

УДК 517.988

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2009 И.А. Бахтин, С.Д. Ле¹

В настоящей работе в вещественном банаховом пространстве с конусом приводятся новые признаки существования неподвижных точек экстремальных операторов. Нормальность конуса и непрерывность исследуемых операторов, вообще говоря, не предполагаются.

Ключевые слова: конус, неподвижная точка, экстремальный оператор.

1. Предварительные сведения

Приведем вначале некоторые определения и вспомогательные утверждения, которые используются в дальнейшем.

Пусть оператор A действует в вещественном банаховом пространстве E , полуупорядоченном при помощи конуса K : пишут $x \leq y$, если $y - x \in K$ [1–5].

Определение 1. Монотонный на множестве $M \subset E$ оператор A называется h -экстремальным на этом множестве [5], если для любой монотонной ограниченной снизу и сверху последовательности $(x_n) \subset M$ существуют элементы $\sup(Ax_n)$ и $\inf(Ax_n)$.

Определение 2. Линейный (непрерывный) оператор B , действующий в вещественном банаховом пространстве E с конусом K , называется положительно обратимым [2], если у него существует обратный, положительный на конусе K оператор $B^{-1} : B^{-1}K \subset K$.

Лемма 1. В вещественном банаховом пространстве E с конусом $K \subset E$ возрастающие (убывающие) последовательности элементов (x_n) и

$$y_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad (n \in \mathbf{N})$$

¹Бахтин Иван Алексеевич, Ле Суан Дай (ytkadai@yahoo.com), кафедра математического анализа Воронежского государственного педагогического университета, 394043, Россия, г. Воронеж, ул. Ленина, 86.

могут иметь точные верхние (точные нижние) границы только одновременно, и при этом выполняется равенство

$$\sup(x_n) = \sup(y_n) \quad \left(\inf(x_n) = \inf(y_n) \right).$$

Лемма 2. Пусть

- 1) в вещественном банаховом пространстве E с конусом $K \subset E$ линейный оператор $B - I$, где I — тождественный оператор, положительно обратим;
- 2) монотонный на конусном отрезке $\langle x_0, y_0 \rangle$ ($x_0 \leq y_0$) оператор A обладает свойствами:

$$Ax_0 \leq x_0, Ay_0 \geq y_0, \text{ и если } x_0 \leq x \leq y \leq y_0, \text{ то } Ay - Ax \leq B(y - x).$$

Тогда последовательность

$$x_n = (B - I)^{-1}(Bx_{n-1} - Ax_{n-1}) \quad (n \in \mathbf{N}) \quad (1)$$

монотонно возрастает, содержится в отрезке $\langle x_0, y_0 \rangle$, и выполняются неравенства

$$Ax_n \leq x_n \quad (n \in \mathbf{N}). \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$\tilde{A} = (B - I)^{-1}(B - A). \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что последовательность (1) можно записать так:

$$x_n = \tilde{A}x_{n-1} \quad (n \in \mathbf{N}). \quad (4)$$

Покажем, что оператор $\tilde{A}$ монотонен на отрезке $\langle x_0, y_0 \rangle$ и преобразует его в себя. Действительно, если $x_0 \leq x \leq y \leq y_0$, то в силу условия 2) теоремы

$$\begin{aligned} \tilde{A}y - \tilde{A}x &= (B - I)^{-1}(By - Ay) - (B - I)^{-1}(Bx - Ax) = \\ &= (B - I)^{-1}[(By - Bx) - (Ay - Ax)] \geq 0, \end{aligned}$$

так как элемент $z = (By - Bx) - (Ay - Ax) \geq 0$ и, значит, в силу положительности оператора $(B - I)^{-1}$ элемент $(B - I)^{-1}z \geq 0$.

Итак $\tilde{A}y - \tilde{A}x \geq 0$ и, следовательно, $\tilde{A}x \leq \tilde{A}y$. Монотонность оператора (3) на отрезке $\langle x_0, y_0 \rangle$ установлена. Теперь докажем, что последовательность $(x_n) \subset \langle x_0, y_0 \rangle$ и возрастает. Так как $Ax_0 \leq x_0$ и $y_0 \leq Ay_0$, то

$$\begin{aligned} \tilde{A}x_0 &= (B - I)^{-1}(Bx_0 - Ax_0) = (B - I)^{-1}[(Bx_0 - x_0) + (x_0 - Ax_0)] = \\ &= x_0 + (B - I)^{-1}(x_0 - Ax_0) \geq x_0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{A}y_0 &= (B - I)^{-1}(By_0 - Ay_0) = (B - I)^{-1}[(By_0 - y_0) + (y_0 - Ay_0)] = \\ &= y_0 - (B - I)^{-1}(Ay_0 - y_0) \leq y_0. \end{aligned}$$

Но тогда в силу монотонности оператора $\tilde{A}$ на отрезке $\langle x_0, y_0 \rangle$ из $x_0 \leq x \leq y_0$ следует

$$x_0 \leq \tilde{A}x_0 \leq \tilde{A}x \leq \tilde{A}y_0 \leq y_0.$$

Поэтому оператор $\tilde{A}$ преобразует отрезок $\langle x_0, y_0 \rangle$ в себя. Следовательно, ввиду $x_0 \in \langle x_0, y_0 \rangle$ последовательность $x_n = Ax_{n-1} \in \langle x_0, y_0 \rangle$ ($n \in \mathbf{N}$), а в силу $x_0 \leq Ax_0 = x_1$ и монотонности оператора $\tilde{A}$ она монотонно возрастает.

Нам остается доказать, что

$$Ax_n \leq x_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Так как из $x_0 \leq x_1 \leq y_0$ и $x_1 = (B - I)^{-1}(Bx_0 - Ax_0)$ следует $Bx_1 - x_1 = Bx_0 - Ax_0$, то

$$x_1 = Bx_1 - Bx_0 + Ax_0 \geq Ax_1 - Ax_0 + Ax_0 = Ax_1,$$

то есть $Ax_1 \leq x_1$. Пусть установлено, что $Ax_{n-1} \leq x_{n-1}$. Тогда ввиду $x_0 \leq x_{n-1} \leq x_n \leq y_0$ и

$$x_n = \tilde{A}x_{n-1} = (B - I)^{-1}(Bx_{n-1} - Ax_{n-1})$$

будет

$$Bx_n - x_n = Bx_{n-1} - Ax_{n-1},$$

откуда

$$x_n = Bx_n - Bx_{n-1} + Ax_{n-1} \geq Ax_n - Ax_{n-1} + Ax_{n-1} = Ax_n$$

и, значит, $Ax_n \leq x_n$.

Лемма доказана.

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть

- 1) в вещественном банаховом пространстве E с конусом K линейный оператор $B - I$ положительно обратим;
- 2) h -экстремальный на конусном отрезке $\langle x_0, y_0 \rangle$, где $x_0 < y_0$ — фиксированные элементы, оператор A обладает свойствами:

$$Ax_0 \leq x_0, Ay_0 \geq y_0 \text{ и, если } x_0 \leq x \leq y \leq y_0, \text{ то } Ay - Ax \leq B(y - x).$$

Тогда существует элемент $x_* \in \langle x_0, y_0 \rangle$ такой, что $Ax_* = x_*$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\tilde{A} = (B - I)^{-1}(B - A)$ и последовательность

$$x_n = \tilde{A}x_{n-1} = (B - I)^{-1}(Bx_{n-1} - Ax_{n-1}) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

В силу леммы 2 она монотонно возрастает, содержится в отрезке $\langle x_0, y_0 \rangle$ и $Ax_n \leq x_n$ ($n \in \mathbf{N}$). Далее, так как

$$x_1 = (B - I)^{-1}(Bx_0 - Ax_0) = x_0 + (B - I)^{-1}(x_0 - Ax_0),$$

.....

$$x_n = (B - I)^{-1}(Bx_{n-1} - Ax_{n-1}) = x_{n-1} + (B - I)^{-1}(x_{n-1} - Ax_{n-1}),$$

то

$$x_n = x_0 + (B - I)^{-1}[(x_0 + \dots + x_{n-1}) - (Ax_0 + \dots + Ax_{n-1})],$$

откуда

$$(B - I)(x_n - x_0) = x_0 + \dots + x_{n-1} - (Ax_0 + \dots + Ax_{n-1}).$$

Поэтому ввиду $Ax_n \leq x_n$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 + \dots + x_{n-1} - (Ax_0 + \dots + Ax_{n-1}) = \\ &= B(x_n - x_0) - (x_n - x_0) = (B - I)(x_n - x_0) \leq B(y_0 - x_0), \end{aligned}$$

и, значит,

$$\frac{Ax_0 + \dots + Ax_{n-1}}{n} \leq \frac{x_0 + \dots + x_{n-1}}{n} \leq B \frac{y_0 - x_0}{n} + \frac{Ax_0 + \dots + Ax_{n-1}}{n}.$$

Пусть

$$u_n = \frac{x_0 + \dots + x_{n-1}}{n}, \quad v_n = \frac{Ax_0 + \dots + Ax_{n-1}}{n}.$$

Тогда будем иметь

$$v_n \leq u_n \leq v_n + B \frac{y_0 - x_0}{n} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Так как возрастающая последовательность $(x_n) \subset \langle x_0, y_0 \rangle$ ограничена снизу и сверху, то в силу h -экстремальности оператора A существует элемент $x_* = \sup(Ax_n)$, и, значит, в силу леммы 1 и элемент $\sup(v_n) = \sup(Ax_n) = x_*$.

Теперь покажем, что $\sup(u_n) = x_*$. Так как

$$u_n \leq u_m \leq v_m + B \frac{y_0 - x_0}{m} \quad (m > n),$$

то

$$u_n \leq x_* + B \frac{y_0 - x_0}{m} \quad (m > n),$$

и, значит, $u_n \leq x_*$ ($n \in \mathbf{N}$).

С другой стороны, если $y \geq u_n$ ($n \in \mathbf{N}$), то ввиду $v_n \leq u_n$ ($n \in \mathbf{N}$) верно $v_n \leq y$ ($n \in \mathbf{N}$) и, следовательно, $x_* = \sup(v_n) \leq y$. Но тогда $x_* = \sup(u_n)$. Поэтому в силу леммы 1 $\sup(x_n) = x_*$.

Значит, элемент $x_* \in \langle x_0, y_0 \rangle$ и $x_n \leq x_*$. Поэтому в силу монотонности оператора A на отрезке $\langle x_0, y_0 \rangle$ будет $Ax_n \leq Ax_*$ ($n \in \mathbf{N}$) и потому $x_* = \sup(Ax_n) \leq Ax_*$.

Далее, так как $x_n = \tilde{A}x_{n-1} \leq \tilde{A}x_*$ ($n \in \mathbf{N}$), то $x_* \leq \tilde{A}x_*$. С другой стороны, так как

$$\tilde{A}x_* = (B - I)^{-1}(Bx_* - Ax_*) = x_* + (B - I)^{-1}(x_* - Ax_*) \leq x_*,$$

то $\tilde{A}x_* = (B - I)^{-1}(Bx_* - Ax_*) = x_*$, откуда $Bx_* - Ax_* = Bx_* - x_*$ и, значит, $Ax_* = x_*$.

Теорема доказана.

Приведем еще одну теорему такого сорта.

Определение. Монотонный на множестве $M \subset E$ оператор A называется d -экстремальным на этом множестве [5], если для любой монотонной ограниченной по норме последовательности $(x_n) \subset M$ существуют элементы $\sup(Ax_n)$ и $\inf(Ax_n)$.

Теорема 2. Пусть

- 1) в вещественном банаховом пространстве E с конусом K линейный оператор $B - I$ положительно обратим;
- 2) d -экстремальный на конусном отрезке $\langle Ax_0, y_0 \rangle$, где $x_0 < y_0$ — фиксированные элементы, оператор A обладает свойствами:
 - а) $Ax_0 \leq x_0$, $Ay_0 \geq y_0$;
 - б) если $x_0 \leq x \leq y \leq y_0$, то $Ay - Ax \leq B(y - x)$;
 - в) оператор A преобразует отрезок $\langle Ax_0, y_0 \rangle$ в ограниченное по норме множество;
- 3) множество $B^2 < 0, y_0 - x_0 \rangle \subset K$.

Тогда существует элемент $x_* \in \langle x_0, y_0 \rangle$ такой, что $Ax_* = x_*$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\tilde{A} = (B - I)^{-1}(B - A)$. Так же, как и при доказательстве леммы 2, показано, что оператор $\tilde{A}$ монотонен на отрезке $\langle x_0, y_0 \rangle$ и преобразует его в себя.

Построим последовательность

$$x_n = \tilde{A}x_{n-1} = (B - I)^{-1}(Bx_{n-1} - Ax_{n-1}) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, показано, что последовательность (x_n) монотонно возрастает, содержится в отрезке $\langle x_0, y_0 \rangle$, выполняются неравенства $Ax_n \leq x_n$ ($n \in \mathbf{N}$) и

$$\frac{Ax_0 + \dots + Ax_{n-1}}{n} \leq \frac{x_0 + \dots + x_{n-1}}{n} \leq B \frac{y_0 - x_0}{n} + \frac{Ax_0 + \dots + Ax_{n-1}}{n} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Далее, так как возрастающая последовательность (Ax_n) в силу условия 2 в) теоремы ограничена по норме, то в силу d -экстремальности оператора A существует элемент $x_* = \sup(A^2x_n)$. Поэтому по лемме 1 существует элемент $\sup(w_n) = x_*$,

где

$$w_n = \frac{A^2x_0 + \dots + A^2x_{n-1}}{n} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Введем в рассмотрение элементы

$$u_n = \frac{x_0 + \dots + x_{n-1}}{n}, \quad v_n = \frac{Ax_0 + \dots + Ax_{n-1}}{n}.$$

Покажем, что $\sup(u_n) = \sup(v_n) = x_*$. Вначале докажем, что $\sup(v_n) = x_*$. Так как $Ax_n \leq x_n$, то в силу монотонности оператора A на отрезке $\langle Ax_0, y_0 \rangle$ будет $A^2x_n \leq Ax_n$. Далее, так как в силу условия 2 б) теоремы

$$Ax_n - A^2x_n \leq B(x_n - Ax_n),$$

то

$$v_n = \frac{Ax_0 + \dots + Ax_{n-1}}{n} \leq \frac{A^2x_0 + \dots + A^2x_{n-1}}{n} +$$

$$+B \left(\frac{x_0 + \dots + x_{n-1}}{n} - \frac{Ax_0 + \dots + Ax_{n-1}}{n} \right) \leq x_* + B^2 \frac{y_0 - x_0}{n},$$

и, значит,

$$v_n \leq v_m \leq x_* + B^2 \frac{y_0 - x_0}{m} \quad (m > n).$$

Но тогда $v_n \leq x_*$ ($n \in \mathbf{N}$).

С другой стороны, если $v_n \leq y$ ($n \in \mathbf{N}$), то ввиду $w_n \leq v_n$ будем иметь $w_n \leq y$ ($n \in \mathbf{N}$), откуда $x_* \leq y$, и, значит, $\sup(v_n) = x_*$.

Далее, так как

$$u_n \leq u_m \leq v_m + B \frac{y_0 - x_0}{m} \leq x_* + B \frac{y_0 - x_0}{m} \quad (m > n),$$

то $u_n \leq x_*$ ($n \in \mathbf{N}$).

С другой стороны, если $u_n \leq y$ ($n \in \mathbf{N}$), то ввиду $v_n \leq u_n$ ($n \in \mathbf{N}$) будет $v_n \leq y$ ($n \in \mathbf{N}$), и, значит, $x_* = \sup(v_n) \leq y$. Поэтому $\sup(u_n) = x_*$.

Итак, $\sup(u_n) = \sup(v_n) = x_*$, поэтому в силу леммы 1 $\sup(x_n) = \sup(Ax_n) = x_*$.

Из $x_n \leq x_*$ в силу монотонности операторов A и $\tilde{A}$ следует, что

$$Ax_n \leq Ax_*, \quad x_{n+1} = \tilde{A}x_n \leq \tilde{A}x_*.$$

Поэтому $x_* \leq Ax_*, x_* \leq \tilde{A}x_*$.

Далее, так как

$$\tilde{A}x_* = (B - I)^{-1}(Bx_* - Ax_*) = x_* + (B - I)^{-1}(x_* - Ax_*) \leq x_*,$$

то $\tilde{A}x_* = (B - I)^{-1}(Bx_* - Ax_*) = x_*$ откуда $Bx_* - Ax_* = Bx_* - x_*$ и, следовательно, $Ax_* = x_*$.

Теорема доказана.

Литература

- [1] Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962. 394 с.
- [2] Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985. 256 с.
- [3] Крейн М.Г., Рутман М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // УМН. 1948. № 1. С. 3–95.
- [4] Бахтин И.А. Конусы в пространствах Банаха. Воронеж: ВГПИ, 1975. Ч. 1. 183 с.
- [5] Бахтин И.А. Нелинейные уравнения с монотонными операторами. Воронеж: ВГПИ, 1988. 64 с.

Поступила в редакцию 05/IV/2009;
в окончательном варианте — 19/IV/2009.

FIXED POINTS OF EXTREME OPERATORS

© 2009 I.A. Bakhtin, X.D. Le²

In this paper new signs of existence of fixed points of extreme operators in Banach space with a cone are resulted. The normality of cone and continuity of operators are not supposed.

Key words: cone, fixed point, extreme operator.

Paper received 05/IV/2009.

Paper accepted 19/IV/2009.

²Bakhtin Ivan Alekseevich, Le Xuan Dai (ytkadai@yahoo.com), Dept. of Mathematical Analysis, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, 394043, Russia.