

УДК 621.385.6

**ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕНОК
НА ХАРАКТЕРИСТИКИ МОЩНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПРИБОРОВ СВЧ
С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

А.А. КУРАЕВ, А.К. СИНИЦЫН

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь**Поступила в редакцию 1 февраля 2006*

Сформулированы самосогласованные уравнения возбуждения нерегулярных волноводов с конечной проводимостью стенки. Приведены результаты тестовых расчетов затухания E_{01} и E_{02} волн в регулярном волноводе, которые иллюстрируют эффект преобразования волн вследствие импеданса границы. Показано, что в релятивистских приборах СВЧ с нерегулярными электродинамическими системами влияние омических потерь начинает сказываться если рабочая частота превышает 100 ГГц.

Ключевые слова: электровакуумные приборы СВЧ, нелинейная теория, моделирование, нерегулярные волноводы, омические потери.

Введение

В современных математических моделях мощных релятивистских приборов СВЧ с нерегулярными электродинамическими системами — релятивистских черенковских генераторов типа ЛБВ и ЛОВ [1], гиротронов [2,3], гиро-ЛБВ [3], гиротонов [4] — используются уравнения возбуждения, полученные при граничном условии на металлической стенке нерегулярного волновода в преобразованной системе координат вида

$$\left[\vec{\rho}_0, \dot{\vec{E}} \right]_{\rho=1} = 0, \quad (1)$$

$\vec{\rho}_0$ — нормаль к поверхности регулярного цилиндра.

Условие (1) соответствует бесконечной проводимости стенки, что означает пренебрежение омическими потерями в электродинамической системе. Естественно возникает вопрос об адекватности полученных на основе таких моделей оптимальных вариантов, особенно в диапазоне миллиметровых волн и в квазирезонансных режимах с высокой дифракционной добротностью системы. Ниже этот вопрос решается в отношении релятивистских ЛБВ-ЛОВ на основе общей теории возбуждения нерегулярных волноводов с конечной проводимостью стенки.

**Уравнения возбуждения произвольно-нерегулярного полого волновода
с учетом конечной проводимости стенок**

Вместо условия (1) используем приближенное граничное условие Щукина–Леонтовича [5]:

$$\left[\bar{\rho}_0 \dot{\vec{E}} \right] \Big|_{\rho=1} = -\tilde{G} \left[\bar{\rho}_0 \left[\bar{\rho}_0 \dot{\vec{H}} \right] \right] \Big|_{\rho=1}, \quad (2)$$

$$\text{Здесь } \tilde{G} = \dot{W}_\sigma^0 \sqrt{\frac{g}{g^{11}}} \begin{pmatrix} \rho [g^{11} g^{22} - (g^{12})^2] & -g^{12} g^{13} \\ -g^{12} g^{13} & \frac{1}{\rho} [g^{11} - (g^{13})^2] \end{pmatrix},$$

где $\dot{W}_\sigma^0 = (1+j) \sqrt{\frac{\pi f \mu_\sigma}{\sigma}}$ — волновое сопротивление стенки волновода; μ_σ — магнитная проницаемость стенки; σ — ее удельная проводимость; f — рабочая частота; $\rho = r/b(z)$; $b(z)$ — внутренняя граница нерегулярного волновода; компоненты метрического тензора g^{ij} имеют вид

$$\sqrt{g} = b^2 \rho, \quad g^{11} = (1 + \rho^2 b'^2) / b^2, \quad g^{22} = 1 / (b \rho)^2, \quad g^{33} = 1, \\ g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{13} = -\rho b' / b = g^{31}, \quad g^{23} = g^{32} = 0, \quad b' = db / dz.$$

Теперь задачу сформулируем так: при граничном условии (2) решить уравнения Максвелла в преобразованной системе координат для полных компонент поля $\vec{E}^p, \vec{H}^p$ и токов $\vec{\delta}^p, \vec{\delta}^{pM}$:

$$\text{rot} \vec{H}^p = \varepsilon_0 \hat{g} \frac{\partial \vec{E}^p}{\partial t} + \hat{g} \vec{\delta}^p, \quad \text{rot} \vec{E}^p = -\mu_0 \hat{g} \frac{\partial \vec{H}^p}{\partial t} - \hat{g} \vec{\delta}^{pM}, \quad (3)$$

$$\text{Здесь } \hat{g} = \sqrt{g} \begin{pmatrix} g^{11} / \rho & g^{12} & g^{13} / \rho \\ g^{21} & \rho g^{22} & g^{23} \\ g^{13} / \rho & g^{32} & g^{33} / \rho \end{pmatrix}.$$

Физические компоненты векторов $\vec{H}, \vec{E}, \vec{\delta}$ связаны с расчетными $\vec{H}^p, \vec{E}^p, \vec{\delta}^p, \vec{\delta}^{pM}$ следующим образом (на примере $\vec{H}$):

$$H_r = H_\rho^p / b, \quad H_\phi = H_\phi^p / b, \quad H_z = H_z^p - H_\phi^p \rho b' / b.$$

Подчеркнем, что в отличие от [1] компоненты $\vec{H}^p, \vec{E}^p, \vec{\delta}^p, \vec{\delta}^{pM}$ содержат как вихревые, так и потенциальные (в общем случае содержащие разрывы) составляющие. В дальнейшем будут использованы процедуры, исключающие почленное дифференцирование (операция rot) рядов, представляющих $\vec{E}^p, \vec{H}^p$.

Представим решение задачи (2), (3) в следующем виде:

$$\vec{E}_t^p = \text{Re} \sum_m \dot{\vec{E}}_{tm} e^{jm\omega t}, \quad \vec{E}_z^p = \text{Re} \sum_m \dot{\vec{E}}_{zm} e^{jm\omega t},$$

$$\text{где } \dot{\vec{E}}_{tm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \left(\dot{A}_{mni}^e(z) \vec{e}_{ni}^e + \dot{A}_{mni}^i(z) \vec{e}_{ni}^i \right), \quad \dot{\vec{E}}_{zm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \dot{C}_{mni}(z) \varphi_{ni} \vec{a}^3.$$

$$\vec{H}_t^p = \text{Re} \sum_m \dot{\vec{H}}_{tm} e^{jm\omega t}, \quad \vec{H}_z^p = \text{Re} \sum_m \dot{\vec{H}}_{zm} e^{jm\omega t},$$

$$\dot{\vec{H}}_{tm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \left(\dot{B}_{mni}^e(z) \vec{h}_{ni}^e + \dot{B}_{mni}^i(z) \vec{h}_{ni}^i \right), \quad \dot{\vec{H}}_{zm} = \sum_{i=1}^I \sum_{n=-N}^N \dot{H}_{mni}(z) \psi_{ni} \vec{a}^3.$$

Здесь $\varphi_{ni} = J_n(\nu_{ni}\rho)e^{jn\varphi}$, $\psi_{ni} = J_n(\mu_{ni}\rho)e^{jn\varphi}$,

$$\vec{e}_{ni}^e = \bar{\rho}_0 \nu_{ni} J'_n(\nu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} + \bar{\varphi}_0 j \frac{n}{\rho} J_n(\nu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} ,$$

$$\vec{e}_{ni}^i = \bar{\rho}_0 \frac{jn}{\rho} J_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} - \bar{\varphi}_0 \mu_{ni} J'_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} ,$$

$$\vec{h}_{ni}^e = -\bar{\rho}_0 \frac{jn}{\rho} J_n(\nu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} + \bar{\varphi}_0 \nu_{ni} J'_n(\nu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} ,$$

$$\vec{h}_{ni}^i = \bar{\rho}_0 \mu_{ni} J'_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} + \bar{\varphi}_0 \frac{jn}{\rho} J_n(\mu_{ni}\rho) e^{jn\varphi} , \quad J_n(\nu_{ni}) = 0, \quad J'_n(\mu_{ni}) = 0 .$$

Амплитуды $\dot{A}_{mni}^e(z), \dot{A}_{mni}^i(z), \dot{B}_{mni}^e(z), \dot{B}_{mni}^i(z), \dot{C}_{mni}(z), \dot{H}_{mni}(z)$ определим из следующих проекционных равенств, эквивалентных (3):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot}(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{g}(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}) \right\} \vec{e}_{-ni}^e \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}^p \vec{e}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t , \quad (4)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot}(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{g}(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}) \right\} \vec{e}_{-ni}^i \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}^p \vec{e}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t , \quad (5)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot}(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}) - jm\omega\varepsilon_0 \hat{g}(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}) \right\} \cdot \varphi_{-ni} \vec{a}^3 \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}^p \vec{a}^3 \varphi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t , \quad (6)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot}(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0 \hat{g}(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}) \right\} \vec{h}_{-ni}^e \rho d\rho d\varphi = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}^{pM} \vec{h}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t , \quad (7)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot}(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0 \hat{g}(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}) \right\} \vec{h}_{-ni}^i \rho d\rho d\varphi = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}^{pM} \vec{h}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t , \quad (8)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \text{rot}(\vec{E}_{tm} + \vec{E}_{zm}) + jm\omega\mu_0 \hat{g}(\vec{H}_{tm} + \vec{H}_{zm}) \right\} \psi_{-ni} \vec{a}^3 \rho d\rho d\varphi = 0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \hat{g} \vec{\delta}^{pM} \vec{a}^3 \psi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega t . \quad (9)$$

Правые части уравнений возбуждения (4)–(9) (интегралы возбуждения) записаны в общем случае, когда координаты источников могут меняться во времени, т.е. $\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $z = z(t)$. Причем эти зависимости могут содержать и негармонические составляющие.

Левые части уравнений возбуждения (4)–(9), однако, должны быть преобразованы с целью исключения операций дифференцирования $\text{rot}(\dot{\vec{H}}_{tm} + \dot{\vec{H}}_{zm}) = \text{rot}\dot{\vec{H}}_m$ и $\text{rot}(\dot{\vec{E}}_{tm} + \dot{\vec{E}}_{zm}) = \text{rot}\dot{\vec{E}}_m$, поскольку $\vec{E}_m$ и $\vec{H}_m$ содержат разрывные в общем случае потенциальные составляющие и, кроме того, ряды, представляющие эти функции имеют разрыв на границе $\rho = 1$, поскольку базисные функции удовлетворяют граничному условию (1) а не (2). Преобразования выполним с использованием следующих векторных тождеств:

$$\text{rot}(\dot{\vec{H}}_m) \vec{e}_{-ni}^e = \dot{\vec{H}}_m \text{rot} \vec{e}_{-ni}^e + \text{div}[\vec{H}_m, \vec{e}_{-ni}^e] ,$$

$$\text{rot}(\dot{\vec{H}}_m) \vec{e}_{-ni}^M = \dot{\vec{H}}_m \text{rot} \vec{e}_{-ni}^M + \text{div}[\vec{H}_m, \vec{e}_{-ni}^M] ,$$

$$\begin{aligned}
\text{rot}\left(\dot{\vec{H}}_m\right)\bar{z}_0\varphi_{-ni} &= \dot{\vec{H}}_m\text{rot}\left(\bar{z}_0\varphi_{-ni}\right) + \text{div}\left[\vec{H}_m, \bar{z}_0\varphi_{-ni}\right], \\
\text{rot}\left(\dot{\vec{E}}_m\right)\bar{h}_{-ni}^e &= \dot{\vec{E}}_m\text{rot}\left(\bar{h}_{-ni}^e\right) + \text{div}\left[\vec{E}_m, \bar{h}_{-ni}^e\right], \\
\text{rot}\left(\dot{\vec{E}}_m\right)\bar{h}_{-ni}^M &= \dot{\vec{E}}_m\text{rot}\left(\bar{h}_{-ni}^M\right) + \text{div}\left[\vec{E}_m, \bar{h}_{-ni}^M\right], \\
\text{rot}\left(\dot{\vec{E}}_m\right)\bar{z}_0\varphi_{-ni} &= \dot{\vec{E}}_m\text{rot}\left(\bar{z}_0\varphi_{-ni}\right) + \text{div}\left[\vec{E}_m, \bar{z}_0\varphi_{-ni}\right].
\end{aligned}$$

Воспользуемся также следующим интегральным тождеством (доказательство опустим):

$$\int_{S_\perp} \text{div} \vec{A} dS_\perp = \int_{S_\perp} \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \bar{z}_0 dS_\perp + \oint_l \vec{A} \bar{n} dl \quad (10)$$

Тождество (10) специализировано для нашей задачи, в которой $S_\perp = \text{const}$ ($\rho = 1 = \text{const}$).

Учтем также выражения базисных функций с индексами $(-ni)$ и векторные тождества для них.

$$\begin{aligned}
\varphi_{-ni} &= (-1)^n J_n(v_{ni}\rho) e^{-jn\varphi}, \quad \psi_{-ni} = (-1)^n J_n(\mu_{ni}\rho) e^{-jn\varphi}, \\
\bar{e}_{-ni}^e &= (-1)^n \left\{ \bar{\rho}_0 v_{ni} J'_n(v_{ni}\rho) - \bar{\varphi}_0 j \frac{n}{\rho} J_n(v_{ni}\rho) \right\} e^{-jn\varphi}, \\
\bar{e}_{-ni}^M &= (-1)^{n+1} \left\{ \bar{\rho}_0 \frac{jn}{\rho} J_n(\mu_{ni}\rho) + \bar{\varphi}_0 \mu_{ni} J'_n(\mu_{ni}\rho) \right\} e^{-jn\varphi}, \\
\bar{h}_{-ni}^e &= (-1)^n \left\{ \bar{\rho}_0 \frac{jn}{\rho} J_n(v_{ni}\rho) + \bar{\varphi}_0 v_{ni} J'_n(v_{ni}\rho) \right\} e^{-jn\varphi}, \\
\bar{h}_{-ni}^M &= (-1)^n \left\{ \bar{\rho}_0 \mu_{ni} J'_n(\mu_{ni}\rho) - \bar{\varphi}_0 j \frac{n}{\rho} J_n(\mu_{ni}\rho) \right\} e^{-jn\varphi}, \\
J_n(v_{ni}) &= 0, \quad J_n(\mu_{ni}) = 0.
\end{aligned}$$

Для перечисленных функций имеют место тождества

$$\begin{aligned}
\text{rot} \bar{e}_{-ni}^e &= 0, \\
\text{rot} \bar{h}_{-ni}^M &= 0, \\
\text{rot}(\bar{z}_0 \psi_{-ni}) &= \bar{e}_{-ni}^M, \\
\text{rot} \bar{e}_{-ni}^M &= \bar{z}_0 (-1)^n \mu_{ni}^2 \psi_{-ni}, \\
\text{rot} \bar{h}_{-ni}^e &= -\bar{z}_0 (-1)^n v_{ni}^2 \varphi_{-ni}.
\end{aligned}$$

При $\rho = 1$ с учетом (2) имеем:

$$\begin{aligned}
[\dot{\vec{E}}_m, \bar{z}_0 \psi_{-ni}] \bar{\rho}_0 &= \vec{G}(\vec{H}_{m\varphi} + \vec{H}_{mz}) \bar{z}_0 \psi_{-ni}, \\
[\dot{\vec{E}}_m, \bar{h}_{-ni}^e] \bar{\rho}_0 &= \vec{G}(\vec{H}_{m\varphi} + \vec{H}_{mz}) \bar{h}_{-ni}^e, \\
[\dot{\vec{E}}_m, \bar{h}_{-ni}^M] \bar{\rho}_0 &= \vec{G}(\vec{H}_{m\varphi} + \vec{H}_{mz}) \bar{h}_{-ni}^M, \\
[\bar{\rho}_0, \bar{e}_{-ni}^e] &= 0, \\
[\bar{\rho}_0, \bar{e}_{-ni}^M] &= 0, \\
[\bar{\rho}_0, \bar{z}_0 \varphi_{-ni}] &= 0.
\end{aligned}$$

С использованием (10) и перечисленных тождеств получаем систему уравнений возбуждения в следующей математически корректной форме:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial z} \dot{H}_{tm}, \bar{e}_{-ni}^e \right] \bar{z}_0 - j\omega \epsilon_0 \hat{g} \left(\dot{E}_{tm} + \dot{E}_{zm} \right) \bar{e}_{-ni}^e \right\} \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \hat{g} \bar{\delta}^p \bar{e}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \quad (11)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ (-1)^n \mu_{ni}^2 \dot{H}_{mz} \psi_{-ni} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \dot{H}_{tm}, \bar{e}_{-ni}^M \right] \bar{z}_0 - j\omega \epsilon_0 \hat{g} \left(\dot{E}_{tm} + \dot{E}_{zm} \right) \bar{e}_{-ni}^M \right\} \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \hat{g} \bar{\delta}^p \bar{e}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \quad (12)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ -\dot{H}_{tm} \bar{h}_{-ni}^e - j\omega \epsilon_0 \hat{g} \left(\dot{E}_{tm} + \dot{E}_{zm} \right) \bar{z}_0 \varphi_{-ni} \right\} \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \hat{g} \bar{\delta}^p \bar{z}_0 \varphi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ -\dot{E}_{zm} (-1)^n \nu_{ni}^2 \varphi_{-ni} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \dot{E}_{tm}, \bar{h}_{-ni}^e \right] \bar{z}_0 + \right. \\ \left. + j\omega \mu_0 \hat{g} \left(\dot{H}_{tm} + \dot{H}_{zm} \right) \bar{h}_{-ni}^e \right\} \rho d\rho d\varphi + \int_0^{2\pi} \tilde{G} \left(\vec{H}_{m\varphi} + \vec{H}_{mz} \right) \bar{h}_{-ni}^e \bigg|_{\rho=1} d\varphi = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \hat{g} \bar{\delta}^p \bar{h}_{-ni}^e e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial z} \dot{E}_{tm}, \bar{h}_{-ni}^M \right] \bar{z}_0 + j\omega \mu_0 \hat{g} \left(\dot{H}_{tm} + \dot{H}_{zm} \right) \bar{h}_{-ni}^M \right\} \rho d\rho d\varphi + \\ + \int_0^{2\pi} \tilde{G} \left(\vec{H}_{m\varphi} + \vec{H}_{mz} \right) \bar{h}_{-ni}^M \bigg|_{\rho=1} d\varphi = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \hat{g} \bar{\delta}^p \bar{h}_{-ni}^M e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \dot{E}_{tm} \bar{e}_{-ni}^M + j\omega \mu_0 \hat{g} \left(\dot{H}_{tm} + \dot{H}_{zm} \right) \bar{z}_0 \psi_{-ni} \right\} \rho d\rho d\varphi + \int_0^{2\pi} \tilde{G} \left(\vec{H}_{m\varphi} + \vec{H}_{mz} \right) \bar{z}_0 \psi_{-ni} \bigg|_{\rho=1} d\varphi = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \hat{g} \bar{\delta}^p \bar{z}_0 \psi_{-ni} e^{-jm\omega t} \rho d\rho d\varphi d\omega. \quad (16) \end{aligned}$$

Система уравнений возбуждения (11)–(16) отличается от системы (4.36)–(4.41) из [1] не только тем, что в ней учтены потери в стенках волновода, но и своей математически корректной структурой, позволившей представить полное поле, возбуждаемое в нерегулярном волноводе заданной системой источников $\bar{\delta}(t)$ и $\bar{\delta}^M(t)$ и включающее как динамические, так и квазистатические составляющие. Поэтому даже при игнорировании потерь в стенках ($\dot{W}_\sigma = 0$) система (11) – (16) предпочтительнее системы уравнений возбуждения (4.36)–(4.41) из [1].

Преобразования, выполненные здесь в отношении уравнений возбуждения нерегулярного полого волновода, легко осуществимы и для случая нерегулярного коаксиального волновода и нерегулярного волновода с прямоугольным сечением. Схема таких преобразований идентична приведенной выше.

**Самосогласованные нелинейные уравнения
для релятивистских черенковских генераторов на E_{0i} -модах**

Рассмотрим случай $n = 0$. Теперь

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\rho m} &= -\sum_{i=1}^I \dot{A}_{mi}(z) J_1(\nu_{0i} \rho), \\ \dot{E}_{zm} &= -\sum_{i=1}^I \dot{C}_{mi}(z) J_0(\nu_{0i} \rho), \\ \dot{B}_{\varphi m} &= -j \sum_{i=1}^I \dot{V}_{mi}(z) J_1(\nu_{0i} \rho).\end{aligned}$$

Используя (11)–(16) и законы сохранения заряда, приходим к следующим безразмерным уравнениям возбуждения:

$$\frac{d\dot{A}_{mi}}{dz} = \left(m \cdot W \cdot \dot{V}_{mi} + \nu_{0i} \cdot \dot{C}_{mi} \right) + (1-j) 2S_{\sigma} \frac{\sqrt{1+b'^2}}{b} \sum_k \dot{V}_{mk} \frac{J_1(\nu_{0k})}{J_1(\nu_{0i})}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}\dot{C}_{mi} &= -\frac{\nu_{0i} \dot{V}_{mi}}{m \cdot W \cdot b^2} + \frac{b'}{b} \times \left(-\frac{\dot{A}_{mi}}{\nu_{0i}} + \sum_{k \neq i} \frac{2 \cdot \nu_{0i}}{\nu_{0k}^2 - \nu_{0i}^2} \cdot \frac{J_1(\nu_{0k})}{J_1(\nu_{0i})} \dot{A}_{mk} \right) - \\ &- \frac{jG_0}{m \cdot W \cdot e_{0i} \cdot b^2} \cdot \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N J_0 \left(\nu_{0i} \frac{r_l}{b} \right) e^{-jmW\theta_l}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{V}_{mi}}{dz} &= -m \cdot W \left\{ \dot{A}_{mi} + b'^2 \cdot \left[\dot{A}_{mi} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{\nu_{0i}^2} \right) + \sum_{k \neq i} \frac{4 \cdot (\nu_{0i}^2 + \nu_{0k}^2)}{(\nu_{0i}^2 - \nu_{0k}^2)^2} \cdot \frac{J_1(\nu_{0k})}{J_1(\nu_{0i})} \dot{A}_{mk} \right] - \right. \\ &- \left. bb' \cdot \left(-\frac{\dot{C}_{mi}}{\nu_{0i}} + \sum_{k \neq i} \frac{2 \cdot \nu_{0k}}{\nu_{0i}^2 - \nu_{0k}^2} \cdot \frac{J_1(\nu_{0k})}{J_1(\nu_{0i})} \dot{C}_{mk} \right) \right\} + \frac{G_0}{e_{0i} b} \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N J_1 \left(\nu_{0i} \frac{r_l}{b} \right) \left(\frac{\beta_{rl}}{\beta_{zl}} - \frac{r_l b'}{b} \right) \right) j e^{-jmW\theta_l};\end{aligned}$$

Уравнения движения крупных частиц:

$$\begin{cases} \frac{dP_{rl}}{dz} = \frac{1}{\beta_{zl}} \left(\frac{\gamma_l \beta_{\varphi l}^2}{r_l} - E_{rl} - \beta_{\varphi l} F_z + \beta_z B_{\varphi} \right); \\ \frac{dP_{\varphi l}}{dz} = \frac{1}{\beta_{zl}} \left(-\frac{\gamma_l \beta_{rl} \beta_{\varphi l}}{r_l} - E_{\varphi} - \beta_z F_r + \beta_r F_z \right); \\ \frac{dP_{zl}}{dz} = \frac{1}{\beta_{zl}} (-E_z - \beta_r B_{\varphi} + \beta_{\varphi} F_r); \\ \frac{dr_l}{dz} = \frac{\beta_{rl}}{\beta_{zl}}; \quad \frac{d\theta_l}{dz} = \frac{1}{\beta_{zl}}; \quad \vec{P}_l = \gamma_l \vec{\beta}_l; \quad \gamma_l = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}_l^2}} = \sqrt{1 - P_{rl}^2 - P_{\varphi l}^2 - P_{zl}^2} \end{cases} \quad (18)$$

$$W\theta_l(0) = \frac{2\pi}{N}(l - 0.5); \quad l = 1 \dots N; \quad \beta_l(0) = \beta_0; \quad r_l(0) = r_0.$$

Выражение физических ВЧ-полей через расчетные амплитуды с учетом полей пространственного заряда:

$$\begin{cases} E_r = -\frac{1}{b} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I J_1 \left(\nu_{oi} \frac{r}{b} \right) \operatorname{Re} \left(\dot{A}_{mi} e^{jmW\theta} \right) - S_{qr}; & E_\varphi = 0; \\ E_z = \operatorname{Re} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I J_0 \left(\nu_{oi} \frac{r}{b} \right) \dot{C}_{mi} \cdot e^{jmW\theta} + \frac{rb'}{b^2} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I J_1 \left(\nu_{oi} \frac{r}{b} \right) \dot{A}_{mi} \cdot e^{jmW\theta} \right] - S_{qz} F_q; \\ B_\varphi = \frac{1}{b} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I J_1 \left(\nu_{oi} \frac{r}{b} \right) \operatorname{Re} \left(-j \dot{V}_{mi} e^{jmW\theta} \right) \end{cases}$$

Магнитостатическое фокусирующее поле:

$$\begin{cases} F_r = -\frac{1}{2} r F_0'(z) + \frac{1}{16} r^3 F_0'''(z); \\ F_z = F_0(z) - \frac{1}{4} r^2 F_0''(z); & F_0 = \frac{B_0^r(z)e}{m_0 \omega_0}; & B_0^r(z) - \text{поле вдоль оси} \end{cases}$$

Безразмерные параметры:

$$e_{oi} = 0,5 J_1^2(\nu_{oi}), \quad G_0 = \frac{e I_0}{\pi \varepsilon_0 m_0 c^3}; \quad S_\sigma = \frac{W_\sigma^0}{(1+j)\mu_a c} = \sqrt{\frac{\pi W}{\sigma \lambda_0 \mu_a c}}$$

$$S_{qz} = \frac{G_0 W}{\beta_0^2}; \quad F_{ql} = \frac{1}{N} \sum_k E_{qlk} \left(\frac{z_l - z_k}{\lambda_0 \beta_0 / 2} \right) \operatorname{sign}(z_l - z_k); \quad S_{qr} = \frac{G_0}{2r} \left(\frac{1}{\beta_{z0}} - \beta_{z0} \right).$$

Приняты следующие основные соотношения между безразмерными и размерными переменными:

$$(r, z, b, L) = (r^r, z^r, b^r, L^r) \omega_0 / c; \quad W = \omega / \omega_0; \quad \theta = \omega_0 t; \quad \vec{\beta}_l = \vec{v}_{el} / c; \\ \vec{E} = \vec{E}^r / E_m; \quad \vec{B} = \vec{B}^r c / E_m; \quad E_m = m_0 \omega_0 c / e.$$

Система (17), (18) получила название — "уравнения возбуждения".

Сформулируем граничные условия для амплитуд $\dot{A}(z)$, $\dot{V}(z)$ в (17). Предполагаем, что при $z \leq 0$ и $z \geq L$ волновод регулярный. Обозначим амплитуды прямой и встречной E_{0m} — волн регулярного волновода как

$$\dot{e}_{0mi}^+ \text{ для } z \leq 0, \quad \dot{e}_{Lmi}^+ \text{ для } z \geq L.$$

Тогда общие условия для амплитуд распространяющихся E_{0i} -волн на границах отрезка нерегулярного волновода запишем в виде

$$\dot{A}_{mi}(0) = (\dot{e}_{0mi}^+ - \dot{e}_{0mi}^-) \cdot j k_{0i}^e, \quad \dot{V}_{mi}(0) = (\dot{e}_{0mi}^+ + \dot{e}_{0mi}^-) \cdot W; \quad (19)$$

$$\dot{A}_{mi}(L) = (\dot{e}_{Lmi}^+ - \dot{e}_{Lmi}^-) \cdot j k_{0i}^e, \quad \dot{V}_{mi}(L) = (\dot{e}_{0mi}^+ + \dot{e}_{0mi}^-) \cdot W$$

$$k_{0i}^e = \sqrt{1 - (\nu_{oi} / b)^2}$$

Заметим, что для корректной постановки задачи для (17) достаточно выбрать только два из четырех уравнений (19).

При моделировании приборов, обычно на входе ЭДС контролируется (задается) амплитуда набегающей волны $\dot{e}_{0mi}^+$, а на выходе контролируется величина амплитуды встречной волны $\dot{e}_{Lmi}^-$ (при условии согласования $\dot{e}_{Lmi}^- = 0$). Если из (19) исключить $\dot{e}_{Lmi}^-$ или $\dot{e}_{0mi}^+$ то гранич-

ные условия для амплитуд распространяющихся E_{0i} - волн можно записать в следующем более удобном при моделировании приборов виде:

$$\begin{aligned} W \cdot \dot{A}_{mi}(0) + jk_{0i}^e \cdot \dot{V}_{mi}(0) &= jk_{0i}^e W \cdot 2\dot{e}_{0mi}^+, \\ -W \cdot \dot{A}_{mi}(L) + jk_{0i}^e \cdot \dot{V}_{mi}(L) &= jk_{0i}^e W \cdot 2\dot{e}_{Lmi}^- \end{aligned} \quad (20)$$

Эти соотношения также могут быть использованы для определения амплитуд прямой и встречной волн на регулярных участках волновода.

Граничные условия для амплитуд закритических E_{0i} -волн имеют вид

$$W\dot{A}_{mi}(0) + k_{0i}^e \cdot \dot{V}_{mi}(0) = 0; \quad -W\dot{A}_{mi}(L) + k_{0i}^e \cdot \dot{V}_{mi}(L) = 0. \quad (21)$$

Физически условия (21) соответствуют затуханию закритических волн при удалении от границ отрезка нерегулярного волновода.

Безразмерная мощность, переносимая волновым полем через поперечное сечение волновода в выбранных переменных, имеет вид

$$P(z) = \sum_{mi} e_{0i} \cdot \text{Im} \left[\dot{A}_{mi}(z) \cdot \dot{V}_{mi}^*(z) \right].$$

На регулярных участках, а также в точках волновода, где $b' = 0$, мощности прямой и обратной волн в выбранных безразмерных переменных выражаются следующим образом:

$$P^\pm = \sum_i e_{0i} \cdot \text{Im} \left[\left(\dot{A}_{mi} \pm \frac{j}{k_{0i}^e} \frac{d\dot{A}_{mi}}{dz} \right) \left(\dot{V}_{mi} \pm \frac{j}{k_{0i}^e} \frac{d\dot{V}_{mi}}{dz} \right)^* \right].$$

Эффективность взаимодействия оценивается величиной волнового КПД, представляющего отношение мощности переносимой электромагнитной волной через поперечные z-сечения отрезка $[0z]$ волновода к мощности электронного пучка:

$$\eta_{vmi} = \frac{\text{Im}(\dot{A}_{mi}(z)\dot{V}_{mi}^*(z)) - \text{Im}(\dot{A}_{mi}(0)\dot{V}_{mi}^*(0))}{(\gamma_0 - 1)G_0 / e_{0i}}. \quad (22)$$

Электронный КПД используется для контроля точности и рассчитывается следующим образом:

$$\eta_e = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \frac{\gamma_0 - \gamma_l(z)}{\gamma_0 - 1}; \quad \gamma_0 = 1 / \sqrt{1 - \beta_0^2}.$$

Особенности взаимодействия отражает функция группировки, которая пропорциональна величине амплитуды s-гармоники тока в модулированном пучке электронов:

$$G_r = \left(\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N [\sin(mW\theta_l) + \cos(mW\theta_l)] \right)^{1/2}.$$

Профиль нерегулярного гофрированного волновода задавался как

$$b(T) = b_0 + h_v(T) \cdot \sin^2[n_v \pi(T + D_v(T))]; \quad (23)$$

$T = (z - z_0) / L_v$, z_0, L_v — начало и длина нерегулярного участка; n_v — количество периодов; $h_v(T)$ — глубина гофра; $D_v(T)$ — функция задающая изменение периода; $D_v(0)=0$, $D_v(1)=0$, при $D_v(T)=0$ — период постоянный и равен в принятых единицах $d = k_0 L_v / n_v$.

Функции $h_v(T)$ и $D_v(T)$ аппроксимировались разложениями по сдвигам стандартной финитной функции $\varphi_3(x)$, представляющей B-сплайн третьей степени:

$$\begin{aligned}
h_v(T) &= \sum_{k=1}^K h_k^v \varphi_3[T \cdot (K-3) - k + 2] \\
D_v(T) &= \sum_{k=1}^K d_k^v \varphi_3[T \cdot (K+3) - k - 1] \\
\varphi_3(x) &= \begin{cases} 0, & |x| \geq 2; \quad \frac{(2-x)^3}{6}, & 1 \leq x \leq 2; \\ \frac{1}{6} [1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3], & 0 \leq x \leq 1; \\ \varphi_3(-x), & x \leq 0. \end{cases} \quad (24)
\end{aligned}$$

Заметим, что при такой аппроксимации значения коэффициентов h_k и d_k совпадают со значениями функций $h_v((k-2)/(K-3))$, $D_v((k+1)/(K+3))$ соответственно.

Тестовые расчеты

Прежде чем переходить к проверке оптимальных вариантов релятивистских ЛБВ-ЛОВ, полученных ранее без учета потерь в стенках электродинамической системы, необходимо протестировать полученную систему уравнений возбуждения. Это можно сделать, используя классическую теорию затухания E_{0i} -волн в регулярных волноводах [6]. При этом уместно обратить внимание на следующее. Следует различать понятия "собственные волны" и "нормальные волны" регулярного волновода. Собственные волны — это частные решения уравнений Максвелла вне источников, удовлетворяющие приближенным граничным условиям Щукина–Леонтовича на стенках волновода. Нормальные волны — частные решения, полученные при условии (1) на стенках волновода. Последние и представлены в полученной здесь системе уравнений возбуждения. Нормальные волны также используются при расчете затухания в классической литературе. Собственные волны энергетически независимы, как показано в [7, 8]. Нормальные же волны в волноводе с конечной проводимостью стенок оказываются связанными, что следует как из общей системы (11)–(16), так и специализированной для E_{0i} -волн (17). В классической же литературе по электродинамике затухание нормальных волн рассматривается как затухание изолированных волн, что, вообще говоря, некорректно. Но для доминантной E_{01} -волны при радиусе волновода и рабочей частоте, соответствующих условиям закритичности E_{0i} -волн ($i \geq 2$), это приближение может считаться приемлемым. Поэтому рассчитанный в таком приближении коэффициент затухания нормальной E_{01} волны может служить ориентиром для проверки системы (17) при $G_0 = 0$ и $b = b_0 = \text{const}$.

На рис. 1 приведены результаты расчета затухания E_{01} -волны при $b_0 = 3,5$; $\lambda = 3,2$ см (для усиления эффекта импеданса границы в приведенных расчетах σ по сравнению со значением для меди $\sigma = 5,6 \times 10^7$ сим/м уменьшена до $\sigma = 30$ сим/м). Волновод согласован на правом конце; на левом конце $e_{01}^+ = 0,39$; $e_{0i>1}^+ = 0$.

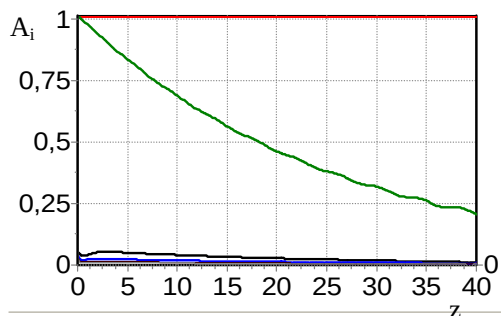


Рис. 1. $b=3,5$; $e_{01}=0,39$

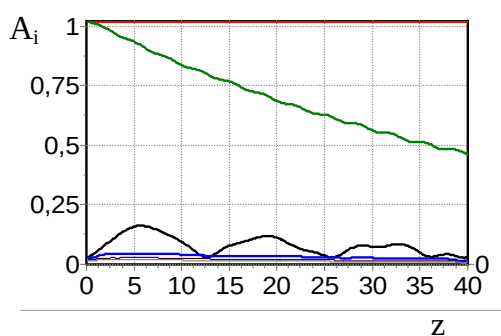


Рис. 2. $b=6$; $e_{01}=0,185$

Как видно из рис. 1, амплитуды закретических E_{02}, E_{03} волн, возбуждаемых в волноводе, пренебрежительно малы. Поэтому коэффициент затухания, рассчитанный по (17), практически совпадает по величине с тем, что приведен в литературе [6] для рассматриваемых параметров, $\alpha_{01} = S_{\sigma} / b_0^r k_{01}^e = 0,079 \text{ см}^{-1}$.

На рис. 2 приведены характеристики варианта с $b = 6$; $e_{01}^+ = 0,185$; $e_{0i>1}^+ = 0$ и тех же значениях λ, σ . Теперь волна E_{02} распространяющаяся. Как видно из рис. 2, волна E_{02} периодически возбуждается из-за связи с волной E_{01} . Периодичность возбуждения E_{02} связана с разностью фазовых скоростей волн E_{01} и E_{02} .

На рис. 3 приведены результаты расчета для варианта с $b = 6$; $e_{01}^+ = 0$; $e_{0i>1}^+ = 0,42$, остальные параметры — те же. Теперь на левом конце отрезка волновода E_{02} возбуждает основную волну E_{01} . Возбуждение ее также имеет периодический характер, связанный с периодичностью преобразования энергии из E_{02} в E_{01} и обратно за счет разности их фазовых скоростей.

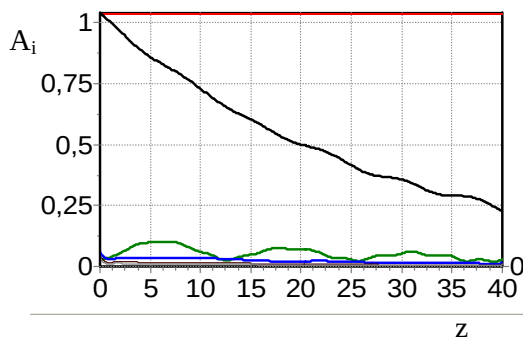


Рис. 3. $b=6$; $e_{02}=0,42$

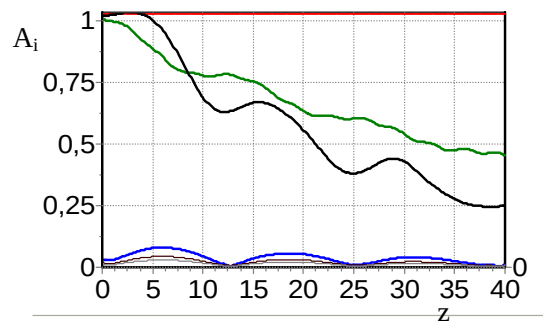


Рис. 4. $b=6$; $e_{01}=0,185$; $e_{02}=0,42$

На рис. 4 приведены результаты для варианта с $b = 6$ и одинаковыми входными мощностями волн E_{01} и E_{02} : $e_{01}^+ = 0,185$; $e_{0i>1}^+ = 0,42$. Теперь эффект преобразования выражен значительно сильнее (следует также принять во внимание и возбуждение закретических нормальных мод $E_{03}, E_{04}, E_{05}, E_{06}$).

Влияние конечной проводимости стенок электродинамической системы на характеристики оптимизированных вариантов релятивистских ЛБВ-ЛОВ

Для выяснения влияния конечной проводимости стенок были выполнены расчеты вариантов генераторов и усилителей [1] с учетом потерь. Оказалось, что при использовании электродинамической системы в виде отрезка гофрированного волновода, стенки которого выполнены из меди ($\sigma = 5,6 \times 10^7 \text{ сим/м}$) для приборов с рабочей частотой $f < 10 \text{ ГГц}$, омические потери не превосходят 1 % от генерируемой мощности и их влияние оказывается в пределах погрешности расчетов. При $f = 100 \text{ ГГц}$ омические потери достигают 3–4 %. На рис. 5. приведены характеристики варианта "длинной" ЛБВ с нерегулярным гофром:

$$\begin{aligned} \beta &= 0,9, \quad I_0 = 510 \text{ А}, \quad r_0 = 3,8, \quad \lambda_0 = 2 \text{ мм} (f = 150 \text{ ГГц}), \\ L_v &= 39,26, \quad n_v = 40, \quad b_0 = 3,49, \quad \eta_e = 56,5, \quad \eta_v = 51,6, \\ D_v &= 0, \quad h_1^v = 1,386, \quad h_2^v = 1,547, \quad h_3^v = 1,724, \quad h_4^v = 1,337, \quad h_5^v = 0,575. \end{aligned}$$

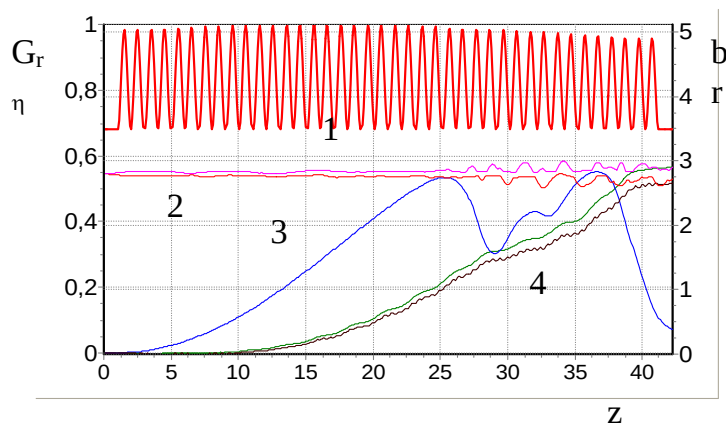


Рис. 5. 1 — b ; 2 — $r_{0\min}, r_{0\max}$; 3 — Gr , 4 — η_e, η_v

Влияние омических потерь выражается в раздвоении кривых волнового и электронного КПД. Разность $\eta_o - \eta_v$ соответствует относительной величине мощности потерь.

INFLUENCE OF METALLIC WALLS FINITE CONDUCTIVITY ON CHARACTERISTICS OF POWERFUL RELATIVISTIC SHF DEVICES WITH NON-REGULAR ELECTRODYNAMIC SYSTEMS

A.A. KURAEV, A.K. SINITSYN

Abstract

Self-consistent equations of non-regular waveguides with finite conductivity agitation are formulated. Results of test calculations of E_{01} and E_{02} waves attenuation in regular waveguide which illustrate the effect of waves transformation due to boards impedance are given. It is shown that in relativistic SHF devices with non-regular electrodynamic systems the influence of omic losses affects if the operating frequency is higher than 100 GHz.

Литература

1. Батура М.П., Кураев А.А., Синицын А.К. Моделирование и оптимизация электронных приборов СВЧ. Мн., 2006, 260 с.
2. Кураев А.А. Мощные приборы СВЧ. Методы анализа и оптимизации параметров. М., 1986, 208 с.
3. Kurayev A.A., Kolosov S.V., Stekolnikov A.F., et al. // International Journal of Electronics. 1988. Vol. 65, № 3. P. 437–462.
4. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Кураев А.А. // УФН. 2004. Т. 174, № 6. С. 639–655.
5. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М., 1983.
6. Фельдштейн А.Л., Явич Л.Р., Смирнов В.П. Справочник по элементам волноводной техники. М., 1967, 651 с.
7. Кураев А.А. Сверхвысокочастотные приборы с периодическими электронными потоками. Мн., 1971, 312 с.
8. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М., 1988, 440 с.