

В.И. Бочегов, А.С. Парахин
Курганский государственный университет

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИМЕСИ ПРИ ЗОННОЙ ОЧИСТКЕ

Аннотация. В работе рассмотрены вопросы предельного распределения примесей после зонной перекристаллизации висмута. Показано, что по мере увеличения числа проходов зоны распределение примесей приближается к некоторому предельному распределению.

Ключевые слова: расплавленная зона, предельное распределение, зонная перекристаллизация.

V.I. Bochegov, A.S. Parahin
Kurgan State University

LIMITING DISTRIBUTION OF IMPURITY IN CASE OF ZONE REFINING

Abstract. The article considers the issues of limiting distribution of impurity after floating zone refining of bismuth. It is shown that with an increase in number of zone passes, impurity distribution comes steadily to some limiting distribution.

Index terms: melted zone, limiting distribution, floating zone refining.

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В работе [1] показано, что при увеличении числа проходов зоны эффективность зонной очистки падает. Иначе говоря, существует предельное распределение, к которому стремится распределение примесей после очередного прохода зоны при неограниченном увеличении числа проходов.

Для отыскания предельного распределения примеси при зонной очистке нужно решить дифференциальные уравнения, приведённые в указанной работе, при условии, что распределение на данном проходе зоны совпадает с распределением на предыдущем её проходе. При отыскании предельного распределения нужно весь слиток разбить только на три области: первая область от начала слитка до точки с координатой $l_0 - l$, где l_0 – длина всего слитка, а l – длина расплавленной зоны. В этой области распределение должно подчиняться уравнению:

$$\frac{dc_s}{dx} = \frac{k}{l}(c_s(x+l) - c_s(x)). \quad (1)$$

В данном выражении в скобках и первое, и вто-

рое слагаемые представляют собой функцию распределения примесей на данном проходе зоны только в разных точках слитка.

Данное уравнение допускает аналитическое решение. Будем искать его решение в виде экспоненты:

$$c_{sI}(x) = Ae^{Bx}, \quad (2)$$

где A и B – константы, которые нужно найти из уравнения и дополнительных условий.

Подставим (2) в (1)

$$ABe^{Bx} = \frac{k}{l}(Ae^{B(x+l)} - Ae^{Bx}). \quad (3)$$

Сократив выражение, получим условие, накладываемое на константу B :

$$B = \frac{k}{l}(e^{Bl} - 1). \quad (4)$$

Получили трансцендентное уравнение для отыскания этой константы. Корни этого уравнения в радикалах не выражаются, поэтому оно решалось численно методом итераций. Для $k = 0.5$ получено решение $Bl = 1.25643121$.

Константа определяется из условия нормировки: средняя концентрация примеси не должна меняться.

Во второй области слитка передний фронт расплавленной зоны попадает в третью область, где кристаллизация слитка на прошлом проходе осуществлялась нормально. Поэтому уравнение, которому подчиняется функция распределения примеси во второй области, будет иметь вид:

$$\frac{dc_{sII}}{dx} = \frac{k}{l}(D(l_0 - x - l)^{k-1} - c_{sII}(x)). \quad (5)$$

Решение этого уравнения согласно работе [1] будет иметь вид:

$$c_{sII}(x) = \frac{k}{l}De^{\frac{kx}{l}} \int e^{-\frac{kx}{l}} (l_0 - x - l)^{k-1} dx + Fe^{-\frac{kx}{l}}. \quad (6)$$

Наконец, в третьей области согласно работе [1] уравнение для отыскания функции распределения имеет вид:

$$\frac{dc_{sIII}}{dx} = \frac{1-k}{l_0 - x} c_{sIII}, \quad (7)$$

решение которого есть степенная функция

$$c_{sIII}(x) = D(l_0 - x)^{k-1}. \quad (8)$$

Константы D и F находятся из условия, что функции (2), (6) и (8) на совместных границах должны быть «сшиты» непрерывно. Поэтому должны выполняться два условия:

$$c_{sI}(l_0 - 2l) = c_{sII}(l_0 - 2l), \quad (9)$$

$$c_{sII}(l_0 - l) = c_{sIII}(l_0 - l) \quad (10)$$

и условие нормировки:

$$c_{sr}l_0 = \int_0^{l_0-2l} c_{sI}(x)dx + \int_{l_0-2l}^{l_0-l} c_{sII}(x)dx + \int_{l_0-l}^{l_0} c_{sIII}(x)dx. \quad (11)$$

1 Предельное распределение примеси при $k = 2$

Рассмотрим сначала случай, при котором уравнения (1), (5) и (7) допускают элементарное решение. Положим $k = 2$. В этом случае функция (8) будет линейной функцией:

$$c_{sIII}(x) = D(l_0 - x)^{k-1}, \quad (12)$$

а интеграл в функции (6) легко находится по частям:

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{kx}{l}} (l_0 - x - l)^{k-1} dx &= \int e^{\frac{2x}{l}} (l_0 - x - l) dx = \\ &= \left| l_0 - x - l = U \right| dU = -dx \left| e^{\frac{2x}{l}} dx = dV \right| V = \frac{l}{2} e^{\frac{2x}{l}} = \\ &= \frac{l}{2} e^{\frac{2x}{l}} (l_0 - x - l) + \left(\frac{l}{2} \right)^2 e^{\frac{2x}{l}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставив это выражение в (6), найдём выражение для функции распределения примеси во второй области:

$$c_{sII}(x) = D(l_0 - x - l) + D \frac{l}{2} + F e^{-\frac{kx}{l}} = \quad (14)$$

$$= D(l_0 - x - l/2) + F e^{-\frac{kx}{l}}.$$

Из условия (9) получаем уравнение:

$$A e^{B(l_0-2l)} = D(l_0 - (l_0 - 2l) - l/2) + F e^{-\frac{2(l_0-2l)}{l}}, \quad (15)$$

преобразовав которое, получим:

$$A e^{B(l_0-2l)} = 1.5 D l + F e^{-\frac{2(l_0-2l)}{l}}. \quad (16)$$

Из условия (10) получим уравнение:

$$D(l_0 - (l_0 - l) - l/2) + F e^{-\frac{2(l_0-l)}{l}} = D(l_0 - (l_0 - l)), \quad (17)$$

снова преобразовав, получим:

$$D l / 2 + F e^{-\frac{2(l_0-l)}{l}} = D l. \quad (18)$$

Из этого уравнения выражаем константу F :

$$F = \frac{D l}{2} e^{\frac{2(l_0-l)}{l}}. \quad (19)$$

Подставим эту константу в (16):

$$\begin{aligned} A e^{B(l_0-2l)} &= 1.5 D l + \frac{D l}{2} e^{\frac{2(l_0-l)}{l}} e^{-\frac{2(l_0-2l)}{l}} = \\ &= 1.5 D l + \frac{D l}{2} e^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Из этого выражения можно выразить константу D через A :

$$D = \frac{A e^{B(l_0-2l)}}{3 + e^2} \frac{2}{l}. \quad (21)$$

С помощью (19) выражаем константу F также через A :

$$F = \frac{A e^{B(l_0-2l)}}{3 + e^2} e^{\frac{2(l_0-l)}{l}}. \quad (22)$$

В результате функция распределения во всех трёх областях будет иметь вид:

$$c_s(x) = \begin{cases} A e^{Bx}, & \text{если } 0 \leq x < l_0 - 2l \\ \frac{A e^{B(l_0-2l)}}{3 + e^2} \left[\frac{2}{l} (l_0 - x - l/2) + e^{\frac{2(l_0-l-x)}{l}} \right], & \text{если } l_0 - 2l \leq x \leq l_0 - l \\ \frac{A e^{B(l_0-2l)}}{3 + e^2} \frac{2}{l} (l_0 - x), & \text{если } l_0 - l < x \leq l_0 \end{cases} \quad (23)$$

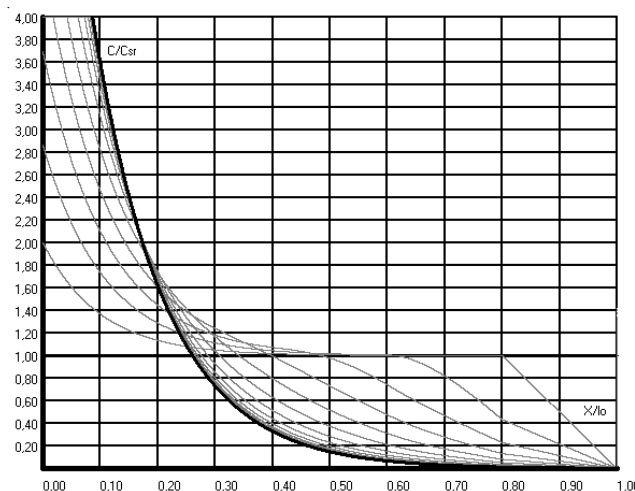


Рисунок 1 - Предельное распределение примеси при зонной очистке для коэффициента сегрегации равного 2

Для отыскания константы A найдём полную величину примеси. Для этого проинтегрируем (23) по всему слитку. Результат должен быть равен произведению средней концентрации на длину слитка:

$$c_{sr}l_0 = \frac{A}{B} (e^{B(l_0-2l)} - 1) + \frac{A e^{B(l_0-2l)}}{3 + e^2} \frac{l}{2} (5 + e^{-2}). \quad (24)$$

Из этого равенства и находим нужную константу:

$$A = \frac{c_{sr}l_0}{\frac{1}{B} (e^{B(l_0-2l)} - 1) + \frac{e^{B(l_0-2l)}}{3 + e^2} \frac{l}{2} (5 + e^{-2})}. \quad (25)$$

Построим график (рисунок 1) распределения концентрации примеси по формуле (23) с учётом (25) на фоне графиков за конечное число проходов. На рисунке 1 серым цветом представлены графики распределения примеси за конечное число проходов зоны, а жирной чёрной линией - предельный график. Как видно из рисунка, предельный график корректно описывает предельное распределение примеси по слитку после бесконечного числа проходов расплавленной зоны.

2 Предельное распределение при любом коэффициенте сегрегации

Рассмотрим теперь вопрос предельного распределения примеси для любого коэффициента сегрегации. Уравнения для областей останутся прежними, прежними останутся и функции распределения (2), (6) и (8). Для второй области интеграл будем находить по частям:

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{kx}{l}} (l_0 - x - l)^{k-1} dx &= \\ &= \left| e^{\frac{kx}{l}} = U \right|_{(l_0 - x - l)^{k-1} dx = dV} \left| dU = \frac{k}{l} e^{\frac{kx}{l}} dx \right|_V = - \frac{(l_0 - x - l)^k}{k} \\ &= -e^{\frac{kx}{l}} \frac{(l_0 - x - l)^k}{k} + \frac{k}{l \cdot k} \int e^{\frac{kx}{l}} (l_0 - x - l)^k dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Появившийся здесь интеграл снова находим по частям:

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{kx}{l}} (l_0 - x - l)^k dx &= \\ &= \left| e^{\frac{kx}{l}} = U \right|_{(l_0 - x - l)^k dx = dV} \left| dU = \frac{k}{l} e^{\frac{kx}{l}} dx \right|_V = - \frac{(l_0 - x - l)^{k+1}}{k+1} \\ &= -e^{\frac{kx}{l}} \frac{(l_0 - x - l)^{k+1}}{k+1} + \frac{k}{l \cdot (k+1)} \int e^{\frac{kx}{l}} (l_0 - x - l)^{k+1} dx. \end{aligned} \quad (27)$$

В результате искомый интеграл будет вычисляться по формуле:

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{kx}{l}} (l_0 - x - l)^{k-1} dx &= -e^{\frac{kx}{l}} \frac{(l_0 - x - l)^k}{k} + \\ &+ \frac{k}{l \cdot k} \times \left(-e^{\frac{kx}{l}} \frac{(l_0 - x - l)^{k+1}}{k+1} + \frac{k}{l \cdot (k+1)} \int e^{\frac{kx}{l}} (l_0 - x - l)^{k+1} dx \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{kx}{l}} (l_0 - x - l)^{k-1} dx &= -e^{\frac{kx}{l}} \frac{(l_0 - x - l)^k}{k} - \\ &- e^{\frac{kx}{l}} \frac{k}{l} \frac{(l_0 - x - l)^{k+1}}{k \cdot (k+1)} + \\ &+ \left(\frac{k}{l} \right)^2 \frac{l}{k \cdot (k+1)} \int e^{\frac{kx}{l}} (l_0 - x - l)^{k+1} dx. \end{aligned} \quad (29)$$

Продолжая таким образом и далее, получим формулу:

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{kx}{l}} (l_0 - x - l)^{k-1} dx &= \\ &= -e^{\frac{kx}{l}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k}{l} \right)^n \frac{(l_0 - x - l)^{k+n}}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \dots (k+n)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Покажем, что полученный ряд сходится. Для этого воспользуемся признаком Даламбера. Найдём предел отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{l} \right)^{n+1} \frac{(l_0 - x - l)^{k+n+1}}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \dots (k+n) \cdot (k+n+1)} \\ \left(\frac{l}{k} \right)^n \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \dots (k+n)}{(l_0 - x - l)^{k+n}} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{l} \frac{l_0 - x - l}{k+n+1} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Значит, согласно признаку Даламбера ряд сходится и может играть роль первообразной в формуле (6). Пользуясь этой первообразной, найдём функцию распределения во второй области слитка:

$$c_{sII}(x) = -\frac{k}{l} D \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k}{l} \right)^n \frac{(l_0 - x - l)^{k+n}}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \dots (k+n)} + Fe^{\frac{kx}{l}}. \quad (32)$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет уравнению (5). Для этого найдём производную от (32) и подставим в (5). Поскольку ряд (30) сходится, его можно дифференцировать. Производная от (32) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dc_{sII}(x)}{dx} &= \frac{k}{l} D \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k}{l} \right)^n \frac{(l_0 - x - l)^{k+n-1}}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \dots (k+n-1)} - \\ &- \frac{k}{l} Fe^{\frac{kx}{l}} = \frac{k}{l} \frac{k}{l} D \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k}{l} \right)^{n-1} \frac{(l_0 - x - l)^{k+n-1}}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \dots (k+n-1)} - \\ &- \frac{k}{l} Fe^{\frac{kx}{l}} = \frac{k}{l} D (l_0 - x - l)^{k-1} + \\ &+ \frac{k}{l} \frac{k}{l} D \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{l} \right)^{n-1} \frac{(l_0 - x - l)^{k+n-1}}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \dots (k+n-1)} - \frac{k}{l} Fe^{\frac{kx}{l}} \end{aligned} \quad (33)$$

Из полной суммы мы выделили слагаемое с $n = 0$. Последние два слагаемых в этом выражении представляют собой снова функцию $c_{sII}(x)$, только

умноженную на $\frac{k}{l}$ и с противоположным знаком. Так что из (33) следует:

$$\frac{dc_{sII}(x)}{dx} = \frac{k}{l} D (l_0 - x - l)^{k-1} - \frac{k}{l} c_{sII}(x). \quad (34)$$

Подставив это в (5), получим тождество, что и доказывает наше предположение.

Обозначим:

$$-\frac{k}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k}{l}\right)^n \frac{(l_0 - x - l)^{k+n}}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \dots (k+n)} = S(x), \quad (35)$$

тогда из (32) получим:

$$c_{sII}(x) = D \cdot S(x) + Fe^{\frac{kx}{l}}. \quad (36)$$

Пользуясь этим выражением, составим уравнения для отыскания констант, исходя из условий (9) и (10).

$$Ae^{B(l_0-2l)} = D \cdot S(l_0 - 2l) + Fe^{\frac{k(l_0-2l)}{l}}. \quad (37)$$

$$D \cdot l^{k-1} = D \cdot S(l_0 - l) + Fe^{\frac{k(l_0-l)}{l}}. \quad (38)$$

Как видно из (35)

$$S(l_0 - l) = 0. \quad (39)$$

Так что уравнение (38) упрощается:

$$D \cdot l^{k-1} = Fe^{\frac{k(l_0-l)}{l}}. \quad (40)$$

Из этого уравнения можно выразить константу F :

$$F = D \cdot l^{k-1} e^{\frac{k(l_0-l)}{l}}. \quad (41)$$

Подставим это выражение в (37):

$$\begin{aligned} Ae^{B(l_0-2l)} &= D \cdot S(l_0 - 2l) + \\ &+ D \cdot l^{k-1} e^{\frac{k(l_0-l)}{l}} e^{\frac{k(l_0-2l)}{l}} = \\ &= D \cdot S(l_0 - 2l) + D \cdot l^{k-1} e^k. \end{aligned} \quad (42)$$

Выразим константу D :

$$D = \frac{Ae^{B(l_0-2l)}}{S(l_0 - 2l) + l^{k-1} e^k}. \quad (43)$$

Тогда и константу F можно выразить через константу A :

$$F = \frac{Ae^{B(l_0-2l)}}{S(l_0 - 2l) + l^{k-1} e^k} \cdot l^{k-1} e^{\frac{k(l_0-l)}{l}}. \quad (44)$$

Функцию распределения во второй области можно представить выражением:

$$\begin{aligned} c_{sII}(x) &= \frac{Ae^{B(l_0-2l)}}{S(l_0 - 2l) + l^{k-1} e^k} S(x) + \\ &+ \frac{Ae^{B(l_0-2l)}}{S(l_0 - 2l) + l^{k-1} e^k} \cdot l^{k-1} e^{\frac{k(l_0-l-x)}{l}}, \end{aligned} \quad (45)$$

а в третьей области соответственно выражением:

$$c_{sIII}(x) = \frac{Ae^{B(l_0-2l)}}{S(l_0 - 2l) + l^{k-1} e^k} (l_0 - x)^{k-1}. \quad (46)$$

Подставив теперь эти выражения в условие нормировки (11), найдём и константу A .

График предельного распределения представлен на рисунке 2. На нём серым цветом вновь изображены графики распределения при конечном числе проходов. А жирной чёрной линией показан график предельного распределения. Как видно из рисунка, графики распределения для конечного числа проходов постепенно приближаются к предельному графику.

3 Исследование предельного распределения

Для построения графиков распределения примесей при конечном и бесконечном числе проходов была построена программа в среде программирования Делфи. С её помощью возможно исследование графиков распределений при различных условиях зонной очистки материала. Эта программа основана на результатах пункта 2 и применима для коэффициентов распределения, как меньших, так и больших единицы. В частности для $k = 2$ она даёт те же результаты, что и для расчёта по формулам (23). Исследование результатов работы этой программы показывает, что для коэффициента распределения 0.5 и относительной длине расплавленной зоны, равной 0.2, десятый проход приводит к распределению, практически совпадающему с предельным.

Если же относительную длину расплавленной зоны сделать равной 0.1, то для достаточно близкого соответствия распределения предельному нужно взять 20 проходов.

Аналогично ведёт себя функция распределения примеси и при изменении коэффициента распределения. Если для коэффициента 0.5 и ширины расплавленной зоны равной 0.2 нужно 10 проходов, чтобы практически достичь предельного распределения, то для коэффициента 0.7 количество проходов должно быть не менее двадцати.

Если же коэффициент распределения равен 0.2, то количество проходов для достижения предельного распределения будет равно 4-5.

Рассмотрим процесс очистки от примесей с коэффициентом сегрегации более единицы.

Если коэффициент сегрегации равен 1.5, то для достижения предельного распределения достаточно двадцати проходов, для $k = 2$ число таких проходов равно 10.

Но в любом случае при разумных параметрах очистки 20 проходов соответствуют практически предельному распределению.

Таким образом, чем ближе коэффициент распределения к единице, тем больше нужно проходов для достижения заданной чистоты материала. Чем меньше относительная длина расплавленной зоны, тем больше требуемое число проходов зоны.

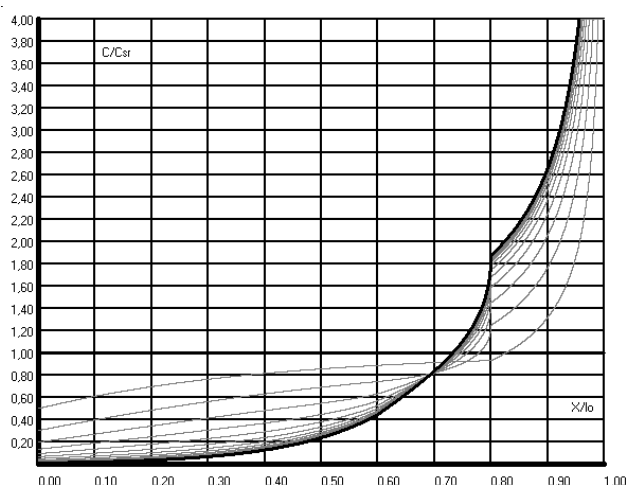


Рисунок 2 - Предельное распределение примеси после зонной очистки материала для коэффициента сегрегации, меньшего единицы

Эффективность первого прохода зоны также зависит от коэффициента сегрегации и относительной ширины расплавленной зоны. С удалением коэффициента сегрегации от единицы, степень очистки в первом проходе возрастает, так же она ведёт себя и при уменьшении относительной длины расплавленной зоны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен график предельного распределения примесей при зонной очистке. Показано, что предельное распределение описывается тремя функциями. Установлено число проходов зоны для достижения распределения, практически не отличающегося от предельного.

Список литературы

- 1 Бочегов В.И., Парахин А.С. Расчёт распределения примесей после нескольких проходов зоны // Вестник Курганского государственного университета. Серия «Естественные науки». 2012. Выпуск 5. С.83–88.
- 2 URL: http://infima.kgsu.ru/index.php?option=com_content&view=article&id=102:2013-07-26-06-19-29&catid=34:2013-07-26-05-54-26&Itemid=38
- 3 Пфан В. Зонная плавка. М: Мир, 1970. 367 с.
- 4 Cheung T., Cheung N., Tobar C. M. T., Caram R. and Garcia A. Application of a Genetic Algorithm to Optimize in the Zone Refining Process Purification // Materials and Manufacturing Processes. 2011. № 26. P. 493–500.
- 5 CheungG Thais, Cheung Noe, and Garcia Amaurl. Application of an Artificial Intelligence Technique to Improve // Journal of Electronic Materials. 2010. Vol. 39. No. 1. P. 49-55.
- 6 Mimura Kouji, Sato Takanori, Isshiki Minoru. Purification of lanthanum and cerium by plasma arc zone melting. // J Mater Sci. 2008. № 43. P. 2721–2730.
- 7 Коровкин П.П. Математический анализ. М.: Просвещение, 1974. 463 с.
- 8 Парахин А.С. Решение физических задач на ЭВМ: учебное пособие. Курган, 2000. 71 с.

УДК 538.9

А.С. Парахин, Л.В. Крайнюченко
Курганский государственный университет

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ФАЗИРОВАННОЙ АНТЕННОЙ РЕШЁТКИ

Аннотация. В работе построена модель фазированной антенной решётки. Показано, что путём изменения сдвига фаз излучения вдоль линии расположения излучателей можно менять направление главного максимума излучения и тем самым сканировать пространство на предмет обнаружения воздушных целей.

Ключевые слова: фазированная антенная решётка, модель, сдвиг фаз, главный максимум.

A.S. Parakhin, L.V. Krainyuchenko
Kurgan State University

COMPUTER MODEL OF THE PHASED ARRAY ANTENNA

Abstract. The model of a phased array antenna is designed. It is shown that by switching radiation phase along the line of transmitter layout, it is possible to change the direction of the primary maximum of radiation and by that to scan the space for the purpose of air target detection.

Index terms: phased array antenna, model, phase shift, primary maximum.

ВВЕДЕНИЕ

Для обнаружения воздушных целей используются устройства, называемые радары. Суть работы этих устройств состоит в том, что в направлении цели испускается электромагнитный импульс и фиксируется время его испускания. После некоторого времени принимается отражённый луч, и снова фиксируется время. На этот раз время прихода отражённого луча. Зная скорость распространения электромагнитного импульса и измерив время его прохождения расстояния туда и обратно до цели, можно найти расстояние до цели. Однако прежде чем измерять расстояние до цели, нужно обнаружить её в пространстве. Для этого устройство, излучающее электромагнитный импульс, поворачивают вокруг своей оси, чтобы электромагнитный импульс испускался в разных направлениях. Поскольку это устройство является механической антенной больших размеров, на её поворот требуется значительное время. Поэтому во многих случаях механическую антенну радаров стараются заменить электронной антенной, у которой направление испускания электромагнитного импульса меняется с помощью электронных устройств, сдвигающих фазу излучения соседних излучателей антенны. Такие антенны и называются фазированными антенными решётками (ФАР).

Изучение ФАР вызывает весьма значительные трудности у студентов, поэтому построение компьютерной демонстрационной модели является весьма ак-