

УДК 539.3

## К РАСЧЕТУ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЯГКОЙ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

Р. А. Сабиров

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева  
Российская Федерация, 660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31  
E-mail: rashidsab@mail.ru

*Тороидальные оболочки применяются в аэрокосмической технике. Выполнен расчет напряженного и деформированного состояния тороидальной оболочки на действие внутреннего давления; уравнения равновесия составлены по деформированной схеме. При деформировании объем материала конструкции не меняется за счет уменьшения толщины стенки. При надуве оболочки разрешающее нелинейное уравнение предрекает монотонное увеличение внутреннего давления до определенного предела, а затем его понижение.*

*Ключевые слова: тороидальная оболочка, сосуды давления, напряжения, деформации.*

## CALCULATING THE DEFORMATION OF FLEXIBLE TOROIDAL SHELL

R. A. Sabirov

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology  
31, Krasnoyarsky Rabochy Av., Krasnoyarsk, 660037, Russian Federation  
E-mail: rashidsab@mail.ru

*Toroidal shell is used in aerospace technology. The calculation of the stress and strain state of the toroidal shell to the action of internal pressure; the equation of equilibrium is composed on the deformed scheme. During deformation, the volume of construction material is not changed by reducing the thickness of the wall. When inflating a shell, a resolving nonlinear equation prejudices the monotonous increase of the internal pressure to a certain limit and then decrease.*

*Keywords: toroidal shell, pressure vessels, stress, strain.*

**Введение.** Уравнения для расчета тороидальных оболочек изложены в работах [1–3].

Основы технической теории мягких оболочек, предполагающей выделение некоторого основного напряженного состояния и линеаризацию системы уравнений оболочки, приведены в [4].

Уравнения равновесия мягкой цилиндрической оболочки составляют для деформированного состояния. Незвестными величинами являются мембранные внутренние усилия и геометрия деформированной оболочки.

**Постановка задачи.** Рассмотрим тороидальную оболочку (рис. 1). Фрагмент меридионального сечения тора изобразим на рис. 1  $a$ , где обозначим:  $a$  – радиус от центра вращения тора, до вертикальной оси меридионального сечения окружности;  $R_0$  – начальный радиус срединного слоя оболочки;  $t_0$  – начальная толщина.

Приложение внутреннего давления  $q$  приводит к увеличению радиуса  $R_0$  на величину  $w$ , которую назовем расширением.

Толщина оболочки вычисляется из условия сохранения объема материала оболочки

$$t = R_0 t_0 / (R_0 + w). \quad (1)$$

Меридиональное усилие  $N_1$ , выведем из уравнения равновесия отсеченной части деформированной оболочки (рис. 2) на вертикальную ось:

$$\begin{aligned} N_1(\varphi, w) &= \frac{[2a + (R_0 + w) \sin \varphi](R_0 + w)}{2[a + (R_0 + w) \sin \varphi]} q N_1(\varphi, w) = \\ &= \frac{[2a + (R_0 + w) \sin \varphi](R_0 + w)}{2[a + (R_0 + w) \sin \varphi]} q. \end{aligned} \quad (2)$$

Широтное усилие  $N_2$  получим из уравнения Лапласа [2]:

$$N_2(w) = (R_0 + w)q / 2. \quad (3)$$

Уравнение, связывающее расширение  $w$  с нагрузкой  $q$ , основывается на законе упругости Гука [5]:

$$N_1 = \frac{Et}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad N_2 = \frac{Et}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \quad (4)$$

в котором  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона, а  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – относительные деформации срединной поверхности оболочки:

$$\varepsilon_1 = w / R_0, \quad \varepsilon_2 = w \sin \varphi / (a + R_0 \sin \varphi). \quad (5)$$

Нелинейное уравнение задачи, в котором расширение  $w = w(q, \varphi)$ , следующее

$$\frac{Et_0 w}{(1-\mu^2)(a+R_0 \sin \varphi)(R_0+w)^2} \times \left\{ \frac{a+R_0(1+\mu) \sin \varphi}{R_0+w} + \frac{[R_0(1+\mu) \sin \varphi + \mu a] \sin \varphi}{a+R_0 \sin \varphi} \right\} = q. \quad (6)$$

Здесь  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $q > 0$ .

**Расчет.** В качестве примера тора рассмотрим резиновую камеру колеса автомобиля. Физические характеристики материала:  $E = 10^6$  Па,  $\mu = 0,499$ ; результаты обмера камеры:  $R_0 = 0,065$  м,  $a = 0,215$  м,  $t_0 = 0,002$  м.

Представим результаты расчета на линиях широты, координаты которых  $\varphi = -\pi/2$ ,  $\varphi = -\pi/4$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/4$ ,  $\varphi = \pi/2$  при давлении  $q = 6000$  Па.

На рис. 3 представим деформированный вид меридионального сечения, соответствующее первому корню, полученному при решении уравнения (6).

В таблице представим прогибы и напряжения. В столбце 2 выписаны расширения  $w^{(1)}$ , соответствующие первому корню решения уравнения (6), а в столбце 3 – решения  $w^{(2)}$ , отвечающие второму корню решения уравнения (6). В столбце 4 записаны меридиональные напряжения решения задачи  $\sigma_1$ , а в столбце (6) – широтные напряжения  $\sigma_2$  при расширении  $w^{(1)}$ .

В столбцах (5) и (7) вычислены меридиональные напряжения  $\sigma_1^{\text{II}}$  и широтные напряжения  $\sigma_2^{\text{II}}$  геометрически линейной задачи, в которой  $w = 0$ .

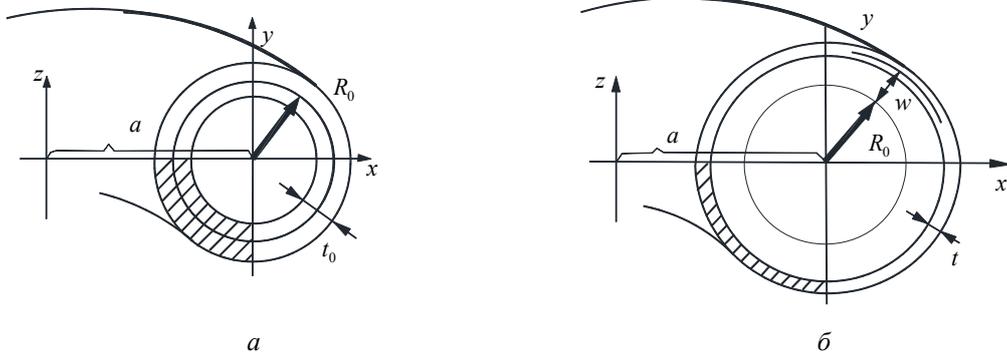


Рис. 1. Фрагмент тороидальной оболочки: а – начальный вид оболочки; б – деформированный вид

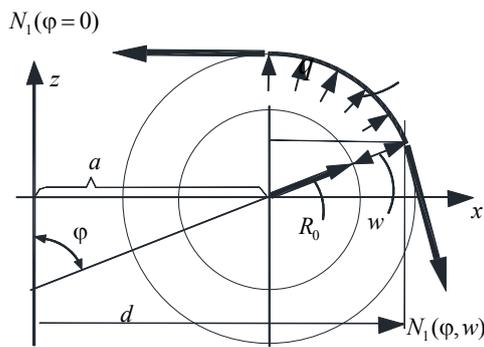


Рис. 2. Фрагмент меридионального сечения тора

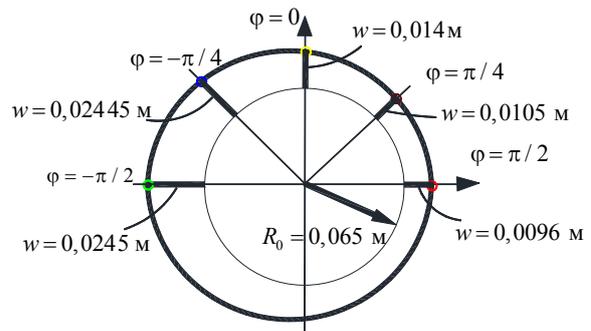


Рис. 3. Деформированное сечение

**Прогибы и напряжения**

$\varphi$	$w^{(1)}$ , м	$w^{(2)}$ , м	$\sigma_1$ , МПа	$\sigma_1^{\text{II}}$ , МПа	$\sigma_2$ , МПа	$\sigma_2^{\text{II}}$ , МПа
1	2	3	4	5	6	7
$-\pi/2$	0,0245	0,0925	21,32	20,496	0,185	0,0975
$-\pi/4$	0,02445	0,096	20,45	20,134	0,185	
0	0,014	0,3	19,85	19,85	0,144	
$\pi/4$	0,0105	0,55	20,09	20,03	0,132	
$\pi/2$	0,00963	0,6	20,29	20,194	0,129	

**Выводы.** При надуве оболочки внутреннее давление повышается до определенного предела, а затем понижается.

Каждой нагрузке  $q$  соответствует два расширения  $w^{(1)}$  и  $w^{(2)}$ .

Напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_1^I$  различаются несущественно. Самая большая разность между ними по широтной линии  $\varphi = -\pi/2$ , составляет 4 %.

#### Библиографические ссылки

1. Авдонин А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение. 1969. 402 с.
2. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М.: Наука. 1974. 560 с.
3. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.
4. Балабух Л. И., Алфутов Н. А., Усюкин В. И. Строительная механика ракет. М.: Высш. шк., 1984. 391 с.

5. Шалашилин В. И., Горшков А. Г., Трошин В. Н. Сопротивление материалов : учеб. пособие. М.: МАИ, 2000. 616 с.

#### References

1. Avdonin A. S. Prikladnye metody rascheta obolochek i tonkostennykh konstruksiy [Applied methods of calculation of shells and thin-walled structures]. M.: Mashinostroenie, 1969. 402 p.
2. Feodos'ev V. I. Soprotivlenie materialov [Mechanics of materials]. M.: Nauka, 1974. 560 p.
3. Kan S. N. Stroitel'naya mekhanika obolochek [Structural mechanics of shells]. M.: Mashinostroenie, 1966. 508 p.
4. Balabukh L. I., Alfutov N. A., Usyukin V. I. Stroitel'naya mekhanika raket [Structural mechanics of rockets]. M.: Vyssh. shk., 1984. 391 p.
5. Shalashilin V. I., Gorshkov A. G., Troshin V. N. Soprotivlenie materialov [Mechanics of materials] : Ucheb. posobie. M.: MAI, 2000. 616 p.

© Сабиров Р. А., 2017