших значениях γ низший корень уравнения (20) можно получить из (15), полагая там $\alpha = 0$. Это дает для $\mu_{ж1}$ выражение

$$\mu_{ж1} \approx \sqrt{\frac{2}{1 + 2\gamma}} \approx \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{4\gamma}\right).$$

Величина $\mu_{ж1}$ несколько превышает μ_1. При малых значениях α (обычно имеющих место)

$$\mu_1 \approx \mu_{ж1} \left[1 - \frac{\alpha^2}{2(1 + 2\gamma)}\right]$$

* Конечно, при α, определяемых по (18) или (19), сверх указанных выше значений μ_m или μ_n имеются и другие, уже зависящие от β.

и, следовательно, первый тон колебаний распределенной системы хорошо воспроизводится ее моделью—системой распределенно-сосредоточенной.

Ситуация становится иной, если сравнивать μ_2 и $\mu_{ж\,2}$. Они будут близки между собой (при $\beta \gg 1$) только до тех пор, пока $\alpha \ll 1$. Это следует из того, что при $\alpha \ll 1$ уравнение (16), дающее приближенные значения частоты μ_2 ступенчатой балки, совпадает с уравнением (20). По мере возрастания α значения μ_2 и $\mu_{ж\,2}$ будут все больше отличаться друг от друга. Если же $\alpha \gg 1$, то, сравнивая выражения (17а) и (16а), замечаем, что отношение $\mu_2/\mu_{ж\,2}$ может заметно отличаться от единицы и при больших α оно примерно равно α^{-1}.

На рис. 4 даны графики отношений $\mu_2/\mu_{ж\,2} = f(\sqrt{\gamma})$ при $C_1/C_2 = 1$ для $l_2/l_1 = 1/19$ и $l_2/l_1 = 1/9$. Там же для нескольких J_2/J_1 даны формы

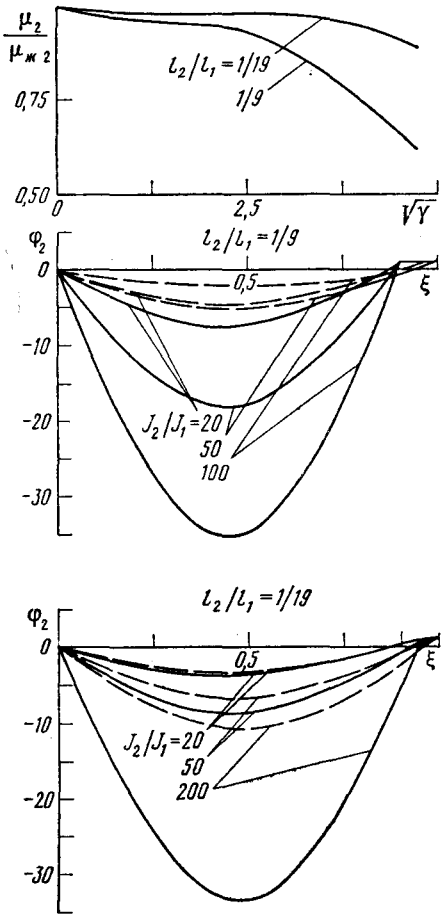


Рис. 4

$\varphi_2(\xi)$ исходной системы (пунктиром) и ее модели — балки с диском на конце. Видно, что обе системы близки по частоте и форме колебаний лишь при относительно малых величинах γ. Чем больше величина γ, тем больше (и особенно по форме колебаний) модель отличается от ступенчатой балки.

4. Рассмотрим теперь, как изменяет собственные характеристики резкий (в два-три раза) перепад жесткостных характеристик, если он

локальный, т. е. имеет место на относительно малой длине. Полагаем, что такое падение происходит вблизи заделки балки там, где влияние это может быть наиболее существенным.

Будем различать два случая.

Первый — падение жесткости не сопровождается изменением массовых характеристик. Это, так сказать, модель «повреждения» или «трещины» силового элемента.

Если $l_2/l_1 \gg 1$, т. е. «трещина» не слишком велика и перепад жесткости C_2/C_1 умеренный, то величины β сравнимы по порядку с единицей, а $\alpha \gg 1$. В этом случае имеет место приближенная формула

$$\mu_n \approx \frac{(2n-1)\pi}{2(1+\alpha)}\left[1 - \frac{\beta - 1}{(1+\alpha)\left[1 + \frac{\beta-1}{1+\alpha}\left(1 + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{2\alpha(1+\alpha)}\right)\right]}\right], \quad n = 1, 2. \qquad (21)$$

При выводе (21) предполагалось, что $1+\alpha \geqslant 3\pi$, при этом формула (21) в достаточно широком диапазоне параметров α и β дает μ_2 с точностью до 1%, а погрешность в величине μ_1 не превышает 0,5%. [К (21) приходят, если представить (8) в виде $\delta \sin\alpha \sin\alpha\mu = \cos(1+\alpha)\mu$, где $\delta = \beta - 1 < 1$, и теперь μ_n искать с точностью до ε^2 в виде

$$\mu_n = \frac{1}{1+\alpha}\left(\frac{2n-1}{2}\pi + \varepsilon_n\right),$$

используя при этом то, что $\alpha \gg 1$].

Вместо μ_n удобнее рассматривать величины

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{2\mu_n}{(2n-1)\pi}\alpha\frac{l_1 + l_2}{l_2}, \quad n = 1, 2, \qquad (22)$$

где $\tilde{\lambda}_n$ есть не что иное как отношение соответствующих собственных частот балки с перепадами характеристик и балки с постоянными параметрами — «неповрежденной». Влияние перепада жесткости характеризуется уклонением $\tilde{\lambda}_n$ от единицы.

В таблице даны с четырьмя значащими цифрами значения $\tilde{\lambda}_n$ для нескольких значений C_1/C_2 и l_1/l_2 для «трещины» и для «выреза»

C_1/C_2	„Трещина", $J_2/J_1 = 1$				„Вырез", $J_2/J_1 = 3$			
	$l_1/l_2 = 1/19$		$l_1/l_2 = 1/9$		$l_2/l_1 = 2{,}5$		$l_2/l_1 = 3$	
	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$	$\tilde{\lambda}_1$	$\tilde{\lambda}_2$
2/3	0,9757	0,9765	0,9531	0,9584	0,9024	1,0250	0,9086	1,003
	0,9757	0,9758	0,9528	0,9555	0,9133	1,0180	0,9159	1,003
1/2	0,9527	0,9552	0,9113	0,9259	0,8209	0,9951	0,8324	0,9717
	0,9526	0,9558	0,9109	0,9215	0,8450	0,9837	0,8476	0,9713
1/3	0,9103	0,9190	0,8402	0,8786	0,7068	0,9613	0,7230	0,9361
	0,9104	0,9189	0,8410	0,8758	0,7496	0,9352	0,7638	0,9291
1/5	0,8381	0,8667	0,7382	0,8258	0,5730	0,9298	0,5910	0,9034
	0,8395	0,8713	0,7429	0,8260	0,6638	0,8693	0,6654	0,8721

при $J_2/J_1=3$. В каждой ячейке верхние цифры — корни уравнения (8), нижние — приближенные, определенные по (22).

Из таблицы можно усмотреть, что даже при очень «глубокой» и «развитой» трещине ($C_1/C_2=0{,}2$, $l_1/l_2=1/9$) приближенные и точные значения $\tilde{\lambda}_n$ разнятся на десятые доли процента. Из этого вытекает весьма важный факт: резкое (даже в два-три раза) местное падение жесткостных характеристик балки практически не изменяет ее собственных частот колебаний. Даже если на 5% длины балки жесткость упа-

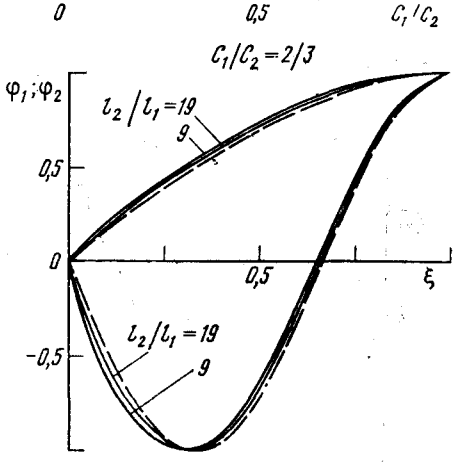


Рис. 5

дет в два раза, то вследствие этого частота колебаний уменьшится всего на 5%. Если же «трещина» занимает 2% длины балки, то для того чтобы частота крутильных колебаний уменьшилась на 5%, необходимо, чтобы жесткость «поврежденного» места уменьшилась примерно в четыре раза.

Отметим также, что частота второго тона колебаний $\tilde{\lambda}_2$ при «трещине» уменьшается еще меньше, чем частота первого тона.

На рис. 5 для нескольких значений l_1/l_2 приведены графики $\tilde{\lambda}_n=f(C_1/C_2)$. Там же приведены графики форм первых двух тонов колебаний для «протяженной» трещины и (пунктиром) формы колебаний «гладкой» балки. Они также мало отличаются друг от друга.

В отличие от характеристик статической прочности, являющихся дифференциальными, частоты собственных колебаний (в том числе и крутильные) — характеристики интегральные и вследствие этого «грубые». Поэтому на величине их, в частности, всегда будет мало сказываться резкое локальное изменение эпюры жесткостей. Собственная частота — недостаточно чувствительный индикатор для обнаружения столь тонкого обстоятельства, как появление трещины. Заметно уменьшаются собственные частоты в тех случаях, когда нарушение жесткости весьма велико.

Заметим, что проводившиеся еще в 1941 г. частотные испытания поврежденных крыльев показали, что локальные повреждения силовых элементов, сколь бы значительными они ни были, не приводят к заметному изменению собственных частот крыльев. Различие подчас лежало в пределах точности измерений.

Второй случай — когда на балке одновременно резко уменьшаются и притом на относительно большом участке как ее жесткость на кручение C_1, так и массовый момент инерции J_1. Это — модель «выреза».

Влияние C_1 и J_1 на λ противоположно. Уменьшение C_1 приводит к уменьшению собственных частот, уменьшение же J_1 их, напротив, увеличивает. Поэтому при «вырезе» величины λ могут либо немного уменьшиться (по сравнению с балкой без выреза), либо даже возрасти (см. таблицу). Во всяком случае, здесь λ можно изменять в нужном направлении.

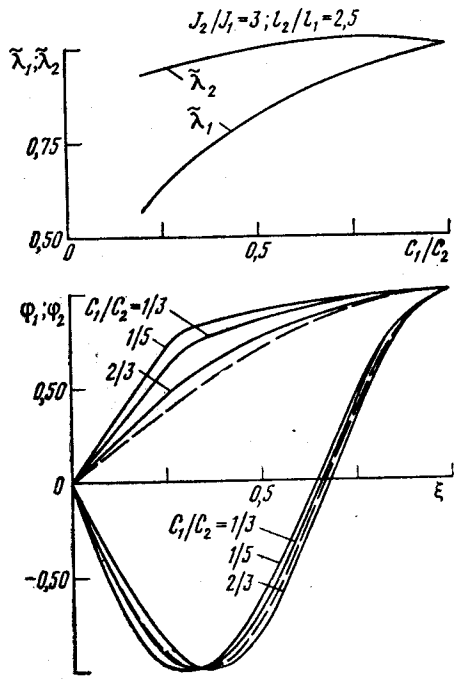


Рис. 6

Представление о том, как изменяются величины $\tilde{\lambda}_n$ и $\varphi_n(\xi)$ для двух конкретных случаев «выреза» дает таблица и графики на рис. 6. Пунктиром даны формы колебаний гладкой балки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроссман Е. П. Курс вибраций частей самолетов. — М.: Оборонгиз, 1938.
2. Пархомовский Я. М. Об одной особенности упругих колебаний «почти симметричных» систем. — Ученые записки ЦАГИ, 1984, т. 15, № 3.
3. Ананьев И. В., Тимофеев П. Г. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование. — М.: Машиностроение, 1965.
4. Пархомовский Я. М. Крутильные колебания крыла, несущего сосредоточенный груз (асимптотика). — Ученые записки ЦАГИ, 1981, т. 12, № 3.

Рукопись поступила 15/IV 1985 г.

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЦАГИ

Том XVII 1986 № 6

УДК 629.735.33.015.4.025.1

МАКСИМИЗАЦИЯ ЖЕСТКОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ИЗГИБЕ

Н. В. Баничук, В. И. Бирюк, Д. М. Епураш

Рассматривается задача максимизации интегральной жесткости (обратной потенциальной энергии деформации) изгибаемой пластины, моделирующей крыло. В качестве управляющей функции принимается распределение углов наклона осей ортотропии относительно некоторой фиксированной прямоугольной декартовой системы координат. Приводятся результаты численных расчетов для модельных крыльев большого и малого удлинения, нагруженных распределенной нагрузкой.

Максимизация жесткостных характеристик крыльев представляет собой актуальную задачу, поскольку в ряде случаев в качестве определяющих требований могут выступать требования аэроупругости. Некоторые вопросы оптимизации жесткостных характеристик анизотропных элементов конструкции в плоских задачах теории упругости рассмотрены в работах [1—5]. В данной работе оптимизируются жесткостные характеристики упругих изгибаемых пластин, моделирующих крылья летательных аппаратов. В отличие от работ [1—3] для решения прямой задачи отыскания функции прогибов используется метод конечных элементов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изгиб упругой ортотропной пластины постоянной толщины h, занимающей область Ω плоскости xy, нагруженной действием распределенной поперечной нагрузки $q(x, y)$. На части границы Γ_1 пластина жестко защемлена, а на остальной части Γ_2 — свободна ($\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ — контур, ограничивающий область Ω). Считаем, что свойства материала не меняются в направлении поперечной оси z, и пренебрегаем нормальным напряжением σ_z. Обозначим через $w=w(x, y)$ и $\alpha=\alpha(x, y)$ соответственно распределения прогибов пластины и углов, определяющих положение осей ортотропии ξ, η относительно фиксированной декартовой прямоугольной системы координат xy (α — угол между осями ξ и x). Тогда уравнение равновесия пластины и граничные условия запишутся в виде [6]

$$Lw = (D_{11}w_{xx})_{xx} + (D_{22}w_{yy})_{yy} + (D_{12}w_{xx})_{yy} + (D_{12}w_{yy})_{xx} + 2(D_{16}w_{xy})_{xx} + 2(D_{16}w_{xx})_{xy} + 2(D_{26}w_{xy}]_{yy} + 2(D_{26}w_{yy})_{xy} + 4(D_{66}w_{xy})_{xy} = q; \quad (1.1)$$

$$w|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{\Gamma_1} = 0; \quad (1.2)$$

$$M_n|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left.\left(N_n + \frac{\partial H_{tn}}{\partial s}\right)\right|_{\Gamma_2} = 0, \quad (1.3)$$

где M_n — изгибающий момент, H_{tn} — крутящий момент, N_n — перерезывающая сила. Нижними индексами x и y обозначены частные производные соответствующих величин, а через $\partial/\partial n$, $\partial/\partial s$ — производные в направлении внешней нормали и вдоль дуги контура соответственно. Компоненты тензора упругих модулей D_{mn} определяются формулами [6]:

$$D_{11} = D_1 \cos^4\alpha + D_2 \sin^4\alpha + 2D_3 \sin^2\alpha \cos^2\alpha;$$

$$D_{22} = D_1 \sin^4\alpha + D_2 \cos^4\alpha + 2D_3 \sin^2\alpha \cos^2\alpha:$$

$$D_{66} = D_k + (D_1 + D_2 - 2D_3) \sin^2\alpha \cos^2\alpha;$$

$$D_{12} = D_2 \nu_1 (D_1 + D_2 - 2D_3) \sin^2\alpha \cos^2\alpha;$$

$$D_{16} = \frac{1}{2}[(D_1 - D_3)\cos^2\alpha - (D_2 - D_3)\sin^2\alpha]\sin 2\alpha;$$

$$D_{26} = \frac{1}{2}[(D_1 - D_3)\sin^2\alpha - (D_2 - D_3)\cos^2\alpha]\sin 2\alpha,$$

где

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1\nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1\nu_2)}; \quad D_3 = D_1\nu_2 + 2D_k;$$

$$D_k = \frac{G_{12} h^3}{12};$$

E_1, E_2, G_{12}, ν_1, ν_2 — модули упругости сдвига и коэффициенты Пуассона для главных направлений упругости.

Величины D_{mn} являются функциями угла α, т. е. $D_{mn} = D_{mn}(\alpha)$. Примем в качестве управляющей функции $\alpha(x, y)$, а в качестве оптимизируемого критерия качества величину работы, производимой внешними силами,

$$J(\alpha) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} qw\, dx\, dy. \tag{1.4}$$

Сформулируем следующую задачу оптимизации. Требуется найти такую функцию $\alpha(x, y)$, чтобы функция прогибов, определяемая из решения краевой задачи (1.1)—(1.3), реализовала минимум функционала интегральной податливости $J(\alpha)$:

$$J_* = \min_{\{\alpha\}} J(\alpha). \tag{1.5}$$

2. Условие оптимальности. Получим условие оптимальности в сформулированной задаче оптимизации. Прежде всего заметим, что вид функционала (1.4) позволяет исключить из рассмотрения дифференциальную связь (1.1). Для этого аналогично тому, как это делалось в [1, 2], краевая задача (1.1)—(1.3) сводится к вариационной задаче. Заменим ее соотношением из вариационного принципа минимизации функционала полной энергии деформации [6]

$$V = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} (F - 2qw)\, dx\, dy, \tag{2.1}$$

где

$$F = D_{11} w_{xx}^2 + 2D_{12} w_{xx} w_{yy} + D_{22} w_{yy}^2 + 4D_{66} w_{xy}^2 + \\ + 4(D_{16} w_{xx} + D_{26} w_{yy}) w_{xy}.$$

С учетом теоремы Клапейрона задача минимизации (1.5) при условиях (1.1)—(1.3) сводится к последовательному вычислению минимума по w и максимума по α функционала V:

$$J_* = \min_{\alpha} (-\min_{w} V) = -\max_{\alpha} \min_{w} V. \tag{2.2}$$

Для получения условия стационарности V по α выпишем выражение для первой вариации функционала, обусловленной вариацией δ_α управляющей функции:

$$\delta_\alpha V = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \delta_\alpha \, dx \, dy. \tag{2.3}$$

Необходимым условием экстремума является равенство нулю первой вариации функционала V: $\delta_\alpha V = 0$. Так как это равенство должно выполняться для произвольной вариации управляющей функции δ_α, из (2.3) получаем необходимое условие оптимальности в задаче (2.2)

$$\partial F / \partial \alpha = 0. \tag{2.4}$$

3. Метод численного решения. В качестве вычислительного алгоритма решения сформулированной задачи используется алгоритм последовательной оптимизации, предложенный в [1—3]. Для отыскания в задаче оптимизации (2.2) максимума по α принимается метод наискорейшего спуска. Решение же прямой вариационной задачи отыскания функции w проводится методом конечных элементов. При использовании градиентного метода потребуется выражение для вариации управляющей функции δ_α, приводящей при $\partial F / \partial \alpha \neq 0$ в линейном приближении к увеличению значения функционала V. Из (2.3) следует, что выражение

$$\delta_\alpha = t \frac{\partial F}{\partial \alpha},$$

где t — произвольное положительное число (шаг в направлении градиента), удовлетворяет указанному требованию, так как

$$\delta_\alpha V = \frac{t}{2} \iint \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)^2 dx \, dy \geqslant 0.$$

Опишем кратко вычислительные операции, выполняемые на одном стандартном шаге алгоритма. Пусть известно k-е приближение для управляющей функции $\alpha^k(x, y)$ и для функции прогибов $w^k(x, y)$, а также соответствующее значение функционала V^k. С использованием величин k-го приближения вычисляется вариация управляющей функции и определяется $(k+1)$-е приближение для α:

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \delta_\alpha. \tag{3.1}$$

Далее для найденного распределения угла ортотропии α^{k+1} с применением метода конечных элементов определяется распределение прогибов $w^{k+1}(x, y)$ и значение величины V^{k+1}. Для найденных $\alpha^{k+1}(x, y)$ и $w^{k+1}(x, y)$ оценивается невязка в выполнении необходимого условия оптимальности (2.4). Если невязка достаточно мала, то процесс решения оптимизационной задачи заканчивается. Если же невязка велика, то осуществляется переход к $(k+2)$-му шагу, на котором выполняются аналогичные операции.

Для решения задачи отыскания действительных прогибов $w(x, y)$ применялся метод конечных элементов [7]. По сравнению с обычно используемыми схемами конечных элементов алгоритм данной работы

имеет одну особенность. В обычных схемах матрица упругости, связывающая напряжения и деформации в какой-либо точке пластины, не меняется в процессе счета. При оптимизации же с помощью итерационного процесса (3.1) компоненты D_{mn} тензора упругих модулей меняются от шага к шагу, что приводит к пересчету элементов матрицы разрешающей системы уравнений на каждом шаге алгоритма последовательной оптимизации.

4. Примеры расчета. По описанной выше методике разработана ФОРТРАН-программа, с помощью которой на ЭВМ ЕС-1022 проводились расчеты оптимального распределения углов наклона осей ортотропии для изгибаемых пластин, нагруженных равномерно распределенной поперечной нагрузкой $q_0 \equiv \text{const} = 0{,}01$ МПа.

Для удобства проведения расчетов использовался переход к нормированным относительно модуля упругости E_1 величинам

$$D_1' = D_1/E_1, \quad D_2' = D_2/E_1, \quad D_k' = D_k/E_1, \quad q' = q/E_1$$

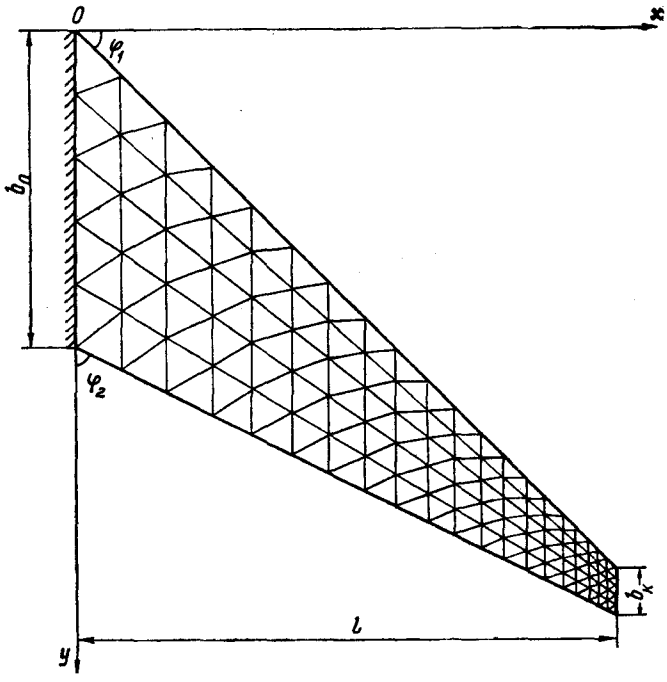


Рис. 1

(штрихи в дальнейшем опускаются). Значения параметров задачи полагались равными:

$$\lambda = E_2/E_1 = 1/9, \quad \mu = G_{12}/E_1 = 1/6, \quad h = 0{,}8 \text{ см}, \quad \nu_1 = 0{,}1.$$

Значение коэффициента Пуассона ν_2 получается из соотношения $E_1\nu_2 = E_2\nu_1$.

Наряду с оптимальным распределением углов наклона осей ортотропии в программе вычисляются главные напряжения

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

а также определяется распределение углов наклона первого главного напряжения относительно оси

$$\varphi_{\sigma_1} = \operatorname{arctg} \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y}.$$

Расчеты проводились для двух вариантов изгибаемых пластин. В первом случае рассматривалась пластина, имеющая конфигурацию стреловидного крыла, защемленная вдоль стороны $x=0$ и нагруженная равномерной нормальной нагрузкой q_0. На рис. 1 показана геометрия и конечно-элементное представление пластины. При проведении расчетов были использованы следующие значения геометрических параметров пластины: $l=12$ м, $b_0=7$ м, $b_к=45°$, $\varphi_2=63°$. Во втором случае рас-

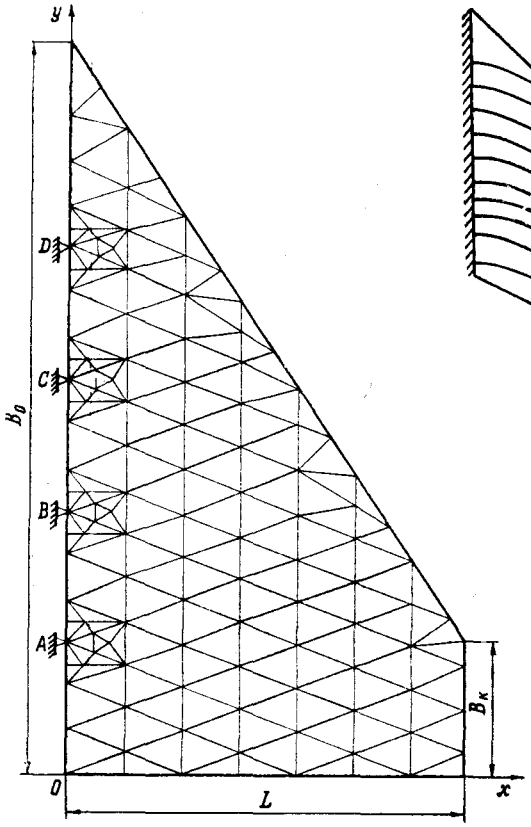


Рис. 2

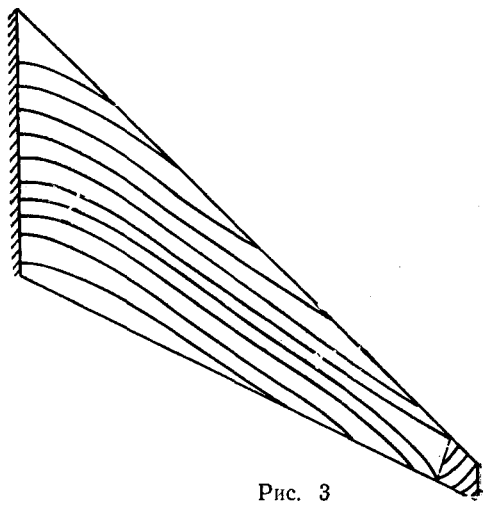


Рис. 3

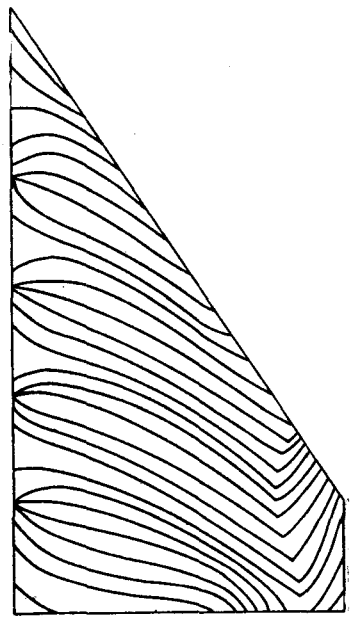


Рис. 4

четы проводились для пластины с конфигурацией трапециевидного крыла при тех же условиях нагружения. Геометрия и конечно-элементная модель пластины представлены на рис. 2. В точках A, B, C, D стороны $x=0$ пластина жестко закреплена. Значения геометрических параметров пластины полагались равными: $L=5{,}2$ м, $B_0=9{,}75$ м; $B_к=1{,}8$ м, $OA=AB=BC=CD=1{,}75$ м.

На рис. 3 и 4 приводятся оптимальные распределения углов $\alpha(x, y)$. Каса-

тельные к линиям, приведенным на этих рисунках, показывают направления с максимальным модулем упругости. На рис. 5 и 6 изображены направления первого главного напряжения. Из рисунков видно, что как в первом, так и во втором случае оптимальное распределение углов наклона осей ортотропии ортогонально направлениям первого главного напряжения, за исключением незначительного участка, примыкающего к свободному концу крыла. В этой части оптимальное решение совпадает с направлениями первого главного напряжения. Изломы траекторий в концевых сечениях являются следствием конечно-элементного разбиения пластин и процедуры численной реализации решения.

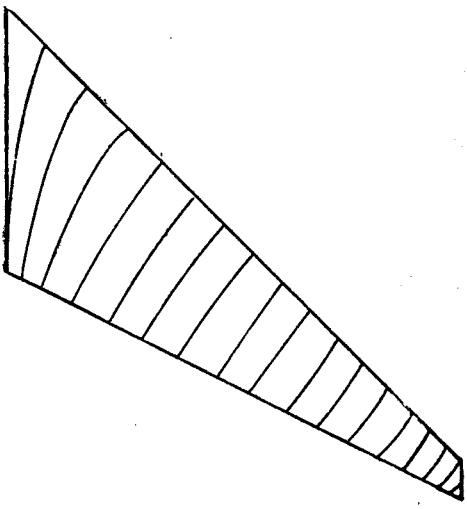


Рис. 5

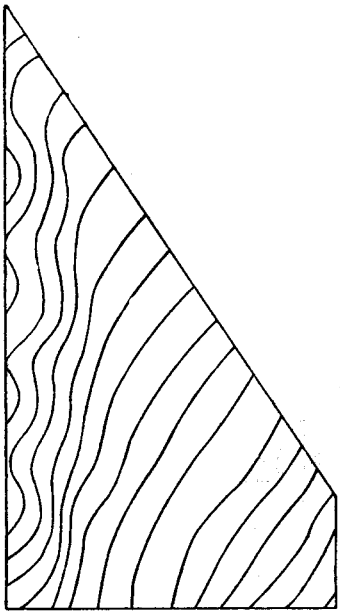


Рис. 6

Значения функционала V для оптимальных пластин сравнивались с соответствующими значениями для пластин с распределением углов ортотропии $\alpha \equiv -\pi/4$ (стреловидное крыло) и $\alpha \equiv 0$ (трапециевидное крыло). Относительный выигрыш в жесткости, получаемый за счет оптимизации, составляет 26% в первом случае и 23% во втором случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В. Оптимизация анизотропных свойств деформируемых сред в плоских задачах теории упругости. — Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 1.

2. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. — М.: Наука, 1980.

3. Албул А. В., Баничук Н. В., Епураш Д. М. Численный метод оптимизации анизотропных свойств упругих элементов конструкций. — В кн.: Исследование операций и программирование. — Кишинев, Штинца, 1982.

4. Баничук Н. В., Епураш Д. М. Оптимизация жесткостных характеристик анизотропных элементов конструкций. — В кн.: Материалы Второй всесоюзной научно-технической конференции. — Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов. — Ереван, Изд. Ереванского университета, 1984.

5. Баничук Н. В., Бирюк В. И., Епураш Д. М. К задаче оптимизации конструктивно-силовых схем при использовании анизотропной модели. — Ученые записки ЦАГИ, 1984, т. 15, № 2.

6. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. — М.: Гостехиздат, 1957.

7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.

Рукопись поступила 19/VII 1985 г.