УДК 517

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА В СМЫСЛЕ ГЛАВНОГО ЗНАЧЕНИЯ И ВАРИАНТ СВЕДЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА-СТИЛТЬЕСА К ИНТЕГРАЛУ РИМАНА-СТИЛТЬЕСА

Н.В. ШИПОВ, *доц., МГУЛ, канд. физ.-мат. наук*[(1)],
О.М. ПОЛЕЩУК, *проф., МГУЛ, д-р техн. наук*[(1)],
А.В. ШМАКОВ, *доц., МГУЛ, канд. физ.-мат. наук*[(1)]

rubinshtein_aleksandr@mail.ru, caf-math@mgul.ac.ru
[(1)] ФГБОУ ВО «Московский государственный университет леса»
141005, Московская обл., г. Мытищи-5, ул.1-я Институтская, д. 1, МГУЛ.

Найдена в явном виде альтернативная формула представления функционала – обобщенной функции $P(1/x)$ (и всех его производных) в пространстве обобщенных функций медленного роста. Наиболее широким классом производящих функций для меры множеств в интеграле Лебега-Стилтьеса, а также производящих функций в интеграле Римана-Стилтьеса, является множество функций с ограниченной вариацией. Функции с ограниченной вариацией представляются, как известно, в виде разности двух монотонных неубывающих функций. Каждая из этих двух монотонных неубывающих функций является в общем случае разрывной функцией (разрывной как слева, так и справа). Для целей изложения свойств меры Лебега-Стилтьеса и соответствующих свойств интеграла Лебега-Стилтьеса удобно считать, что монотонная производящая функция является непрерывной слева (или непрерывной только справа). При использовании интеграла Лебега-Стилтьеса в ряде случаев предлагается переопределить, в случае необходимости, каждую из двух монотонных неубывающих функций так, чтобы они стали непрерывными слева, что снижает общность изложения и применения. Разрывная производящая функция с ограниченным изменением представлена на отрезке в виде суммы непрерывной функции с ограниченным изменением, непрерывной слева функции скачков и непрерывной справа функции скачков. Обусловленная этими тремя функциями мера Лебега-Стилтьеса множества, а также соответствующий интеграл Лебега-Стилтьеса для разрывной (как справа, так и слева) производящей функции представлены в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых определяется одной из указанных выше функций. Исходный интеграл Лебега-Стилтьеса оказывается независящим от значений производящей функции в точках разрыва. В методическом плане проиллюстрировано, что из полученных разложений непосредственно следует, что если подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интеграл Лебега-Стилтьеса по отрезку $[a, b]$ совпадает с соответствующим интегралом Римана-Стилтьеса по отрезку $[a, b]$. Ранее этот факт был доказан на полуинтервале $[a, b)$ для непрерывной слева производящей функции.

Ключевые слова: функционал обобщенная функция $P(1/x)$ функции скачков, интеграл Лебега-Стилтьеса, интеграл Римана-Стилтьеса.

В теории обобщенных функций функционал $P(1/x)$ возникает так же часто (например при преобразованиях Фурье), как и другие общеизвестные универсальные функции, такие как функция Хевисайда, дельта-функция $\delta(x)$, функция знака $\mathrm{sign}(x)$ и ряд других [1-10]. В связи с этим представляется интересным более подробное изучение свойств функционала $P(1/x)$ в пространстве S' обобщённых функций медленного роста. Пространство S основных функций состоит из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $1/|x|$,

Функция

$$f(x) = \ln(x), \qquad (1)$$

локально суммируема (интегрируема по Лебегу на любом ограниченном борелевском множестве), и на всей числовой оси для неё (при некотором $n \geq 0$) выполнено неравенство

$$\int |f(x)|(1+|x|)^{-n}\,dx < \infty. \qquad (2)$$

Таким образом функция $\ln(x)$ определяет регулярную обобщённую функцию медленного роста (линейный непрерывный функционал на множестве S), причём из свойств этого функционала следует, что все производные этой функции (как обобщенные функции) существуют и непрерывны [2]. Для регулярных обобщенных функций, имеющих разрывы первого рода, существует универсальная формула, выражающая производную обобщенной функции через скачки в точках разрыва [2]. Для функций с разрывами второго рода универсальной формулы нет, так что вычисление производной от $\ln(x)$ проводим исходя из общего определения производной обобщенной функции

$$(\ln(x)', \varphi(x)) = -(\ln|x|, \varphi'(x)) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0,\varepsilon\to 0}(\varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon - \varphi(-\delta)\ln\delta +$$

$$+ \int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\varphi(x)dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)dx}{x}), \qquad (3)$$

где $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

Поскольку функционал в левой части существует, то конечное значение в правой части возможно при $\delta = \varepsilon$. Отсюда получаем выражение

$$(\ln(x)', \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)dx}{x}\right). \qquad (4)$$

Выделяя на действительной оси симметричный интервал интегрирования $(-R, R)$, где $R > 0$, и переходя к пределу, получаем окончательное выражение

$$(P(1/x)\ , \varphi(x)) = (\ln(x)', \varphi(x)) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{(\varphi(x)-\varphi(0))dx}{x}. \qquad (5)$$

Используя формулу (5), для производной $P\,'(1/x)$ имеем

$$(P'(1/x), \varphi) = -(P(1/x), \varphi') =$$

$$= -\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{(\varphi'(x)-\varphi'(0))dx}{x}.$$

Вводя функцию $\psi(x) = \varphi(x) - x\varphi'(0) - \varphi(0)$, после интегрирования по частям получаем

$$(P'(1/x), \varphi) = -(P\,(1/x^2\,), \varphi), \qquad (6)$$

где

$$(P\,(1/x^2\,), \varphi) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{(\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0))dx}{x^2}. \qquad (7)$$

Аналогичным образом продолжая процесс, приходим к окончательному выражению для функционала производной порядка n ($n = 0, 1, 2, 3\ldots$)

$$(P^{(n)}(1/x), \varphi) = (-1)^n\, n!(P\,(1/x^{n+1}), \varphi), \qquad (8)$$

$$(P\,(1/x^n), \varphi(x)) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{(\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots\frac{x^{n-1}\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!})dx}{x^n}. \qquad (9)$$

Полученные выражения могут быть использованы в расчётах для оценок производных функционала, а также для установления и проверки различных соотношений между обобщёнными функциями в пространстве S'. Например, функционал (8) удовлетворяет в S' уравнению

$$x^n\, P(1/x^n\,) = 1, \qquad (10)$$

поскольку все производные от функции $x^n\,\varphi(x)$ порядка не выше $n - 1$ обращаются в ноль при $x = 0$.

Ортонормальные функции Эрмита (волновые функции гармонического осциллятора) принадлежат пространству S и могут быть представлены в виде [5]

$$H_{2K+1}(x) = \left(\frac{(2K+1)!}{2^{2K+1}\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\sum_{M=0}^{K}\frac{(-1)^M(2x)^{2K-2M+1}}{M!(2k-2M+1)!}\exp(-x^2/2). \qquad (11)$$

Для произвольной обобщенной функции f из S' числа

$$A_n(f) = (f, H_n), \qquad (12)$$

называются коэффициентами Фурье, а формальный ряд

$$\Sigma a_n(f)\, H_n(x), \qquad (13)$$

называется рядом Фурье по ортонормальной системе функций Эрмита.

Для того, чтобы f принадлежала S', необходимо и достаточно, чтобы её коэффициенты Фурье удовлетворяли условию: существуют числа $p \geq 0$ и C такие, что

$$|a_n(f)| \leq C\,(1 + n)^p,\ n = 0, 1, \ldots \qquad (14)$$

При этом ряд Фурье f единственен, сходится к f в S' (в смысле слабой сходимости) [2].

Как следует из формул (5), (12), при вычислении коэффициентов Фурье $a_{2K+1}(f)$ для функции $f(x) = P(1/x)$, только нечётные степени будут обеспечивать ненулевой вклад в интеграл по действительной оси. По этой причине в (11) приведены только нечётные функции Эрмита, содержащие конечное число нечетных степеней x. Опуская детали ин-

тегрирования, приведём окончательный результат

$$a_{2K+1}(P(1/x)) = ((2k+1)!\pi^{1/2})^{1/2}\times$$

$$\times\sum_{M=0}^{K}\frac{(-1)^M 2^{K-2M+1}(2K-2M-1)!!}{M!(2K-2M+1)!},\ k=0,1,2,\ldots \quad (15)$$

где для унификации удобно считать (–1)! = 1.

Отметим, что число слагаемых в сумме для а $_{2K+1}$ ограничено и не превышает индекс *k*.

Выражения (14), (15) могут быть использованы для вычисления коэффициентов Фурье по ортонормальной системе функций Эрмита для других обобщенных функций, связанных с $P(1/x)$, а также для установления принадлежности этих обобщенных функций пространству *S*'.

Далее кратко приведем другой вариант доказательства теоремы о независимости интеграла Римана-Стилтьеса от значений производящей функции (с ограниченным изменением) $F(x)$ в её точках разрыва, если интегрируемая функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ [1]. Для этого используем утверждение [1]. о том, что $F(x)$ может быть представлена суммой функции скачков $\psi(x)$ и непрерывной функции $\varphi(x)$. Выразив константы функции $\psi(x)$ через скачки неубывающей $F(x)$ в точках разрыва справа и слева

$$h_i = F(x_{i+0}) - F(x_i),\ g_I = F(x_i) - F(x_i - 0), \quad (16)$$

$h_N = 0$ в точке $x_N = b$, $g_0 = 0$ в точке $x_0 = a$, приходим к следующему разложению

$$F(x) = \varphi(x) + h(x) + g(x), \quad (17)$$

где функции скачков

$$h(x) = \sum_{x_i<x} h_i,\ g(x) = \sum_{x_i\le x} g_i, \quad (18)$$

будут неубывающими непрерывными соответственно слева и справа.

В случае монотонно возрастающей непрерывной слева $F(x)$ меры интервалов (отрезков) определены [1]

$$m(\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha + 0), \quad (19а)$$

$$m[\alpha, \beta] = F(\beta+0) - F(\alpha), \quad (19б)$$

$$m(\alpha, \beta] = F(\beta +0) - F(\alpha + 0), \quad (19в)$$

$$m[\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (19г)$$

Для неубывающей функции $F(x)$, непрерывной справа, меру определяем по формулам

$$m(\alpha, \beta) = F(\beta - 0) - F(\alpha), \quad (20д)$$

$$m[\alpha, \beta] = F(\beta) - F(\alpha - 0), \quad (20е)$$

$$m(\alpha, \beta] = F(\beta) - F(\alpha). \quad (20ж)$$

$$m[\alpha, \beta) = F(\beta - 0) - F(\alpha - 0). \quad (20з)$$

Таким образом интеграл Лебега-Стилтьеса по мере, определяемой каждым из трех слагаемых в (17), представляется в виде

$$\int_{[a,b]} f(x)dF(x) = \int_{[a,b]} f(x)d\varphi(x) +$$

$$+\sum_i f(x_i)h_i + \sum_i f(x_i)g_i. \quad (21)$$

где ряды предполагаются сходящимися абсолютно.

Объединяя ряды и оставляя скачки функции $F(x)$ в граничных точках a, b за знаком суммы ряда, приходим к окончательному выражению

$$\int_{[a,b]} f(x)dF(x) = \int_{[a,b]} f(x)d\varphi(x) + \sum_{x_i\subset(a,b)} f(x_i)\times$$

$$\times(F(x_{i+0}) - F(x_i - 0)) + F(a)(F(a+0) -$$

$$- F(a)) + F(b)(F(b) - F(b-0)). \quad (22)$$

Пусть теперь $F(x)$ функция с ограниченным изменением. Поэтому она может быть представлена в виде разности двух монотонных неубывающих функций, для каждой из которых справедлива формула (22). Объединяя множество точек разрыва этих двух функций в единое множество, приходим снова к формуле (22) для произвольной функции $F(x)$ с ограниченным изменением. Для этой функции скачки в формуле (22) могут быть разных знаков. Непрерывная функция $\varphi(x)$ с ограниченным изменением в (22) определяется по исходной функции $F(x)$ и также может быть представлена в виде разности монотонных, но уже непрерывных функций.

Поскольку интеграл Лебега-Стилтьеса в (22) не зависит от значений производящей

функции $F(x)$ в её точках разрыва, лежащих внутри интервала (a, b), остается доказать, что для непрерывной функции $F(x)$ он совпадает с интегралом Римана-Стилтьеса. Существование обоих интегралов очевидно.

Для интеграла Римана-Стилтьеса достаточно для заданного ε выбрать такое δ, что в любом промежутке с длиной, меньшей δ, колебание ω функции $F(x)$ будет меньше ε / [$F(b) – Fa$)] для монотонной $F(x)$. Пусть далее отрезок [a, b] разбит на отрезки [x_i , x_{i+1}] длиной меньше δ , где x_i – произвольная монотонно возрастающая последовательность из n + 1 точек. Тогда

$$\sum_i \omega_i [F(x_{i+1}) - F(x_i)] < \varepsilon, \qquad (23)$$

откуда следует существование интеграла Римана-Стилтьеса для неубывающей функции $F(x)$, а значит и для функции $F(x)$ с ограниченным изменением [5].

Поскольку предел интегральной суммы (интеграла Римана-Стилтьеса при $max\ \Delta x_i \to 0$)

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[F(x_{i+1}) - F(x_i)], \qquad (24)$$

существует и не зависит от выбора промежуточных точек ξ_i [5], то можно считать $x_i \le \xi_i < x_{i+1}$. Но тогда сумму (24) можно рассматривать как интеграл Лебега-Стилтьеса от простой ступенчатой функции

$$\psi_n(x) = F(\xi_i),\ x_i \le x < x_{i+1}, \qquad (25)$$

где производящая функция $F(x)$ считается непрерывной слева, первые два слагаемые в (17). Мера полуинтервала [x_i , x_{i+1}) выражается формулой (19г). Функция (25) при $n \to \infty$ равномерно сходится к $F(x)$. Поэтому при переходе к пределу сумма (24) даёт интеграл Лебега-Стилтьеса от функции $F(x)$ по полуинтервалу [a,b), то есть первые два слагаемых интеграла по отрезку [a, b] в (21), поскольку $h_N = 0$ в точке b.

Третье слагаемое в (17) есть непрерывная справа функция скачков $g(x)$. Поскольку для неё интеграл Римана-Стилтьеса также существует, то справедливы предыдущие рассуждения, но уже для полуинтервала (x_i , x_{i+1}], для которого мера определяется формулой (20ж),

$$g(x_{i+1}) - g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_{i+1} - 0) = g_{i+1}.$$

Переходя к пределу, получаем третье слагаемое в (21). После объединения рядов в (21) для интеграла Римана-Стилтьеса снова приходим к формуле (22), где все интегралы должны быть заменены на интегралы Римана-Стилтьеса, а функция $F(x)$ является функцией с ограниченным изменением.

Одновременное включение в производящую функцию $F(x)$ функций скачков, непрерывных отдельно справа и слева, позволяет исключить определения интеграла Римана-Стилтьеса по различным полуинтервалам [1] и использовать общее определение интеграла Римана-Стилтьеса по отрезку [5,6], в котором промежуточная точка ξ_i может принимать все значения из отрезка [x_i, x_{i+1}].

Использование для производящей функции интеграла Римана-Стилтьеса упрощенной функции скачков ([11], с.119) приводит к тому, что функция φ(x) в соответствующем разложении (3) оказывается разрывной (с устранимыми разрывами). Однако в случае непрерывности $F(x)$ интеграл Римана-Стилтьеса не зависит от значений производящей функции в точках её разрыва, так что окончательные выражения для интеграла Римана-Стилтьеса совпадают с (22).

Библиографический список

1. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2006. – 542 с.
2. Натансон, И.П. Теория функций действительной переменной / И.П. Натансон. ― М.: Гостехиздат, 1957. – 552 с.
3. Свешников, А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О. Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов. – М.: Научный мир, 2008. – 399 с.
4. Богачев, В.И. Основы теории меры. В 2 т. Т. 2 Основы теории меры / В.И. Богачев. – М.: Научный мир, 2003. – 520 с.
5. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 3. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1970. – 656 с.
6. Никольский, С.М. Курс математического анализа. В 2 т. Т.2 Курс математического анализа / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1973. – 391 с.

7. Никольский, С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский.. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
8. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1971. – 512с.
9. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1971. – 318с.
10. Шипов, Н.В. О свойствах функционала P(1/x) в пространстве обобщенных функций медленного роста / Н.В. Шипов // Вестник МГУЛ – Лесной Вестник. – 2010. – Т. 75. – Вып. 6. – С. 183–185.
11. Покорный,Ю.В. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверев, С.А. Шабров // Успехи мат. наук. – 2008. – Т. 63. – Вып. 1. – С. 111–153.

ADDITIONAL PROPERTIES OF THE FUNCTIONAL *P*(1/*x*) AMD LEBESGUE–STIELTJES INTEGRAL CONNECTION WITH RIEMANN–STIELTJES INTEGRAL

Shipov N.V., Assoc. Prof., MSFU, Ph.D. (Physics and Mathematics)[(1)]; **Poleshchuk O.M.**, Prof., MSFU, Dr. Sci.(Tech.) [(1)]; **Shmakov A.V.**, Assoc. Prof., MSFU, Ph.D. (Physics and Mathematics) [(1)]

caf-math@mgul.ac.ru, nvshi@mail.ru
[(1)] Moscow State Forest University (MSFU), 1st Institutskaya st., 1, 141005, Mytischi, Moscow reg., Russia

The functional $P(1/x)$ and its derivatives are represented in the alternative form. The most wide class of generating functions for the Lebesgue – Stieltjes measure of the set and for the Lebesgue – Stieltjes Integral is the class of bounded variation functions. It is known, that the function of bounded variation can be written in the form of difference of two discontinuous monotone nondecreasing functions. It is convenient to explain the properties of Lebesgue – Stieltjes Integral and the properties of Lebesgue – Stieltjes measure in the case, when the monotone nondecreasing generating function is continuous from the left. It is offered sometimes to overdetermine the discontinuous generating function (discontinuous from the left and discontinuous from the right). Then the resulting generating function is turned out to be continuous from the left. Discontinuous generating function of bounded variation over the segment [a, b] is decomposed in the sum of continuous function of bounded variation, jump function (continuous from the left) and jump function (continuous from the right). Lebesgue – Stieltjes measure of the set with respect to these three functions and appropriate Lebesgue – Stieltjes Integral decomposition are represented by relevant three terms in the sum. Lebesgue – Stieltjes Integral does not depend on the values of generating function at the jump dots. It follows from these decompositions that if the function under integral is continuous over the segment [a, b], then the appropriate Lebesgue – Stieltjes Integral over the segment [a, b] is the same as the appropriate Riemann– Stieltjes Integral over the segment [a, b], not only over the half–interval [a, b).

Key words: Functional $P(1/x)$, Lebesgue – Stieltjes measure, Lebesgue – Stieltjes Integral, Riemann– Stieltjes Integral.

References

1. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional`nogo Analiza.* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1976. 542 p.
2. Natanson I.P. *Teoriya funktsiy deystvitel'noy peremennoy* [Theory of functions of the valid variable]. Moscow: Gostekhizdat Publ., 1957. 552 p.
3. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O. *Nelineynyy funktsional'nyy analiz i ego prilozheniya k uravneniyam v chastnykh proizvodnykh* [The nonlinear functional analysis and its annexes to the equations in private derivatives]. Moscow, Nauchnyy mir Publ., 2008. 399 p.
4. Bogachev V.I. *Osnovy teorii mery. V 2 t. T. 2 Osnovy teorii mery. V.I. Bogachev* [Bases of the theory of a measure. In 2 t. T. 2 Bases of the theory of a measure. V.I. Bogachev], Moscow, Nauchnyy mir Publ., 2003. 520 p.
5. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. V 3 t. T. 3. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya.* [Course of differential and integral calculus. In 3 t. T. 3. Course of differential and integral calculus]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 656 p.
6. Nikol'skiy S.M. *Kurs matematicheskogo analiza. V 2 t. T.2 Kurs matematicheskogo analiza* [Course of the mathematical analysis. In 2 t. T.2 Course of the mathematical analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 391 p.
7. Nikol'skiy S.M. *Priblizhenie funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approach of functions of many variables and theorem of an investment]. Moscow: Nauka Publ., 1969. 480 p.
8. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 512 p.
9. Vladimirov V.S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike* [The generalized functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 318 p.
10. Shipov N.V. *O svoystvakh funktsionala P(1/x) v prostranstve obobshchennykh funktsiy medlennogo rosta.* [About properties of functionality of P(1/*x*) in space of the generalized functions of slow growth] Moscow State Forest University Bulletin – Lesnoy Vestnik. 2010. Vol. 75, № 6. pp. 183 – 185.
11. Pokornyy Yu.V., Zverev M.B., Shabrov S.A. *Ostsillyatsionnaya teoriya Shturma-Liuvillya dlya impul'snykh zadach* [The oscillation theory of Storm Liouville for pulse tasks]. *Usp. Mat. Nauk* [Achievements of Mathematical Sciences], 2008, vol. 63, № 1, pp. 111-153.