УДК 519.6 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 4

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ТРИАНГУЛЯЦИЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В. С. Кальницкий

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В статье на вопрос, любой ли выпуклый многоугольник можно разрезать с помощью ортогональной сети на прямоугольные треугольники, дан отрицательный ответ. Более того, показано, что существует выпуклый пятиугольник, который невозможно даже аппроксимировать разрезаемыми пятиугольниками. Библиогр. 3 назв. Ил. 5. Табл. 2.

Ключевые слова: разрезание многоугольных областей, прямоугольная сеть, триангуляция плоских областей.

1. Введение. Операция разрезания многоугольников возникает в различных прикладных задачах, например, в компьютерной графике или в системах автоматического проектирования. Одной из целей операции разрезания является замена некоторой, как правило выпуклой, многоугольной области на фрагменты, для которых тестовые и расчетные задачи выполняются максимально просто и унифицированно. Большинство известных алгоритмов работает с треугольниками. Вопрос о том, всегда ли можно считать, что многоугольник принадлежит некоторой прямоугольной сети и составлен из прямоугольников и прямоугольных треугольников этой сети, видимо впервые, был поставлен Н. Ю. Додоновым в цикле работ [1–3] по реконструкции параметрических поверхностей, заданных таблично. Несмотря на то что ответ на этот вопрос положителен для треугольников (очевидно) и для выпуклых четырехугольников, в данной работе доказывается, что в семимерном пространстве выпуклых пятиугольников множество неразрезаемых пятиугольников имеет непустую внутренность. Таким образом, отрицается даже возможность аппроксимации неразрезаемого многоугольника разрезаемыми. Пространство пятиугольников можно описать следующим образом: множество упорядоченных пятиточечных подмножеств евклидовой плоскости, задающих выпуклые пятиугольники с заданным обходом сторон против часовой стрелки, параметризуется с точностью до движения плоскости набором 10 координат, из которых первая точка имеет координаты $(0, 0)$, а вторая имеет вид $(x, 0)$, т. е. имеет 7 свободных параметров, задающих локальную систему координат. Несмотря на простоту формулировки, автору не удалось найти в доступных источниках не только доказательство этого факта, но даже постановки обсуждаемого здесь вопроса до указанных выше работ. Для практических целей автор формулирует вычислимые геометрические условия, гарантирующие разрезаемость пятиугольной выпуклой области и аппроксимируемость разрезаемыми.

2. Достаточное условие разрезаемости. Рассмотрим на плоскости конечную прямоугольную сеть, т. е. два конечных семейства перепендикулярных друг другу прямых.

Определение 1. Будем говорить, что многоугольник на плоскости *прямоугольно триангулирован* или *разрезан*, если все его вершины лежат в узлах решетки, все стороны либо лежат на прямых семейств, либо на диагоналях ячеек сети. Многоугольник *разрезаем*, если существует его прямоугольная триангуляция некоторой конечной сетью.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.408

Последовательное построение сети можно описать как отслеживание траектории, выпущенной из вершины, поворачивающей на прямой угол в момент встречи со стороной многоугольника. Момент остановки происходит при встрече либо с вершиной, либо со стороной, перпендикулярной направлению движения. Два взаимно перпендикулярных направления движения фиксируются заранее.

Рассмотрим выпуклый тупоугольный пятиугольник $ABCDE$. Восстановим пять перпендикуляров из его вершин (рис. 1). Потребуем, чтобы $D' \in AB$. Обозначим длины перпендикуляров $a = AA'$, $b = BB'$, $c = CC'$, $d = DD'$, $e = EE'$.

Теорема 1. *Если справедливо неравенство* $(c - e)(b - a) > 0$, *пятиугольник разрезается вдоль стороны* AB.

Доказательство. Положим для определенности $b > a$, $c > e$. Из принятого нами соотношения величин следует, что траектория, выпущенная из D, встретит AB в D', траектория, выпущенная из B, встретит AB после встречи с ED выше A'.

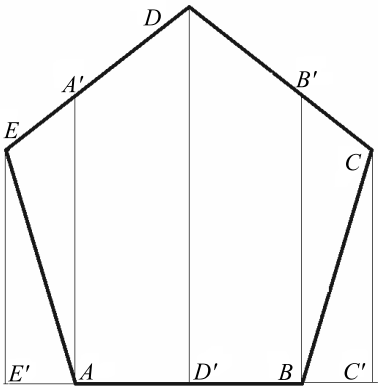


Рис. 1. Условие разрезаемости.

Изучим последовательно поведение траекторий из вершин C, A, E.

1. Траектория из C и E. Если $c > a$, траектория из C встречает ED выше A' и заканчивается после встречи с AB. Остается исследовать единственный вариант $a > c > e$. Рассмотрим произвольную точку $C_1 \in [CB']$ на DC, C_1' — ее проекция на AB. Положение C_1 на стороне определяется разностью высот $x = C_1C_1' - CC'$. Нас будут интересовать точки, для которых $x < a - c$. Такая точка после последовательной встречи с отрезками EA', EA, BC встречает CB' в точке C_2 с разностью высот $\varphi(x) = C_2C_2' - CC'$. Вычислим функцию.

$$\varphi(x) = \mu x + \lambda,$$

где

$$\mu = \frac{(b-c)e}{(a-e)c} > 0; \quad \lambda = \frac{(b-c)(c-e)a}{(a-e)c} > 0.$$

Если $\varphi(x) < a - c$, повторим операцию обхода. Если неравенство станет равенством или поменяет смысл, такая траектория после встречи с ED достигнет AB (конец построения). После n шагов будем иметь

$$\varphi^n(x) = \mu^n x + \frac{1-\mu^n}{1-\mu}\lambda.$$

Здесь индекс n в $\varphi^n(x)$ обозначает композицию. Если $\mu \geqslant 1$, последовательность $\{\varphi^n(x)\}$ возрастает неограниченно, следовательно на конечном шаге превысит $(a-c)$. Если $\mu < 1$, будем иметь

$$\varphi^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda}{1-\mu}.$$

Для доказательства конечности траектории достаточно показать, что $\lambda/(1-\mu) > a-c$. Домножим обе части неравенства на знаменатель левой части, вспомнив определение чисел λ, μ:

$$\frac{(b-c)(c-e)a}{(a-e)c} > \frac{(a-c)(ac-be)}{(a-e)c}.$$

После сокращения на положительный знаменатель и приведения подобных членов приходим к верному неравенству

$$(b-a)(a-e) > 0.$$

Итак, любая траектория, стартующая с любой точки стороны DC, конечна. В частности, это применимо к траектории из вершины E, которая после встречи с BC попадает на DC.

2. Траектория из A. Если $a < c$, попадаем в ситуацию пункта 1 после встречи с DC. Рассмотрим ситуацию, когда $c < a < b$. Рассмотрим точку $A_1 \in [EA']$, A' — ее проекция на AB. Положение A_1 полностью определяется числом $x = AA' - A_1A'_1$. Заметим, что траектория, выпущенная вниз, после встреч с двумя сторонами попадает в ситуацию пункта 1. Интерес представляет лишь траектория, выпущенная вправо, и случай $x < a-c$, иначе траектория снова попадает на отрезок CD снизу, т. е. в ситуацию предыдущего пункта.

Точка A_2 встречи траектории из A_1 с BC имеет разность высот $CC' - A_2A'_2$ с точкой C, равную

$$\frac{c(a-c-x)}{b-c}.$$

Если эта величина не превосходит $(c-e)$, после встречи с ED она отразится вниз и мы опять попадаем в ситуацию пункта 1. Таким образом, продолжать вычисления следует, если выполняется неравенство

$$x < ca - bc + be - ce. \tag{1}$$

В этом случае после отражения от AE вычисляемая разность высот с точкой A будет равна

$$\varphi(x) = \mu x + \lambda,$$

где

$$\mu = \frac{(a-e)c}{(b-c)e} > 0; \quad \lambda = \frac{(b-a)(a-e)c}{(b-c)e} > 0.$$

Достаточно показать, что последовательность $\varphi^n(x)$ превысит $(a-c)$, если до этого не будет превышена величина в формуле (1). Аналогично рассуждениям пункта 1 достаточно показать, что выполняется $\lambda/(1-\mu) > a-c$ при $\mu < 1$. После простых арифметических операций с этим неравенством мы приходим к верному неравенству

$$(c-e)(b-c) > 0. \quad \square$$

Следствие 1. *Если условие теоремы 1 не выполнено ни для одной из сторон выпуклого тупоугольного пятиугольника, но есть хотя бы одна сторона, для которой справедливо равенство* $(c-e)(b-a)=0$*, то он аппроксимируется разрезаемыми пятиугольниками.*

Действительно, сколь угодно малым изменением положения вершины легко добиться нарушения равенства в нужную сторону. Например, если в пятиугольнике $ABCDE$ имеем $c=e$, $b=a$, то малым сдвигом D вправо добиваемся неравенства $b>a$, затем достаточно малым сдвигом C вверх, сохраняя $b>a$, добиваемся неравенства $c>e$.

2. Существование неразрезаемого пятиугольника. В этом параграфе доказывается достаточное условие неразрезаемости вдоль стороны.

Теорема 2. *Если справедливо неравенство* $(c-e)(b-a)<0$*, пятиугольник не разрезается вдоль стороны* AB*.*

Доказательство. Проследим за динамикой отрезка BC (рис. 2) в предположении, что $c>e$, $b<a$. В ином случае мы бы рассмотрели сторону AE.

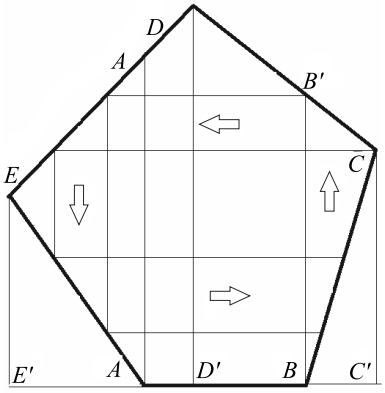


Рис. 2. Динамика отрезка BC.

После трех последовательных встреч со сторонами образ отрезка BC будет лежать строго внутри него. Таким образом, возникло сжимающее отображение отрезка в себя. Ясно, что ни траектория из вершины B, ни траектория из вершины C не может быть конечной. □

Теорема 3. *Выпуклый тупоугольный пятиугольник с координатами вершин*

$$\{A(0;0),B(27;0),C(30,6;26,2),D(11;40),E(-10;20,5)\}$$

не разрезается вдоль своих сторон.

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно убедиться, что каждая вершина проектируется на противоположную сторону, вычислить величины a,b,c,e для каждой стороны и применить критерий. Составим таблицу значений (табл. 1).

Исходя из результатов вычислений (расчеты произведены в программе GeoGebra) можно утверждать, что указанный пятиугольник не разрезается вдоль своих сторон. □

Мы докажем более сильное утверждение: не существует направления, вдоль которого данный пятиугольник разрезается. Для доказательства этого факта нам понадобятся дополнительные конструкции.

Таблица 1

Сторона	a	b	c	e	$(c-e)(b-a)$
AB	$\approx 29,78$	$\approx 28,73$	26,2	20,5	<0
BC	$\approx 29,21$	$\approx 30,30$	$\approx 21,23$	$\approx 26,75$	<0
CD	$\approx 32,04$	$\approx 31,30$	$\approx 28,30$	$\approx 23,49$	<0
DE	$\approx 27,52$	$\approx 27,97$	$\approx 21,82$	$\approx 23,45$	<0
EA	$\approx 32,01$	$\approx 32,19$	$\approx 24,27$	$\approx 27,42$	<0

3. Структурный портрет. Рассмотрим прямоугольно триангулируемый многоугольник, т. е. многоугольник, расположенный в узлах некоторой конечной сети. Каждая полоса между соседними вертикальными или горизонтальными прямыми сети может быть растянута (сжата) горизонтально (соответственно вертикально), а остальная часть плоскости просто сдвинута. Таким образом, возникает кусочно-линейное преобразование плоскости, которое изменяет ширину полосы сети. Используя последовательно такие преобразования, мы можем добиться одинаковой ширины горизонтальных и вертикальных полос сети (квадратная сеть). Любой триангулируемый многоугольник приводим к многоугольнику в квадратной сети и наоборот. Это означает, что многоугольник триангулируем тогда и только тогда, когда он является образом некоторого многоугольника в квадратной сети под действием некоторого конечного семейства кусочно-линейных преобразований описанного типа.

Определение 2. Образ триангулированного многоугольника при переходе к квадратной сети назовем *структурным портретом многоугольника.*

Перечислим некоторые элементарные свойства описанных преобразований:

1) преобразования сохраняют вертикальные и горизонтальные направления;

2) диагонали ячеек сети остаются прямолинейными;

3) возрастание и убывание отрезков сохраняется.

Из этих свойств, в частности, следует, что при переходе к структурному портрету соседние стороны одного знака монотонности сливаются в один отрезок на диагоналях квадратов сети.

Каков структурный портрет пятиугольника, описанного в предыдущем пункте, в предположении, что он разрезаем? Так как направление разрезания не параллельно его сторонам, по отношению к этому направлению все стороны пятиугольника имеют наклон, причем две и только две стороны имеют наклон в одну сторону. Эти две стороны сливаются в одну, и вершина между ними лежит на этой стороне. Такой портрет представляет собой в квадратной сети прямоугольный четырехугольник, расположенный под углом в 45° к направлению сети (рис. 3).

Отметим важное свойство полученного портрета. Если траектории, выпущенные из A, встречаются между собой на CD, то траектории из B и E сначала встречают вершины C и D. Если траектории из A встречаются до встречи со стороной CD, то траектории из B и E сначала встречают стороны ED и BC соответственно. В ином случае обе траектории из B и E сначала встречают сторону DC. Таким образом, поведение указанных траекторий в смысле их пересечений со сторонами «симметрично».

Теорема 4. *Для пятиугольника из теоремы 3 не существует направления, вдоль которого он разрезается.*

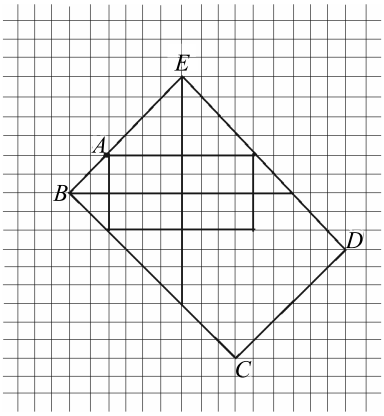


Рис. 3. Структурный портрет.

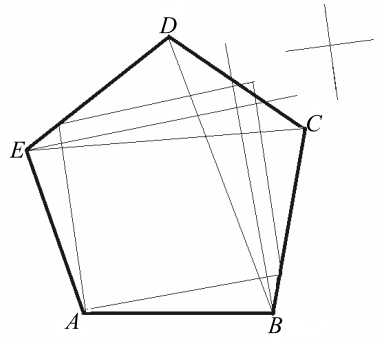


Рис. 4. Поведение траекторий.

Доказательство. Предположим, что пятиугольник разрезается, и рассмотрим вершину A в качестве распрямляющейся вершины в структурном портрете (рис. 4). Так как угол между хордами EC и DB, обращенный к стороне DC тупой, то траектории, заведомо ортогональные друг другу, из вершин E и B сначала встречают DC, т. е. направления разрезания всегда находятся между указанными хордами. Из свойства структурного портрета следует, что траекторный прямоугольник, упирающийся на угол A, не может иметь вершину внутри пятиугольника или на стороне DC. Мы докажем, что встреча траекторий, выпущенных из каждой вершины в допустимых направлениях, всегда происходит внутри пятиугольника, что невозможно для структурного портрета. Доказательство будет опираться на следующий просто устанавливаемый факт аналитической геометрии.

Лемма 1. *Для любого острого угла и точки A внутри него любая пара траекторий, выпущенных ортогонально друг другу из точки A так, что они встречают разные стороны угла, после встречи с ними пересекаются в точке, лежащей на некоторой гиперболе (рис. 5).*

Доказательство опирается на прямое вычисление. Из этой леммы следует, что если провести отрезок через концы любых двух прямоугольников можно увидеть, что вершины всех прямоугольников между ними лежат по одну сторону от этого отрезка в силу вогнутости ветви гиперболы.

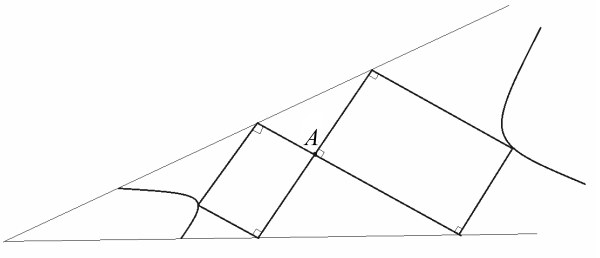


Рис. 5.

Вернемся к доказательству теоремы. Так как крайними возможными направлениями траекторий из вершины служат диагонали пятиугольника из других вершин либо направления прилегающих сторон, нам достаточно убедиться, что именно для этих направлений траектории встречаются внутри пятиугольника. Проведя отрезок через эти точки, предъявим некоторое промежуточное направление, для которого соответствующая вершина отделена от стороны пятиугольника построенным отрезком (для того чтобы показать направление вогнутости гиперболы).

Рассмотрим построения из вершины A. Крайними направлениями являются BD и EC. Вершина прямоугольника, направленного вдоль BD, имеет примерные координаты $(19,8827; 33,1469)$ и находится внутри пятиугольника. Вершина прямоугольника, направленного вдоль EC имеет координаты $(23,8316; 30,2157)$ и также находится внутри. Промежуточное направление, определенное точкой с координатами $(-5,8728; 24,3324)$ на стороне ED, дает точку $(22,0533; 31,0725)$, отделенную от стороны DC построенным отрезком.

Дадим результаты вычислений для остальных вершин в виде таблицы со столбцами: координаты вершины и результат (внутри/снаружи) для первого крайнего направления, координаты вершины и результат (внутри/снаружи) для второго направления, координаты вершины и результат (отделена/не отделена от стороны) для промежуточного направления.

Перечислим крайние направления: для вершины B — EB и BC; для вершины C — AD и EB; для вершины D — ED и DC; для вершины E — AC и EA.

Таблица 2

	1		2		3	
B	(1,660; 30,176)	вн.	(0; 28,745)	вн.	(0,802; 29,209)	отд.
C	(−5,499; 11,958)	вн.	(−3,192; 7,311)	вн.	(−4,003; 9,711)	отд.
D	(12,575; 0,600)	вн.	(8,725; 0,334)	вн.	(10,399; 0,802)	отд.
E	(29,526; 18,814)*	вн.	(28,765; 14,032)	вн.	(28,719; 16,881)	отд.

* расстояние до стороны $\approx 0,058$.

Полученные результаты показывают, что во всех направлениях не реализуется возможный структурный портрет. Теорема 4 доказана. □

Следствие 2. *Указанный в теореме 3 пятиугольник невозможно аппроксимировать разрезаемыми пятиугольниками.*

Это утверждение следует из того, что малые шевеления сохраняют неравенства в теореме 3 и положения вершин вписанных прямоугольников относительно сторон. Таким образом, все пятиугольники, достаточно близкие к указанному, неразрезаемы.

Литература

1. *Додонов Н. Ю., Масальских А. В.* Реконструкция параметрическх поверхностей, заданных таблично, посредством сдвигов и сжатий одной функции // Изв. Тульск. гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 1, ч. 1. С. 232–248.

2. *Додонов Н. Ю., Масальских А. В.* Примнение одного класса агрегатов приближения сумматорного типа для реконструкции параметрических поверхностей // Изв. Тульск. гос. ун-та. Естественные науки. 2014. Вып. 2. С. 59–75.

3. *Додонов Н. Ю.* О равномерном приближении на $\mathbb{R}^2$ непрерывных банаховозначных функций // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2005. Вып. 2. С. 11–24.

Статья поступила в редакцию 23 апреля 2016 г.

Сведения об авторе

Кальницкий Вячеслав Степанович — кандидат физико-математических наук, доцент; st006987@spbu.ru

ORTHOGONAL TRIANGULATION OF POLYGONS

Vyacheslav S. Kalnitsky

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; st006987@spbu.ru

Triangulation of polygons arises in various applications, such as computer graphics or automatic designing systems. One of the goals of triangulation is to replace some, usually convex, polygonal area into fragments, for which the test and design tasks are performed by the most simple and unified way. Most of the known algorithms work with the triangles. The question of whether or not you can always assume that the polygon belongs to a rectangular net and is made up of rectangles and right triangles of the net, perhaps for the first time, was placed by N. Yu. Dodonov in connection with the works for the reconstruction of parametric surfaces specified with tabular data. Despite the fact that the answer to this question is positive for triangles (obviously) and convex quadrilaterals, in this paper it is proved that a 7-dimensional space of convex pentagons set of untriangulated 5-gon has a non-empty interior. Thus, it denied even the possibility of approximation this polygon by triangulated ones. Refs 3. Figs 5. Tables 2.

Keywords: section of polyhedral domains, orthogonal net, triangulation.

References

1. Dodonov N. Yu., Masalskikh A. V., “Reconstruction of parametric surfaces specified with tabular data by means of shifts and dilations of one function”, *Izvestija TulGU*, issue 1, ch. 1, 232–248 (2014) [in Russian].

2. Dodonov N. Yu., Masalskikh A. V., “Applying a class of summatory type approximation aggregates for parametric surfaces reconstruction”, *Izvestija TulGU*, issue 2, 59–75 (2014) [in Russian].

3. Dodonov N. Yu., “On uniform approximation in $\mathbb{R}^2$ of continuous Banach functions”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 2, 11–24 (2005) [in Russian].

Для цитирования: Кальницкий В. С. Прямоугольная триангуляция многоугольников // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 594–601. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.408

For citation: Kalnitsky V. S. Orthogonal triangulation of polygons. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 594–601. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.408