

УДК 621.3.017.31+621.3.017.32

## ВЛИЯНИЕ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ НА ПОТЕРИ В ШИХТОВАННЫХ И СПЛОШНЫХ МАГНИТОПРОВОДАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТОВ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

© 2006 г. И.Б. Подберезная, Б.Н. Лобов, О.Ф. Ковалёв

Единственным средством получить полную информацию о магнитном поле сложных конструкций электромагнитов (ЭМ) являются численные методы. Наиболее эффективным в этом плане и широко применяемым считается метод конечных элементов (МКЭ). При использовании МКЭ решение дифференциального уравнения Пуассона заменяется эквивалентной вариационной задачей, которая в свою очередь сводится к системе алгебраических уравнений.

Другой важный класс физических задач представляют задачи, учитывающие изменение искомых величин (векторного магнитного потенциала) во времени.

Плотность тока в проводящей среде и электрическую напряжённость в этом случае представляют состоящими из «вихревой» и «потенциальной» составляющей. В предположении, что распределение магнитного потенциала внутри каждого элемента (а значит, и вихревые токи) подчиняются определенной аналитической зависимости – полиному, степень которого определяется видом конечного элемента, то и вихревые токи могут быть выражены через потенциалы узлов. В этом случае система уравнений примет вид:

$$[K]\{A\} + [C] \frac{\partial \{A\}}{\partial t} = -\{F\},$$

где  $[K]$  – глобальная матрица жёсткости;  $\{F\}$  – вектор-столбец источников поля;  $\{A\}$  – вектор-столбец векторного магнитного потенциала, описанный через базисные функции  $\{A(x, y, t)\} = [N(x, y)] \{A(t)\}$ ;  $[C]$  – матрица демпфирования, учитывающая влияние вихревых токов.

После замены производной  $\frac{\partial \{A\}}{\partial t}$  в средней точке временного интервала  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  конечной разностью

$$\frac{\partial \{A\}}{\partial t} = \frac{\{A\}_{i+1} - \{A\}_i}{\Delta t}$$

получим для любого момента времени рекуррентную схему Крэнка–Николсона (схему с центральной разностью) [1].

Выделив из уравнения неизменную и меняющуюся части на каждом итерационном шаге, обозначим величины, соответствующие началу временного ин-

тервала, индексом « $i$ », а концу – индексом « $i+1$ », получим

$$\left( [K]_{i+1} + \frac{2}{\Delta t} [C]_{i+1} \right) \{ \Delta A \}_{i+1} = -2[K]_i \{A\}_i - 2\{F\}_i^*.$$

Представим  $[K]_{i+1}$ ,  $[K]_i$ ,  $[C]_{i+1}$ ,  $[C]_i$  как

$$[K]_{i+1} = [K^*] + [\Delta K]_{i+1}, [K]_i = [K^*] + [\Delta K]_i;$$

$$[C]_{i+1} = [C^*] + [\Delta C]_{i+1}, [C]_i = [C^*] + [\Delta C]_i.$$

Здесь  $[K^*]$  и  $[C^*]$  – неизменная часть,  $[\Delta K]$  и  $[\Delta C]$  – часть, изменяющаяся на каждом шаге итерации,  $i$  – номер итерации.

В результате получим для любого момента времени

$$\begin{aligned} & \left( [K^*] + \frac{2}{\Delta t} [C^*] \right) \{ \Delta A \}_{i+1} = \\ & = -2 \left( [K^*] \{A\}_i - \{F\}_i^* \right) - \left( [\Delta K] + \frac{2}{\Delta t} [\Delta C] \right) \{ \Delta A \}_i. \end{aligned} \quad (1)$$

На каждом временном шаге решение системы (1) ищется до выполнения условия

$$\max |\{ \Delta A \}_{i+1} - \{ \Delta A \}_i| < \varepsilon_0,$$

где  $\varepsilon_0 > 0$  – заданная точность вычислений.

Переход к следующему временному шагу осуществляется с помощью соотношений:

$$\{A\}_{i+1} = \{A\}_i + \{ \Delta A \}_{i+1};$$

$$\{F\}_{i+1}^* = \{F\}_i^* + \{ \Delta F \}_{i+1};$$

$$[K]_{i+1} = [K^*] + [\Delta K]_{i+1} (\{A\}_{i+1}).$$

Итерационный процесс заканчивается при условии [2]

$$\{ \Delta \} = -[K^*] \{A\}_i + \{F\}_i^* = 0.$$

Глобальная матрица жёсткости и матрица демпфирования могут быть представлены как суммы локальных матриц элементов:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]; [C] = \sum_{e=1}^E [c^{(e)}].$$

Считая толщину элемента единичной ( $V = S_{\Delta} \cdot 1$ ), получим для матрицы жёсткости двумерного симплекс-элемента

$$[k^{(e)}] = \nu \int \frac{1}{4S_{\Delta}^2} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dS_{\Delta} =$$

$$= \nu \frac{1}{4S_{\Delta}} \left( \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} \right)$$

для полной матрицы элемента с учётом матрицы демпфирования

$$[g^{(e)}] = \nu \frac{1}{4S_{\Delta}} \left( \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} \right) +$$

$$+ \frac{2}{\Delta} \gamma \frac{S_{\Delta}}{t} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Шихтовка магнитопроводов электромагнитов переменного тока, а также применение магнитных материалов с высокими значениями удельных электросопротивлений значительно снижают потери мощности на вихревые токи. Однако при проектировании таких магнитопроводов необходимо уметь оценить влияние толщины листа (количества листов) на величину потерь, на динамические интегральные характеристики электромагнита: тяговое усилие, время трогания и срабатывания и другие. В настоящее время такая оценка осуществляется на основе экспериментальных значений удельных потерь [3] либо на основе приближенных расчетов глубины проникновения электромагнитной волны [4].

В современной практике используются приближенные рекомендации при выборе толщины листов [5]. В частности, при промышленной частоте 50 Гц применяют листы толщиной 0,35 – 0,5 мм, при частоте 400 Гц – листы толщиной 0,1 – 0,35 мм, при частотах порядка тысяч герц – листы толщиной 0,02 – 0,05 мм, а при более высоких частотах толщина листов достигает до 0,005 мм.

Рассмотрим вопросы, касающиеся влияния толщины листа на потери общей энергии, более подробно.

Исследуем вначале изменение площади треугольного элемента за счёт уменьшения его сторон в  $k_x$  раз по оси  $x$  и в  $k_y$  раз по оси  $y$ , соответственно полу-

чим  $b_i^{\text{mod}} = \frac{b_i}{k_x}$ ,  $b_j^{\text{mod}} = \frac{b_j}{k_y}$ ,  $b_k^{\text{mod}} = \frac{b_k}{k_y}$ ,  $c_i^{\text{mod}} = \frac{c_i}{k_x}$ ,

$c_j^{\text{mod}} = \frac{c_j}{k_x}$ ,  $c_k^{\text{mod}} = \frac{c_k}{k_x}$ , площадь элемента изменится

$S_{\Delta}^{\text{mod}} = \frac{S_{\Delta}}{k_x k_y}$ , тогда

$$[g^{(e)}]^{\text{mod}} = \nu \frac{k_x k_y}{4S_{\Delta} k_y^2} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} +$$

$$+ \nu \frac{k_x k_y}{4S_{\Delta} k_x^2} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} + \frac{2}{\Delta} \gamma \frac{S_{\Delta}}{12 k_x k_y} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \nu \frac{1}{4S_{\Delta}} \left( \frac{k_x}{k_y} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{k_y}{k_x} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} \right) +$$

$$+ \frac{1}{k_x k_y} \left( \frac{2}{\Delta} \gamma \frac{S_{\Delta}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right).$$

Положим, что стороны треугольных элементов изменяются пропорционально в  $k$  раз по оси  $x$  и так же по оси  $y$ , соответственно  $S_{\Delta}^{\text{mod}} = \frac{S_{\Delta}}{k^2}$ , тогда получим

$$[g^{(e)}]^{\text{mod}} = \nu \frac{1}{4S_{\Delta}} \left( 1 \cdot \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + 1 \cdot \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{k^2} \left( \frac{2}{\Delta} \gamma \frac{S_{\Delta}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right). \quad (2)$$

Из (2) видно, что уменьшение площади треугольных элементов не изменяет первую составляющую исследуемой матрицы, отвечающую за нелинейность, и в  $k^2$  раз уменьшает вторую составляющую для одного элемента.

Теперь исследуем влияние толщины пластины по оси  $z$ , положив объём слоя равным  $V = S_{\Delta} h$

$$[g^{(e)}]^{\text{mod}} = h \frac{\nu}{4S_{\Delta}} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} +$$

$$+ \left( \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} \right) + h \frac{2\gamma}{\Delta} \frac{S_{\Delta}}{t} \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

или в сокращённом виде

$$[g^{(e)}]^{\text{mod}} = h\nu[S] + h \frac{2\gamma}{\Delta t} [D],$$

где

$$[S] = \frac{1}{4S_{\Delta}} \left( \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} \right),$$

$$\text{а } [D] = \frac{S_{\Delta}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Промоделируем данный процесс на примере конкретного элемента, являющегося частью электромагнита переменного тока в системе *MathCad*, характеристики материала элемента показаны на рис. 1.

Представим полную энергию электромагнита как

$$W_{\Sigma} - W_A = W_{\text{мех}} + (Wh + Wv) + Wm,$$

где  $W_{\Sigma}$  – электрическая энергия, подводимая к обмотке;  $W_A$  – энергия потерь в омическом сопротивлении обмотки (для нашего случая положим  $W_A = 0$ );

$W_{\text{мех}}$  – механическая энергия элемента, определяемая

$$\text{как } W_{\text{мех}} = F_{\text{ЭМ}} \Delta = \frac{B_{\delta}^2 S_{\Pi}}{2\mu_0} \Delta \quad (F_{\text{ЭМ}} - \text{электромагнитная сила, } \Delta - \text{рабочий зазор, } B_{\delta} - \text{средняя индукция в зазоре, } S_{\Pi} - \text{площадь полюса электромагнита);}$$

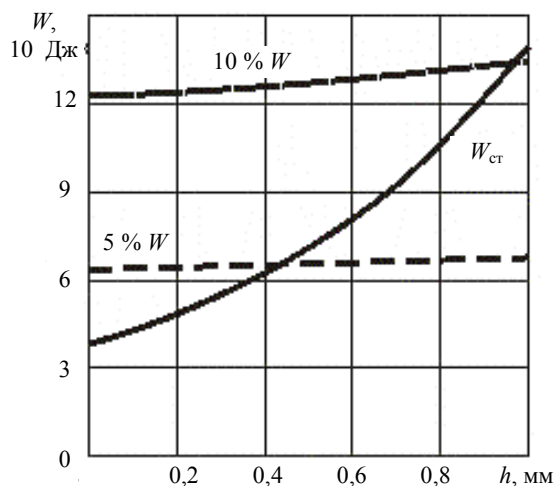
$Wm$  – запасённая магнитная энергия в объёме  $V$  элемента  $W(h) = W_{\Sigma} (B_{\text{ср}} - \text{среднее значение индукции по элементу, } H_{\text{ср}} = \frac{B_{\text{ср}}}{\mu\mu_0} - \text{среднее значение напряжённости магнитного поля, } V = S_{\Delta} h - \text{объём элемента);}$

$Wv = \frac{1}{24} \gamma (2\pi f)^2 h^2 B_{\text{ср}}^2 FVT \frac{1}{h}$  – потери от вихревых токов для постоянного объёма элемента  $(F = \frac{3}{kh} \frac{sh}{ch} \frac{kh}{kh} - \sin \frac{kh}{kh}, k = \sqrt{\frac{(2\pi f)\mu_0\mu\gamma}{2}} [6], T = \frac{1}{f} - \text{период, } \gamma - \text{значение электрической проводимости стали, } f - \text{частота сети);}$

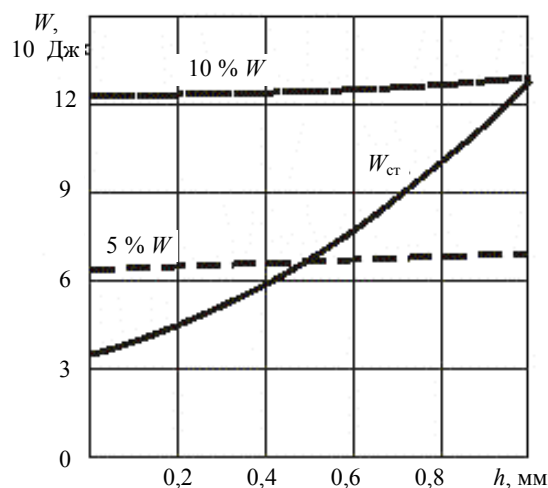
$Wh = \left( f \frac{\oint H dB}{\rho} m \right) T \frac{1}{h}$  – потери от перемагничивания для постоянного объёма элемента ( $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$  – плотность материала,  $m = \rho V$  – масса элемента, интеграл  $\oint H dB$  вычислялся по реальной кривой – сталь армко).

На рис. 1а, б, в представлены полученные в ходе моделирования зависимость полных потерь в стали ( $W_p(h) = Wv(h) + Wh(h)$ ) от толщины листа  $h$  при фиксированных частотах  $f = \{50 \text{ Гц, } 400 \text{ Гц, } 1000 \text{ Гц}\}$ ,  $W_{\Sigma}$  – полная энергия сети и, соответственно 10 и 5 % от неё. Здесь и далее потери энергии считались для постоянного объёма (изменялась только величина  $h$  – толщина листа магнитопровода).

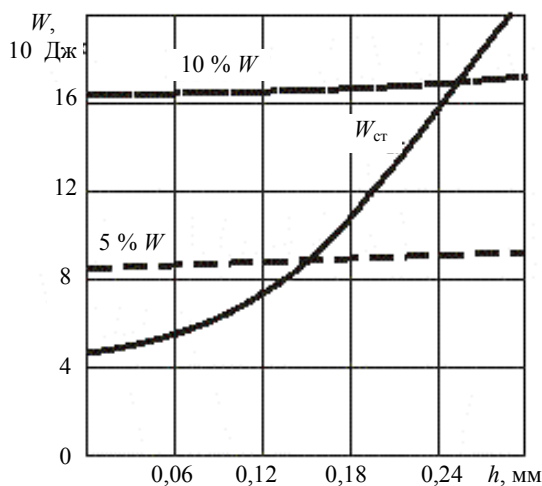
На рис. 1а, б, в представлены полученные в ходе моделирования зависимость полных потерь в стали ( $W_p(h) = Wv(h) + Wh(h)$ ) от толщины листа  $h$  при фиксированных частотах  $f = \{50 \text{ Гц, } 400 \text{ Гц, } 1000 \text{ Гц}\}$ ,  $W_{\Sigma}$  – полная энергия сети и, соответственно 10 и 5 % от неё. Здесь и далее потери энергии считались для постоянного объёма (изменялась только величина  $h$  – толщина листа магнитопровода).



а



б



в

Рис. 1. Зависимость полных потерь в стали от толщины листа при а –  $f = 50 \text{ Гц}$ ; б –  $f = 400 \text{ Гц}$ ; в –  $f = 1000 \text{ Гц}$

Для анализа полученных результатов и сравнения их с общепринятыми были рассчитаны значения мощности удельных потерь [Вт/кг] от вихревых токов и гистерезиса по формулам:

$$P_v = \frac{1}{24} \gamma (2\pi f)^2 h^2 B_{cp}^2 F \frac{1}{\rho} \times$$

$$\times \left( F = \frac{3}{kh} \frac{sh}{ch} \frac{kh}{kh} - \frac{\sin kh}{\cos kh}, k = \sqrt{\frac{(2\pi f) \mu_0 \mu \gamma}{2}} \right)$$

и  $Ph = f \frac{\oint H dB}{\rho}$  соответственно (рис. 2), а также оценена доля потерь, приходящаяся на каждый вид потерь по сравнению с общими потерями в стали (рис. 3)

$$p_v = \frac{P_v}{P_v + Ph} 100 \%,$$

$$p_h = \frac{Ph}{P_v + Ph} 100 \%.$$

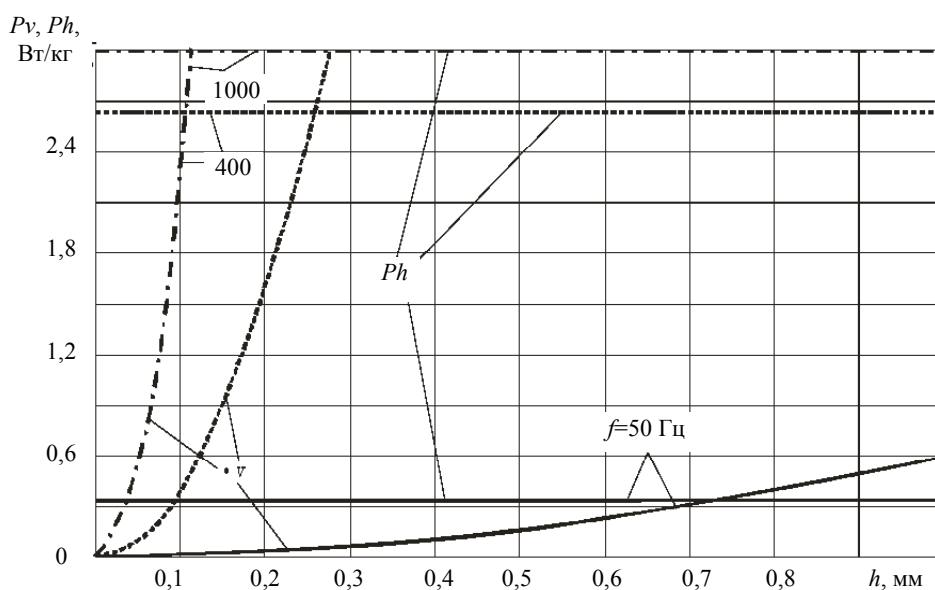


Рис. 2. Зависимости удельных потерь на вихревые токи и гистерезис от толщины листа при  $f = \{50, 400, 1000\}$  Гц

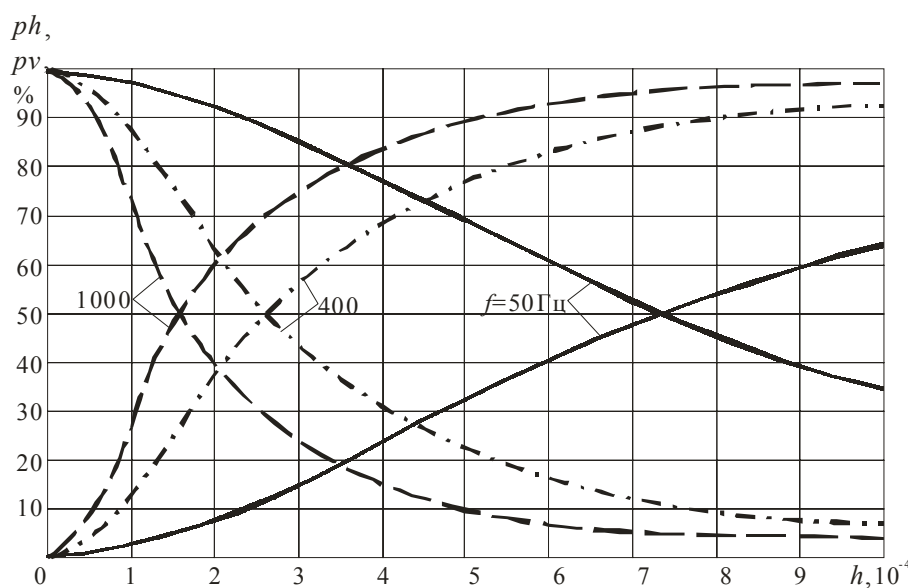


Рис. 3. Зависимость долей удельных потерь от вихревых токов и гистерезиса в процентном отношении (от общих потерь) от толщины листа  $h$  при разной частоте сети  $f = \{50, 400, 1000\}$  Гц

На рис. 4а, б, в представлены зависимости мощности потерь от вихревых токов  $P_v(f)$ , от гистерезиса  $Ph(f)$  и суммарные потери в стали в зависимости от частоты сети  $f$  при фиксированных толщинах листа (соответственно  $h = 0,5$  мм,  $h = 0,35$  мм и  $h = 0,05$  мм).

Рис. 5 содержит информацию о зависимостях долей удельных потерь от вихревых токов и гистерезиса в процентном отношении от общих потерь от частоты сети  $f$  при разной толщине листа ( $h = 0,5$  мм и  $h = 0,35$  мм соответственно).

В работе [7] были проведены исследования, на основании которых сделаны выводы о том, что в оптимальных конструкциях электромагнитов потери в стали не превышают 10–20 % от общей энергии сети.

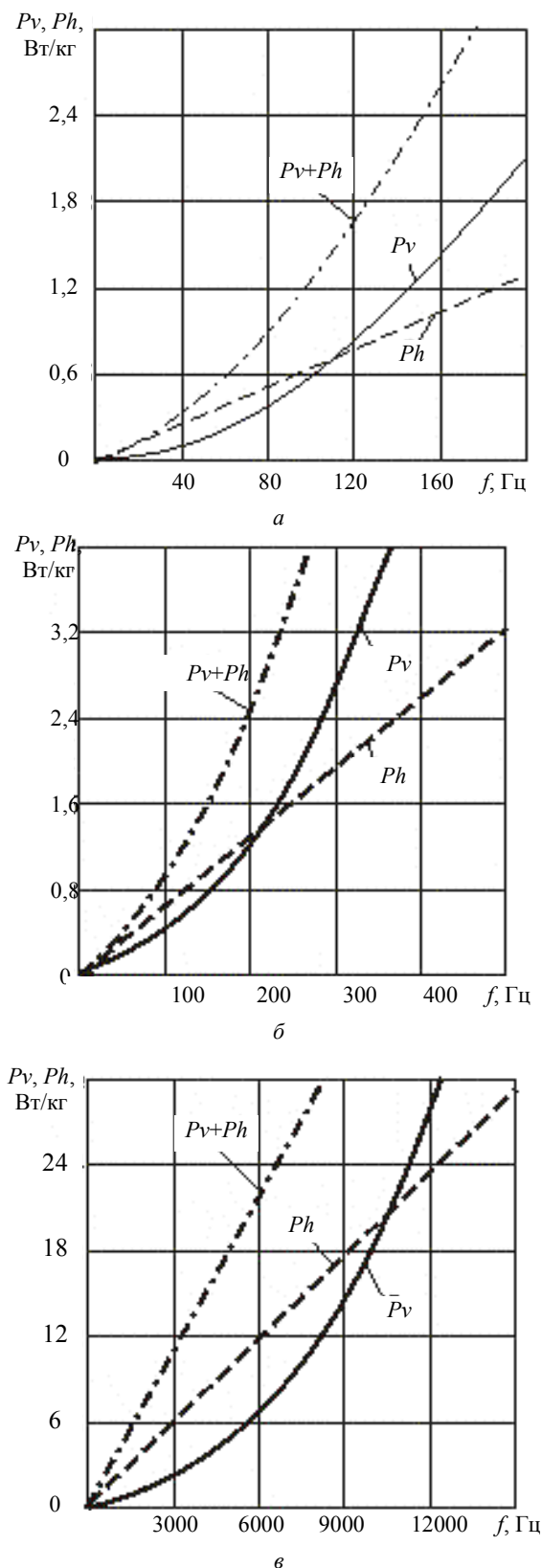


Рис. 4. Зависимость потерь на вихревые токи, гистерезис и полных потерь от частоты сети при  $a - h = 0,5$  мм;  $б - h = 0,35$  мм;  $в - h = 0,05$  мм

Основываясь на этом и анализируя зависимости, отображенные на рис. 2, можно говорить о возможности

обеспечения меньших потерь (5–10 %) при правильном выборе толщин листов, что в свою очередь не противоречит общепринятым рекомендациям [5].

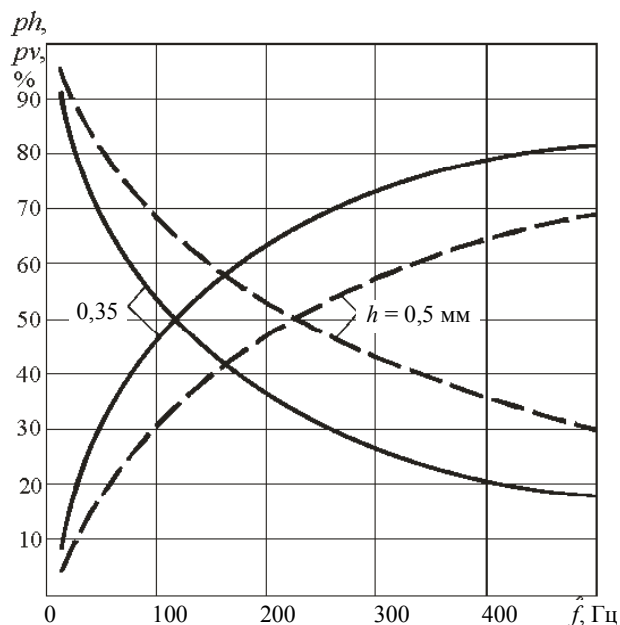


Рис. 5. Зависимость долей удельных потерь от вихревых токов и гистерезиса в процентном отношении от общих потерь от частоты сети при разной толщине листа (0,5 и  $h = 0,35$  мм)

Казалось бы, уменьшение толщины листа должно резко сокращать потери в стали, однако применение тонких сталей при сравнительно низких частотах (до 1000 Гц) ведёт к увеличению потерь от гистерезиса (рис. 3 и 5) и, кроме того, нецелесообразно с экономической точки зрения. Эти выводы совпадают с экспериментальными данными, приведёнными в [8].

Таким образом, в ходе моделирования были получены результаты, позволяющие теоретически обосновать полученные эмпирическим путём оптимальные толщины стальных листов в зависимости от различных частот сети.

#### Литература

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М., 1979.
2. Ковалёв О.Ф. Комбинированные методы моделирования магнитных полей в электромагнитных устройствах. Ростов н/Д., 2001.
3. Сахаров П. В. Проектирование электрических аппаратов. М., 1975.
4. Ламмеранер И., Штафель Ш. Вихревые токи. М., Л., 1967.
5. Общая электротехника и электроника / Н. Р. Некрасова, О. Ю. Коваленко / Под общ. ред. проф. С. А. Панфилова. Саранск, 2003.
6. Шимони К. Теоретическая электротехника. М., 1964.
7. Никитенко А.Г., Лобов Б.Н., Гринченков В.П. и др. Синтез характеристик и анализ энергетических соотношений электромагнитных механизмов переменного тока // Изв. вузов. Электромеханика. 1991. № 11. С. 63–67.
8. Дружинин В.В. Магнитные свойства электротехнической стали. М., 1974.