ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-617-623
УДК 517.988.8

СХОДИМОСТЬ В СИЛЬНЫХ НОРМАХ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

А. С. Бондарев

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: bondarev@math.vsu.ru

Аннотация. В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается абстрактное линейное параболическое уравнение с периодическим условием на решение. Данная задача решается приближенно проекционно-разностным методом с использованием по времени неявной схемы Эйлера. По пространству дискретизация задачи проводится методом Галеркина. Получены эффективные по времени и по пространству оценки в сильных нормах погрешности приближенных решений, из которых следует сходимость приближенных решений к точному, а также порядки скорости сходимости, зависящие от гладкости точного решения.
Ключевые слова: гильбертово пространство; параболическое уравнение; гладкая разрешимость; периодическое условие; неявная схема Эйлера

Введение

В настоящей работе решение параболического уравнения с периодическим условием на решение находится полностью дискретным проекционно-разностным методом с использованием метода Галеркина по пространству и неявной схемы Эйлера по времени. Заметим, что энергетические оценки погрешности данного метода в условиях слабой разрешимости задачи были установлены в работе [1]. В настоящей работе представлены оценки в сильных нормах погрешности приближенного решения при более жестких ограничениях в предположениях гладкой разрешимости исходной задачи.

Отметим, что в случае, когда параболическое уравнение рассматривается с начальным условием (задача Коши), оценки в сильных нормах погрешности для проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени установлены в работе [2].

1. Основные понятия

Пусть даны вложенные сепарабельные гильбертовы пространства $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным. Оба вложения плотны и непрерывны. Рассмотрим полуторалинейную по $u, v \in V$ форму $a(u,v)$. Пусть для $u, v \in V$

$$|a(u,v)| \le \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(u,u) \ge \alpha \|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$, такой, что $(Au, v) = a(u,v)$, где выражение типа (z,v) есть значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если $z \in H$, то (z,v) – скалярное произведение в H [3, гл. 2].

Для нормированного пространства X далее будем обозначать через $C([0,T],X)$ пространство непрерывных функций, действующих на отрезке $[0,T]$, со значениями в пространстве X; через $L_p(0,T;X)$ – пространство измеримых на отрезке $[0,T]$ функций со значениями в X, суммируемых с p-й степенью по норме пространства X.

Рассмотрим в V' на $[0,T]$ параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \tag{2}$$

Здесь и далее производные функций понимаются в обобщенном смысле. В [4, с. 289] показано, что для заданного $f \in L_2(0,T;V')$ существует (и притом единственное) решение $u \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$ задачи (2).

Далее будем считать, что выполнены условия гладкой разрешимости, то есть справедлива следующая теорема [5].

Теорема 1. *Пусть вложение $V \subset H$ компактно, а форма $a(u,v)$ удовлетворяет требованиям (1). Пусть функция $t \to f(t) \in V'$ дифференцируема, $f' \in L_2(0,T;V')$, и выполняется равенство $f(0) = f(T)$. Тогда решение задачи (2) будет таким, что $u' \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H)$, $u'' \in L_2(0,T;V')$.*

Пусть V_h, где h – положительный параметр, есть конечномерное подпространство пространства V. Определим пространство V'_h, задав на элементах $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V'_h} = \sup |(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$, $\|v_h\|_V = 1$. Отметим, что $\|u_h\|_{V'_h} \le \|u_h\|_{V'}$.

Пусть P_h – ортопроектор в пространстве H на V_h. Как замечено в [6], оператор P_h допускает расширение по непрерывности до $\overline{P_h} : V' \to V_h$, причем для $u \in V'$ справедливо $\|\overline{P_h}u\|_{V'_h} \le \|u\|_{V'}$.

Для построения приближенных решений возьмем равномерное разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$ отрезка $[0,T]$, где $N \in \mathbb{N}$. В подпространстве $V_h \subset V$ рассмотрим периодическую разностную задачу: для $k = \overline{1,N}$

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P_h}Au_k^h = \overline{P_h}f(t_k), \quad u_0^h = u_N^h, \tag{3}$$

где $\tau N = T, t_k = k\tau$.

Таким образом, процесс нахождения приближенного решения задачи (2) сводится к нахождению решения конечной линейной алгебраической системы уравнений (3), однозначная разрешимость которой установлена в [1].

Далее будем предполагать, что форма $a(u,v)$ является симметричной, то есть $a(u,v)=\overline{a(v,u)}$, где черта над комплексным числом означает переход к сопряженному числу.

Определим гильбертово пространство

$$V(A)=\{u,v\in V \mid (u,v)_{V(A)}=a(u,v)\}.$$

Из (1) следует, что нормы в пространствах V и $V(A)$ эквивалентны, то есть

$$\alpha^{1/2}\|u\|_V\le\|u\|_{V(A)}\le\mu^{1/2}\|u\|_V\quad(u\in V).$$

Лемма 1. *Для $u\in V$ справедлива оценка*

$$\|[I-Q_h(A)]u\|_V\le\alpha^{-1/2}\|[I-Q_h(A)]u\|_{V(A)}\le\alpha^{-1/2}\mu^{1/2}\|(I-Q_h)u\|_V,$$

где $Q_h(A)$ – ортопроектор в $V(A)$ на V_h, а Q_h – ортопроектор в V на V_h.

2. Основные результаты

Теорема 2. *Пусть для задачи (2) выполнены условия теоремы 1 и форма $a(u,v)$ симметрична. Пусть $u(t)$ – решение задачи (2), обладающее дополнительной гладкостью $u''\in L_p(0,T;H)$, где $1\le p\le 2$, а $(u_0^h,u_1^h,\ldots,u_N^h)$ – решение задачи (3). Тогда справедлива оценка погрешности*

$$\max_{0\le k\le N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+$$

$$\sum_{k=1}^N\left\|u'(t_k)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\le C\left\{\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}+\right.$$

$$\left.\int_0^T\|[I-Q_h(A)]u'(t)\|_H^2\,dt+\max_{0\le t\le T}\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\right\}. \qquad (4)$$

Сходимость погрешности приближенных решений к нулю естественным образом следует из оценки (4). Предположим для этого, что задана предельно плотная в V при $h\to 0$ последовательность подпространств $\{V_h\}$. Это означает, что $\|(I-Q_h)v\|_V\to 0$ при $h\to 0$ для любого $v\in V$. Тогда при $\tau\to 0$ и $h\to 0$

$$\max_{0\le k\le N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+$$

$$\sum_{k=1}^N\left\|u'(t_k)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\to 0.$$

В случае, когда известна числовая характеристика предельной плотности последовательности подпространств $\}V_h|$, оценка (4) позволяет получить скорость сходимости и по пространственным переменным. Для этого введем в рассмотрение множество $D(A) = \}u \{ V : Au \{ H|$. Пусть существует гильбертово пространство E такое, что $D(A) \to E \to V$ и выполняется типичная для эллиптических операторов оценка

$$v \ _E \geq \delta \ Av \ _H \quad (v \{ D(A)), \tag{5}$$

где $\delta \subset 0$. Например, если параболическое уравнение в области Ω определено равномерно эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то рассмотрим пространства: $H = L_2(\Omega), V = \overset{\leq}{W_2^1}(\Omega), V \ = W_2 \ ^1(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\leq}{W_2^1}(\Omega)$ [4, с. 275]. Если же на границе области Ω задается условие Неймана, то пространства следующие: $H = L_2(\Omega), V = W_2^1(\Omega), E = W_2^2(\Omega)$ [4, с. 276].

Пусть подпространства V_h обладают следующим аппроксимационным свойством, типичным для подпространств типа конечных элементов (напр., [7, с. 143-144])

$$(I \quad Q_h)v \ _V \geq rh \ v \ _E \quad (v \{ E), \tag{6}$$

где константа $r > 0$ не зависит от v и h.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть также выполнено условие (5) и решение $u(t)$ задачи (2) такое, что $u \{ C([0,T], E)$. Пусть подпространства V_h обладают свойством (6). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\prime\, k\prime\, N} \ u(t_k) \quad u_k^h \ _V^2 + \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u\,(t)\,dt \quad \frac{u_k^h \quad u_{k\ 1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau +$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| u\,(t_k) \quad \frac{u_k^h \quad u_{k\ 1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau \geq C \Biggl\{ \tau^{3 \ \ 2/p} \left(\int_0^T \ u \ (t) \ _H^p \, dt \right)^{2/p} +$$

$$h^2 \left(\int_0^T \ u\,(t) \ _V^2 \, dt + \max_{0\prime\, t\prime\, T} \ u(t) \ _E^2 \right) \Biggr\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бондарев А.С., Смагин В.В.* Сходимость проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 2. С. 81-94.

2. *Смагин В.В.* Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода приближенного решения абстрактного параболического уравнения // Математические заметки. 1997. Т. 62. № 6. С. 898-909.

3. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. 384 с.

4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.

5. *Бондарев А.С.* Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 4. С. 78-88.

6. *Вайникко Г.М., Оя П.Э.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 7. С. 1269-1277.

7. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.

Поступила в редакцию 20 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 24 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.

Бондарев Андрей Сергеевич, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, e-mail: bondarev@math.vsu.ru

Для цитирования: *Бондарев А.С.* Сходимость в сильных нормах проекционно-разностного метода решения параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 617–623. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-617-623

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-617-623

THE STRONG-NORM CONVERGENCE OF A PROJECTION-DIFFERENCE METHOD OF SOLUTION OF A PARABOLIC EQUATION WITH THE PERIODIC CONDITION ON THE SOLUTION

A. S. Bondarev

Voronezh State University
1 Universitetskaya St., Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: bondarev@math.vsu.ru

Abstract. A smooth soluble abstract linear parabolic equation with the periodic condition on the solution is treated in a separable Hilbert space. This problem is solved approximately by a projection-difference method using the Galerkin method in space and the implicit Euler scheme in time. Effective both in time and in space strong-norm error estimates for approximate solutions, which imply convergence of approximate solutions to the exact solution and order of convergence rate depending of the smoothness of the exact solution, are obtained.

Keywords: Hilbert space; parabolic equation; smooth solvability; periodic condition; implicit Euler method

REFERENCES

1. Bondarev A.S., Smagin V.V. Skhodimost' proyektsionno-raznostnogo metoda priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s periodicheskim usloviyem na resheniye [The convergence of projection-difference method of approximate solution of parabolic equation with a periodic condition on the solution]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 81-94. (In Russian).

2. Smagin V.V. Otsenki v sil'nykh normakh pogreshnosti proyektsionno-raznostnogo metoda priblizhennogo resheniya abstraktnogo parabolicheskogo uravneniya [Strong-norm error estimates for the projective-difference method for approximately solving abstract parabolic equations]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 1997, vol. 62, no. 6, pp. 898-909. (In Russian).

3. Aubin J.-P. *Priblizhennoye resheniye ellipticheskikh krayevykh zadach* [Approximate Solution of the Elliptic Boundary Problems]. Moscow, Mir Publ., 1977, 384 p. (In Russian).

4. Lions J.-L., Magenes E'. *Neodnorodnyye granichnyye zadachi i ikh prilozheniya* [Inhomogeneous Boundary Problems and Its Applications]. Moscow, Mir Publ., 1971, 372 p. (In Russian).

5. Bondarev A.S. Razreshimost' variatsionnogo parabolicheskogo uravneniya s periodicheskim usloviyem na resheniye [The solvability of the variational parabolic equation with a periodic condition on the solution]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 4, pp. 78-88. (In Russian).

6. Vaynikko G.M., Oya P.E. O skhodimosti i bystrote skhodimosti metoda Galerkina dlya abstraktnykh evolyutsionnykh uravneniy [About the convergence and the velocity of convergence

of the Galerkin's method for abstract evolutionary equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1975, vol. 11, no. 7, pp. 1269-1277. (In Russian).

7. Marchuk G.I., Agoshkov V.I. *Vvedeniye v proyektsionno-setochnyye metody* [Introduction to Projection-Difference Methods]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 416 p. (In Russian).

Received 20 April 2018
Reviewed 24 May 2018
Accepted for press 26 June 2018

Bondarev Andrei Sergeevich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Functional Analysis and Operator Equations Department, e-mail: bondarev@math.vsu.ru

For citation: Bondarev A.S. Skhodimost' v sil'nykh normakh proekcionno-raznostnogo metoda resheniya parabolicheskogo uravneniya s periodicheskim usloviem na reshenie [The strong-norm convergence of a projection-difference method of solution of a parabolic equation with the periodic condition on the solution]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 617–623. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-617-623 (In Russian, Abstr. in Engl.).