

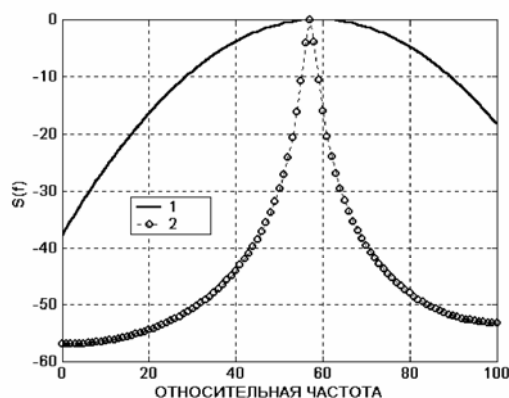


Рис. 3. Аппроксимация широкополосной СПМ моделью АР: 1 – моделируемая СПМ; 2 – аппроксимирующая СПМ

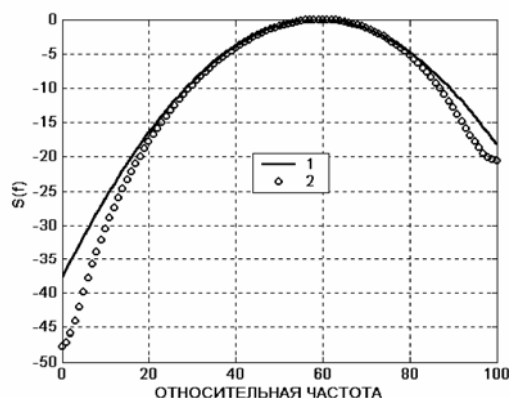


Рис. 4. Аппроксимация широкополосной СПМ моделью СС: 1 – моделируемая СПМ; 2 – аппроксимирующая СПМ

Не все полученные предложенным способом параметры модели СС могут удовлетворять условию обратимости. Если они не удовлетворяют этому условию, то формирующий фильтр СС будет устойчивым, а обесцеливающий фильтр – неустойчивым.

Выводы. Новый способ оценки параметров моделей АР и СС позволяет строить модели линейного предсказания по известным СПМ или АЧХ. Научная новизна полученных результатов заключается в том, что впервые получены соотношения, позволяющие строить модели АР и СС не по выборкам

данных случайных процессов, а по их частотным характеристикам. Предложенный способ расчета коэффициентов АР и СС расширяет возможности применения моделей линейного предсказания, что имеет практическое значение при моделировании линейных систем и случайных процессов с заданными АЧХ и СПМ. В дальнейших исследованиях следует найти выражения для оценки параметров модели авторегрессии – скользящего среднего по выборке СПМ, а также определить параметры моделей для СПМ реальных случайных процессов.

Литература: 1. Haykin S. Radar signal processing. IEEE ASSP Magazine, 1985. Vol. 2. P. 2–18. 2. Курешии Ш.У.Х. Адаптивная коррекция // ТИИЭР. 1985. Т. 73, №9. С. 5 – 497. 3. Коротаев Г.А. Эффективный алгоритм кодирования речевого сигнала на скорости 4,8 кбит/с и ниже // Зарубежная радиоэлектроника. 1996. №3. С. 57–68. 4. Марпл.-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с. 5. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. Вып. 1. 406 с. 6. Тихонов В.А., Русановский Д.Е., Тихонов Д.В. Генерация имитационных случайных процессов // Радиоелектроніка та інформатика. 1999. №4 (9). С. 83–85. 7. Тихонов В.А., Бажина А.В., Тихонов Д.В. Моделирование широкополосных случайных процессов // Збірник наукових праць ХВУ. Х.: ХВУ, 2000. Вип. 4 (30).

Поступила в редколлегию 27.12.2003

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Волощук Ю.И.

Тихонов Вячеслав Анатольевич, канд. техн. наук, доцент кафедры РЭС ХНУРЭ. Научные интересы: теория линейного предсказания, негауссовы процессы, распознавание и кодирование речи, экономическая статистика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-15-87, 700-59-01.

Доровский Владимир Витальевич, научный сотрудник ИАН НАН Украины. Научные интересы: радиоакустическое зондирование, спектральный анализ радиоакустических сигналов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, ул. Академика Проскуры, 12, тел: 43-05-01.

Горелов Денис Юрьевич, ассистент кафедры ОРТ ХНУРЭ. Научные интересы: статистический анализ временных рядов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14.

Лихошерстов Евгений Сергеевич, студент ХНУРЭ, группа АРТ 99 – 2. Научные интересы: модели линейного предсказания. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-15-87.

УДК 514.14:621.391

СИНТЕЗ ФРАКТАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИПОЦИКЛОИДЫ

ПАЩЕНКО Р.Э.

Рассматривается фрактальная недифференцируемая функция, полученная на основе гипоциклоиды (астроиды), для синтеза фрактальных сигналов. Строится фрактальный сигнал, его фазовый портрет и спектр. Оценивается фрактальная размерность сигнала в зависимости от параметра p гипоциклоиды.

1. Постановка проблемы и анализ литературы

Исследования хаотической динамики в радиотехнике и электронике охватывают широкий круг проблем, включающий как поиск и изучение новых явлений и закономерностей, так и комплексное исследование динамики конкретных систем с прикладными целями. Среди направлений, связанных с исследованием сложной динамики, фигурируют разработка и изучение генераторов хаотических (фрактальных) колебаний в различных участках электромагнитного спектра [1], электронных цепях [2], гибридных системах с оптической бистабильностью [3], а также квантовых генераторах. Большое внимание уделяется изучению возникновения и развития хаотических колебаний и разработке основных типов

математических моделей, используемых для описания хаотической динамики [1, 4]. При исследовании таких моделей важным является установление факта хаотического поведения сигнала. Необходимо также определить условия, при которых хаотические (фрактальные) сигналы обладают приемлемыми с точки зрения прикладных задач статистическими и спектральными параметрами [2]. Для отображения полной структуры хаотического сигнала динамической системы конечной размерности недостаточно знаний только реализации колебательного процесса и его фазового портрета. Необходимо также знание таких важных характеристик сигнала, как его размерность, спектральная плотность мощности и т.д. Для всестороннего изучения динамики поведения хаотического (фрактального) сигнала следует провести их структурный синтез. Фрактальный анализ и синтез сигналов базируется на теории фрактальных функций, которые позволяют характеризовать поведение динамических систем конечных размеров с хаотическими колебаниями [4]. В работе [5] рассмотрен структурный синтез фрактальных сигналов с использованием циклоидальной функции, а также проведена оценка фрактальной размерности при изменении параметров циклоиды. Увеличить дискретизацию фрактальных размерностей синтезируемых сигналов можно, используя фрактальную функцию на основе гипоциклоиды.

Цель исследования – рассмотреть новую фрактальную недифференцируемую функцию, полученную на основе гипоциклоиды, и показать возможность ее применения для решения задачи синтеза фрактального сигнала.

2. Гипоциклоида

Рассмотрим особенности гипоциклоидальных функций. Если больший круг будет неподвижен, а меньший будет катиться, касаясь его *изнутри* (рис. 1), то любая точка окружности меньшего круга опишет кривую, называемую гипоциклоидой (ГЦ).

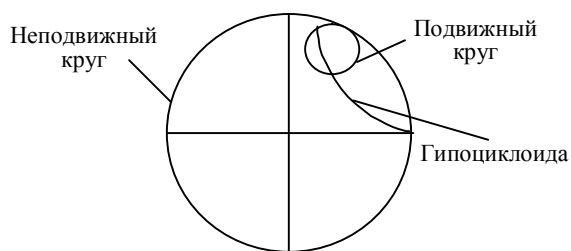


Рис. 1. Построение гипоциклоиды

Уравнения для ГЦ целесообразно представить в параметрической форме [6]:

$$\begin{aligned} x &= (R - a)\cos(t) + a\cos\left((R - a)\frac{t}{a}\right), \\ y &= (R - a)\sin(t) - a\sin\left((R - a)\frac{t}{a}\right), \quad 0 < t < 2\pi, \end{aligned} \quad (1)$$

где R – радиус неподвижного круга; a – радиус подвижного круга; t – производящий угол (угол качения круга).

Если радиус подвижного круга будет в два, три, вообще в p раз меньше радиуса неподвижного, то получится ГЦ с двумя, тремя, вообще с p заострениями. На рис. 2 изображены гипоциклоиды с четырьмя и шестью заострениями.

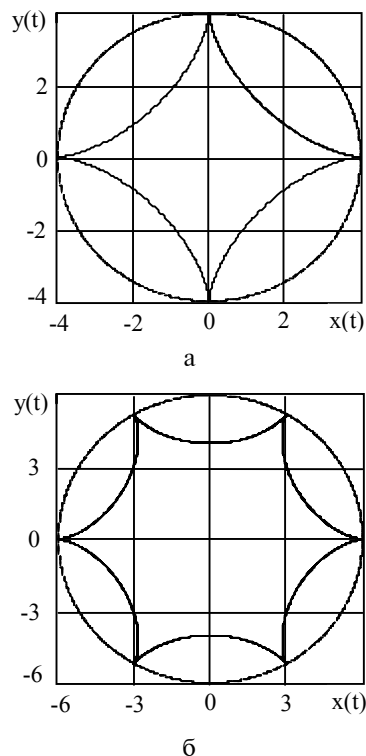


Рис. 2. Гипоциклоиды с четырьмя (а) и шестью (б) заострениями

Если радиус подвижного круга обозначен через a , а радиус неподвижного – через $R = pa$, то для длины одной арки гипоциклоиды $\ell_{ГЦ}$ и для площади $S_{ГЦ}$ между одной аркой ГЦ и неподвижной окружностью имеют место формулы

$$\ell_{ГЦ} = \frac{8(p-1)}{p}a, \quad (2)$$

$$S_{ГЦ} = \frac{3p-2}{p}\pi a^2. \quad (3)$$

При неограниченном возрастании параметра p правая часть выражения (3) будет стремиться к $3\pi a^2$, т.е. к площади, ограниченной аркой обыкновенной циклоиды и ее основанием, что говорит о родственной связи гипоциклоиды и циклоиды.

Частным случаем приведенных выше гипоциклоид является ГЦ с четырьмя заострениями, для которой $R = 4a$. Для этого случая после элементарных преобразований (1) получим уравнения кривой в параметрической форме [7]:

$$x = 4a \cos^3(t), \quad y = 4a \sin^3(t). \quad (4)$$

Кривая, построенная в соответствии с (4), называется астроидой.

Для астроида, в соответствии с (2) и (3), длина одной арки и площади между нею и неподвижной окружностью соответственно равны

$$\ell_a = 6a, \quad S_a = 2,5\pi a^2. \quad (5)$$

При вращении одной арки вокруг отрезка, соединяющего противоположные острия астроида, образуется поверхность, ограничивающая тело, объем которого равен

$$V_a = \frac{1024}{105} \pi a^3 \approx 9,75283\pi a^3. \quad (6)$$

Гипоциклоида, также как и обыкновенная циклоида, “порождает” синусоиду. Используя выражения для площади, ограниченной аркой циклоиды и ее основанием $S_{\text{ц}} = 3\pi a^2$, для площади, ограниченной синусоидальной функцией одной арки циклоиды и ее основанием $S_c = 2\pi a^2$, а также выражение (3), можно показать, что и в этом случае площадь синусоиды однозначно связана с площадью гипоциклоиды [6]:

$$S_{\text{сг}} = \frac{S_{\text{гц}}}{S_{\text{ц}}} S_c = \frac{2(3p-2)}{3p} \pi a^2. \quad (7)$$

Следует отметить, что синусоида заключена между аркой ГЦ и окружностью неподвижного круга. В частном случае площадь синусоиды, связанной с астройдой, в соответствии с (7), равна

$$S_{\text{са}} = \frac{5}{3} \pi a^2. \quad (8)$$

Как и следовало ожидать, площадь синусоиды, порождаемой ГЦ, также как и в случае с циклоидой, зависит от параметра a . Взаимосвязь синусоиды и циклоиды показана в работе [5]. Кроме того, площадь синусоиды на основе ГЦ зависит от параметра p (см. выражение (7)).

3. Фрактальная недифференцируемая функция

Фрактальная функция (ФФ) должна обладать свойствами самоподобия и инвариантности, а также недифференцируема в некоторых точках.

Поскольку свойства ГЦ очень похожи на свойства обыкновенной циклоиды, то можно считать, что ФФ, полученная на основе гипоциклоиды, обладает свойствами самоподобия, масштабной инвариантности и недифференцируема в некоторых точках, также как и ФФ на основе циклоиды, которая показана в [5].

Фрактальность циклоидальных функций тесно связана с ее дифференциальными свойствами. Рассмотрим некоторую непрерывную функцию $y = f(x)$, представленную на рис. 3.

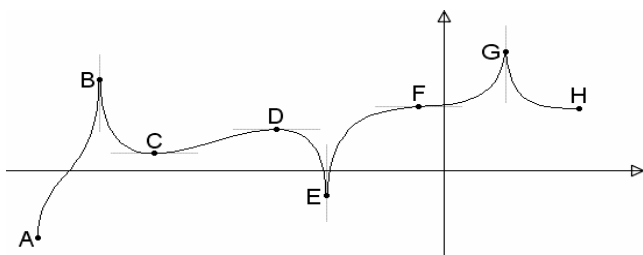


Рис. 3. К пояснению дифференциальных свойств циклоидальных функций

Из рис. 3 видно, что $f(x)$ имеет в точке E минимальную величину, а в точке B — максимальную. Но абсциссу x какой-нибудь из этих точек получить, как критическую величину из уравнения $f'(x) = 0$, невозможно, так как ни для одной из этих точек производной $f'(x)$ не имеется. Действительно, две пары кривых дуг AB и BC, DE и EF имеют в точках B и E прикосновение к вертикальным прямым.

Поэтому, если составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для абсциссы x точек B или E, то видно, что абсолютная величина этого отношения стремится к $+\infty$, когда $\Delta x \rightarrow 0$. Отсюда следует, что производной $f'(x)$ быть не может и, значит, абсцисса x ни в одной из точек B и E не может быть получена, как критическая величина, из уравнения $f'(x) = 0$. Рассмотренные точки B и E называются *остриями* и при исследовании всевозможных значений функций $y = f(x)$ их нужно учитывать [7]. Анализируя ЦФ, с учетом изложенного выше, видим, что гипоциклоида является непрерывной функцией, не имеющей производных в остриях.

Перейдем к рассмотрению конкретной недифференцируемой функции на основе гипоциклоиды в виде астроида. Определим вспомогательную функцию (астроидальную функцию нулевого ранга) $F_0(x, y) = 0$ (рис. 4):

$$F_0(x, y) : \begin{cases} x = 4a \cos^3(t) \\ y = 4a \sin^3(t) \end{cases}, \quad a = 1, \quad 0 < t \leq 2\pi, \quad (9)$$

где $F_0(x+1, y) = F_0(x, y)$.

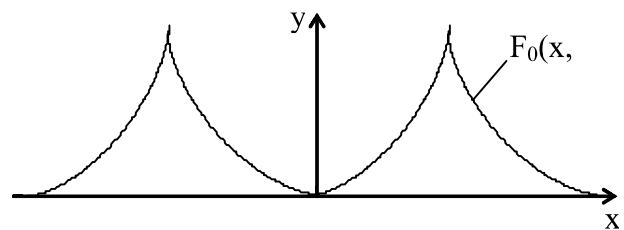


Рис. 4. Астроидальная функция нулевого ранга

Функция $F_0(x, y)$ — непрерывная на всей числовой оси, периодическая с нормированным периодом 1. Можно показать, воспользовавшись методикой, рассмотренной в [8], что астроидальная функция n -го ранга $F_{na}(x, y)$ связана с астроидальной функцией нулевого ранга выражением

$$F_{na}(x, y) = \frac{F_0(4^n x, y)}{4^n}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (10)$$

которое позволяет провести построение фрактальной недифференцируемой функции.

Согласно (10) такая функция представлена на рис.5 для $n = 1, 2, 3$.

Функция $F_{na}(x, y)$ определяет расстояние между точкой x и ближайшей к ней точкой $\frac{m}{4^{-n}}$. При предельном переходе ($n \rightarrow \infty$) точка x приближается к предельной точке.

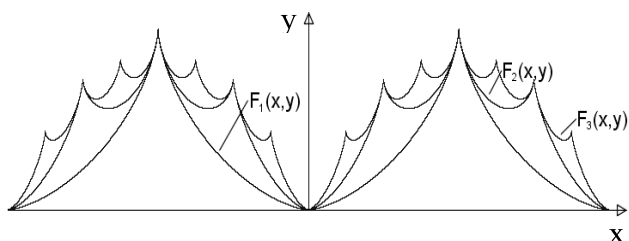


Рис. 5. Астроидальная фрактальная функция

Таким образом, астроидальная функция является фрактальной, так как она в соответствии с (10) обладает свойствами самоподобия и инвариантности, а также недифференцируема в некоторых точках.

4. Структурный синтез фрактального сигнала

Синтез синусоидального сигнала, соответствующего гипоциклоиде, проведем с использованием ФФ, полученной на основе вспомогательной астроиды.

Так как функция, определенная выражением (10), является фрактальной, то использование функции

$$F_{na}(y_a) = \frac{F_{0a}(4^n, y_a)}{4^n}, \quad n > 0, \quad a > 0 \quad (11)$$

позволяет синтезировать сигнал на основе синусоиды, соответствующей гипоциклоиде.

Синусоидальная функция поставлена во взаимно-однозначное соответствие циклоидальной и гипоциклоидальной функции [6]. Это соответствие определяется общим параметром этих функций, которым является радиус окружности производящего круга a . Отсюда следует, что знание циклоидальной и гипоциклоидальной функции, а также ее параметров позволяет синтезировать синусоидальный сигнал.

В общем виде синтезированный фрактальный сигнал на основе ГЦ представляется выражением

$$y_r(a, p, x) = \sum_{n=0}^N \frac{q_r a}{k^n} \sin(k^n x + x_0), \quad (12)$$

где $q_r = \frac{3p-2}{3p}$; k – коэффициент подобия (масштабный коэффициент) синусоидальных функций; p – число гармоник; x_0 – случайная начальная фаза.

Анализ (12) показывает, что фрактальный сигнал определяется радиусом окружности производящего круга гипоциклоиды a , параметром p , коэффициентом подобия k и числом классов N при разбиении множества функции $y_r(a, p, x)$. Взяв произ-

водную $z = \frac{dy}{dx}$, можно построить фазовый портрет синтезированного фрактального сигнала, а в результате преобразования Фурье получить спектр сигнала.

На рис. 6 показаны синтезированный в соответствии с (12) фрактальный сигнал, его фазовый портрет и спектр при $a = 1$, $k = 4$, $n = 8$ и целочисленном значении $p = 2$.

На рис. 6, а показан один период фрактального синусоидального сигнала на основе гипоциклоиды. Из рис. 6, б видно, что внешний вид фазового портрета представляет собой достаточно сложную структуру и свидетельствует о хаотическом характере фрактального сигнала на основе гипоциклоиды. Спектр фрактального сигнала (рис. 6, в) имеет основной пик и одну боковую составляющую.

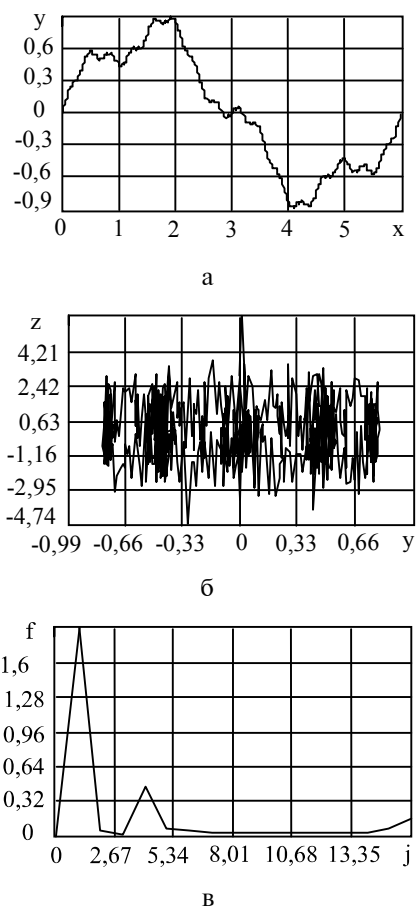


Рис. 6. Синтезированный фрактальный сигнал (а), его фазовый портрет (б) и спектр (в)

5. Численный анализ размерности фрактального сигнала

Для оценки размерности фрактальной недифференцируемой функции и, как следствие, фрактальной размерности сигнала необходимо выбрать тип меры, который определяется из чисто геометрических соображений.

Для анализа размерности наиболее удобно использовать плоскую H -меру Хаусдорфа [8]. В рассматриваемом случае для гипоциклоидальной функции

и соответствующей ей синусоиды такими мерами являются следующие:

$$h_{\text{ГЦ}}(a) = \frac{3p-2}{p} \pi \cdot a^2, \quad (13)$$

$$h_{\text{сГЦ}}(a) = \frac{2(3p-2)}{3p} \pi \cdot a^2. \quad (14)$$

Для численного анализа фрактальной размерности рассматриваемых функций воспользуемся известным выражением размерности Хаусдорфа [3]:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 N(\varepsilon)}{\log_2 1/\varepsilon}, \quad (15)$$

где $N(\varepsilon)$ — число пробных тел (площадей гипоциклоид, синусоид) с характерным размером ε . Число $N(\varepsilon)$ определяется законом подобия.

Анализ изменения фрактальных размерностей синусоидального сигнала на базе циклоиды в зависимости от параметров a , k и n проведен в работе [5] и показано, что для пространства параметров циклоиды $\{a, k, n\} = \{1, 5; 4; 8\}$ фрактальная размерность D синтезированного сигнала может изменяться от 1,02 до 1,51. Так, для $a = 1$, $k = 4$, $n = 8$ фрактальная размерность синусоидального сигнала равна $D = 1,09$. Так как свойства ГЦ похожи на свойства циклоиды, то можно утверждать, что характер изменения фрактальной размерности синусоидального сигнала на базе гипоциклоиды будет аналогичен описанному в [5]. Наличие у гипоциклоиды нового параметра p позволяет увеличить дискретизацию фрактальной размерности формируемых сигналов до 0,001.

Зависимость размерности фрактального сигнала, полученного на основе ГЦ, от параметра p для параметров гипоциклоиды $a = 1$, $k = 4$, $n = 8$, полученная с использованием выражения (13), показана на рис. 7.

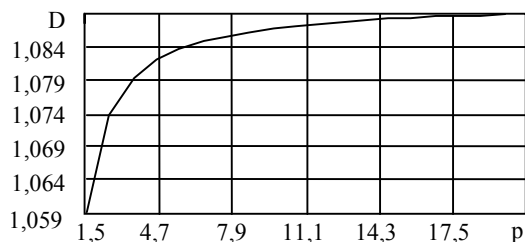


Рис. 7. Зависимость фрактальной размерности

Анализ размерности фрактального сигнала D на базе гипоциклоиды показывает, что она носит дробный характер. Это свидетельствует о том, что рассматриваемый сигнал является фрактальным. Изменение параметра p от 1,5 до 10 приводит к

изменению фрактальной размерности от 1,059 до 1,086. Дальнейшее увеличение параметра p приводит к незначительному изменению фрактальной размерности, поэтому значение параметра p целесообразно изменять от 1,5 до 5.

Таким образом, изменением параметров вспомогательной (базовой) гипоциклоидальной функции можно получать сигнал с различной фрактальной размерностью. Кроме того, изменение параметра p позволяет формировать сигналы с большей точностью.

Выводы и направления развития

1. На основе использования свойств гипоциклоиды показана возможность получения новой фрактальной недифференцируемой функции.
2. Фрактальная функция, полученная на основе гипоциклоиды, позволяет синтезировать фрактальный сигнал.
3. Изменение параметра p позволяет увеличить дискретизацию фрактальной размерности формируемых сигналов.
4. По известным параметрам гипоциклоиды можно однозначно оценивать размерность фрактального сигнала, что позволит использовать его в качестве эталонного с известной фрактальной размерностью.
5. Представляет интерес рассмотрение возможности синтеза сигналов на базе других фрактальных недифференцируемых функций.

Литература: 1. Дмитриев А.С., Кислов И.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике М.: Наука, 1989. 278с. 2. Дмитриев А.С. Перспективы создания прямохаотических систем связи в радио- и СВЧ-диапазонах // Радиотехника. 2000. №3, С. 9-21. 3. Потапов А.А. Фракталы в дистанционном зондировании земли // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2000. №6. С.3-66. 4. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424с. 5. Пащенко Р.Э., Яковлев Ю.П. Применение циклоидальной функции для синтеза фрактальных сигналов // Радиоэлектроника и информатика. 2004. № 1. С. 9-13. 6. Берман Г.Н. Циклоиды. М.: Наука, 1980. 112с. 7. Лузин Н.Н. Дифференциальное исчисление. М.: Советская наука, 1946. 451с. 8. Кравченко В.Ф., Потапов А.А., Масюк В.М. Атомарно-фрактальные функции в задачах синтеза антенн // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2001. №6. С.4-41.

Поступила в редколлегию 03.01.2004

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Андреев Ф.М.

Пащенко Руслан Эдуардович, канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры Харьковского военного университета. Научные интересы: первичная обработка сигналов, фрактальный анализ. Адрес: Украина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 6, ХВУ, тел.40-28-69.