Достаточные критерии прочности для трещины и узкого выреза с закруглением в вершине при квазихрупком разрушении

М.Е. Кожевникова, В.М. Корнев

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия

Рассматриваются две задачи о растяжении на бесконечности тонких пластин с трещиной нормального отрыва и узким плоским вырезом с закруглением в вершине. Для определения критических значений внешних усилий, при которых реализуется предельное равновесное состояние пластин с трещиной и вырезом, строятся достаточные критерии прочности для квазихрупкого разрушения. Причем для трещины предложены уточненные достаточные критерии прочности, построенные для упругопластического материала с ограниченным предельным удлинением при пластичности и упруго-идеальнопластического материала. Уточнение достаточных критериев прочности стало возможным в силу использования точного решения обобщенной задачи Гриффитса, а также уточненной оценки поперечного размера зон пластичности, возникающих перед вершиной трещины. В состав достаточного критерия входят критерий критического раскрытия трещины и модифицированный критерий Нейбера–Новожилова. Для практической реализации критерия критического раскрытия трещины необходимо знать величины критического раскрытия и раскрытия в вершинах трещины, выреза. Первая получается из оценки поперечного размера зон пластичности, вычисленного в рамках модели Ирвина, и максимального относительного удлинения пластического материала. Для определения второй величины используется модифицированная модель Леонова–Панасюка–Дагдейла для трещины и выреза и построенный на ее основе упругопластический аналог задачи Гриффитса для трещины-разреза. Модифицированный критерий Нейбера–Новожилова позволяет получить среднее значение напряжений на интервале осреднения, когда значения нормальных напряжений в вершинах трещины, выреза превышают предел текучести материала. Критические значения внешних усилий находим, решая системы двух уравнений, соответствующие достаточным критериям прочности. Построены кривые разрушения пластин с трещиной и узким закругленным вырезом.

Sufficient strength criteria for a crack and elliptic notch at quasi-brittle fracture

M.E. Kozhevnikova and V.M. Kornev

M.A. Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

Consideration is given to two problems on tension at infinity of thin plates with an opening mode crack and two-dimensional elliptic notch. To define the critical values of external forces such that the limit equilibrium condition of the plates with a crack and notch is realized, we build sufficient strength criteria for quasi-brittle fracture. For the crack we propose the improved sufficient strength criteria built for the elasto-plastic material with the limited ultimate elongation at plasticity of the elastic-perfectly-plastic material. The improvement of sufficient strength criteria has been possible through the use of an exact solution of the generalized Griffith problem as well as using the improved estimation of the size across plasticity zones formed ahead the crack tip. The sufficient criterion includes the critical crack opening criterion and the modified Neuber–Novozhilov criterion. To build the critical crack opening criterion, it is necessary to determine the values of critical opening and opening at the crack and notch tips. The first value is obtained from the estimation of the size across plasticity zones calculated in the framework of the Irwin model and the maximum relative elongation of the plastic material. To determine the second value, use is made of the modified Leonov–Panasyuk–Dugdale model for the crack and notch and the elasto-plastic type of the Griffith problem for the slit. The modified Neuber–Novozhilov criterion allows us to obtain the average stress value on the averaging interval, when the normal stress values at the crack and notch tips exceed the yield stress of the material. Fracture curves for the plates with a crack and elliptic notch are plotted.

1. Введение. Постановка задачи

Для многих элементов конструкций и деталей машин одним из характерных видов дефектов являются трещины, тонкие полости типа непроваров, вытянутых пустот и т. п. Рассмотрим неограниченные тонкие пластины с изолированной трещиной нормального отрыва и узким вырезом с закруглением в вершине длины $2\ell_0$. Пластины на бесконечности растягивают однородными сим-

© Кожевникова М.Е., Корнев В.М., 2004

метричными относительно срединной плоскости усилиями интенсивностью σ_∞. Определим критические значения внешних усилий, при превышении которых пластины с трещиной и узким вырезом начнут разрушаться.

Для всех материалов вследствие их неидеальной упругости в непосредственной окрестности вершин трещины, вытянутой пустоты-выреза развиваются процессы нелинейного деформирования. В частности, для металлических материалов, основным из таких процессов является пластическое течение. В результате перед концом трещины всегда есть более или менее протяженная пластическая зона. Отождествим зону пластичности с более широким понятием — зоной предразрушения. Наличие в окрестности вершин трещины, выреза зоны пластической деформации приводит к несоответствию действительной картины напряженно-деформированного состояния тому, что предлагается соотношениями, полученными из решения задачи для упругих тел. Однако если зона проявления нелинейных свойств материала достаточно мала, существует область, в которой асимптотика решения задач для упругих тел будет хорошим приближением к действительному распределению напряжений. Это позволяет считать, что и размер зоны предразрушения и состояние материала в ней целиком контролируются коэффициентом интенсивности напряжений. В работе [1] напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины определяется коэффициентом интенсивности напряжений K_I и имеет приближенный вид. При этом в силу неравенства $\sigma_\infty \ll \sigma_\mathrm{m}$ (σ_m — предел текучести материала) в формулах, определяющих напряжения, отсутствует гладкая часть, а именно напряжение σ_∞ [1]. Для узкого выреза коэффициент интенсивности напряжений вычисляется для соответствующей этому вырезу трещины [2]. Эффективность такого подхода определяется тем, что численное решение задачи значительно проще в случае трещины, чем в случае узкого выреза. При этом, чем уже вырез, тем точнее оценка напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины выреза [2]. Поэтому, хотя реальные материалы и не проявляют идеально упругого поведения при разрушении, тем не менее, критерии линейной механики разрушения остаются для них справедливыми при условии ограниченности пластического течения, т.е. при реализации квазихрупкого приближения. В частности, такими критериями могут стать модифицированный силовой критерий Нейбера–Новожилова и деформационный критерий критического раскрытия трещины. Если длина зоны пластичности материала ничтожно мала по сравнению с длиной трещины (выреза), критерием локального разрушения тела с трещиной (вырезом) служит модифицированный критерий Нейбера–Новожилова. Но если длину зоны пластичности нельзя считать слишком малой по сравнению с длиной трещины (выреза) выше названный критерий является недостаточным. В таких случаях для оценки предельного состояния тел с трещиной, плоским узким вырезом используют критерий критического раскрытия трещины [3]. Объединим выше упомянутые критерии в один достаточный деформационно-силовой критерий прочности [1]. Для практической реализации критерия критического раскрытия трещины необходимо знать критическое раскрытие и раскрытие в вершине трещины (выреза). Нахождение этих величин связано с большими трудностями в решении упругопластической задачи. Для того чтобы каким-то образом справиться с этими трудностями и вычислить критическое раскрытие в вершине трещины (выреза) в зоне предразрушения, у контура трещины (выреза) выбирается элементарный объем такой высоты h и длины Δ, удлинение которого в результате деформирования материала равно раскрытию трещины (выреза) в вершине [3]. Причем высота этого элементарного объема отождествляется с поперечником зоны пластичности (см. рис. 1) [1], $\Delta_\mathrm{п}$ — длина зоны пластичности перед вершиной трещины (выреза).

На основе приближенного решения задачи о растяжении пластины с трещиной в работе [1] строятся достаточные критерии прочности для двух материалов: упругопластического с ограниченным предельным удлине-

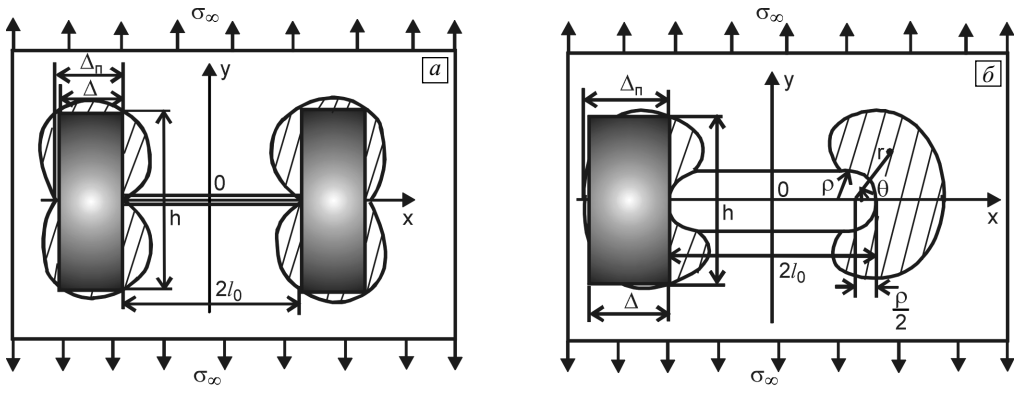


Рис. 1. Схема, иллюстрирующая критерий критического раскрытия трещины для трещины (*а*), выреза (*б*)

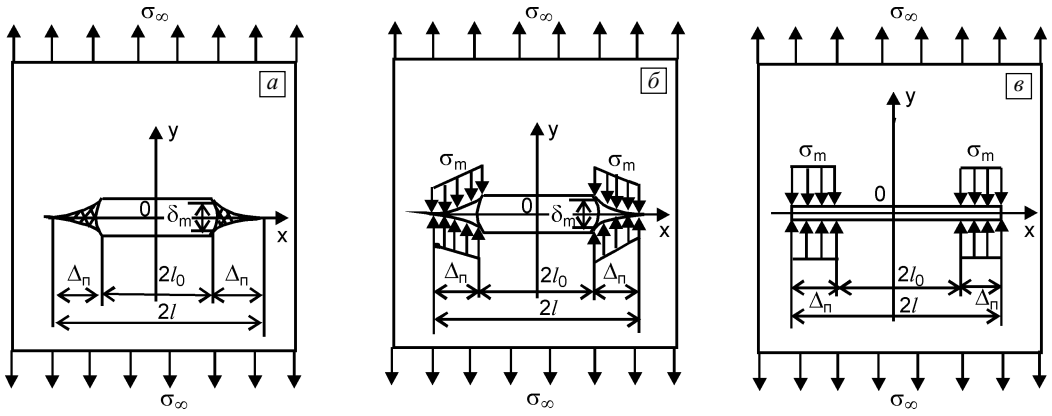


Рис. 2. Схемы модели Леонова–Панасюка–Дагдейла (*а*, *б*) и упругопластического аналога задачи Гриффитса (*в*)

нием при пластичности и упруго-идеальнопластического. Для определения раскрытия в вершине трещины использовался упругопластический аналог задачи Гриффитса, с помощью которого решение упругопластической задачи для тела с трещиной сводится к граничной задаче теории упругости [4]. Вначале рассмотрим модель Леонова–Панасюка–Дагдейла [5, 6], где исходная трещина длины $2\ell_0$ со свободными от напряжений поверхностями подменяется модельной трещиной длины $2\ell = 2(\ell_0 + \Delta_\text{п})$, концевые области которой длиной $\Delta_\text{п}$ остаются заполненными пластически деформированным материалом (рис. 2, *а*). Этот материал обладает определенной несущей способностью и стягивает противоположные поверхности трещины, не давая им разойтись. Его скрепляющее действие может быть эквивалентно заменено постоянным напряжением, равным пределу текучести материала σ_m. Таким образом, вместо исходной трещины с пластическими зонами $\Delta_\text{п}$ рассматривается модельная трещина без пластических зон, но дополнительно нагруженная на концевых участках стягивающим напряжением σ_m (рис. 2, *б*). Упругопластический аналог задачи Гриффитса — задача о растяжении постоянными напряжениями σ_∞ пластины с трещиной-разрезом длины $2\ell = 2(\ell_0 + \Delta_\text{п})$ [4]. Средняя часть разреза свободна от напряжений, а на его концевых участках длиной $\Delta_\text{п}$ действуют стягивающие напряжения σ_m (рис. 2, *в*). Модель Гриффитса мы и возьмем за основу, но вместо модельной трещины длины $2\ell = 2(\ell_0 + \Delta_\text{п})$ будем рассматривать модельную трещину длины $2\ell = 2(\ell_0 + \Delta)$. Моделирование реальной трещины с ненулевым поперечным размером пластических зон, образующихся перед вершинами трещины, модельной трещиной-разрезом с нулевым поперечным размером стало возможным в результате описания поведения материала в зоне предразрушения как поведение пучка волокон-стержней [7]. Предполагаемая в [7] схема «крепления» волокон, длина которых равна поперечному размеру пластической области, позволяет связать нелинейность исходной задачи с нелинейным поведением стержней. Поскольку задача решается в рамках классической теории упругости, в непосредственной близости от вершин исходной и модельной трещин для упругопластического материала с ограниченным предельным удлинением при пластичности напряжения бесконечно велики. Модифицированный критерий Нейбера–Новожилова позволяет получить среднее значение напряжений на интервале осреднения.

Таким образом, первая часть статьи будет посвящена поиску критических значений внешних усилий для упругопластического материала с ограниченным предельным удлинением при пластичности и предельной деформации для упруго-идеальнопластического материала, при которых реализуется предельно равновесное состояние пластины с трещиной. Критические значения получим, решив системы двух уравнений, соответствующие уточненным достаточным критериям прочности. Для этого определим напряженное состояние в пластине с исходной трещиной, а не только в окрестности ее вершины. На его основе получим оценку границы пластической области, а следовательно, и критическое раскрытие в вершине исходной трещины. Зная поле смещений для модельного выреза, найдем раскрытие в вершине исходной трещины. Уточнение достаточных критериев прочности стало возможным в силу использования точного решения обобщенной задачи Гриффитса, а также уточненной оценки поперечника зон пластичности, возникающих перед вершиной трещины.

Для определения раскрытия в вершине узкого выреза используется модифицированная модель Леонова–Панасюка–Дагдейла. В модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла вырез со свободными от напряжений поверхностями, по аналогии с трещиной, подменяется модельным вырезом, концевые области которого заполнены пластически деформированным материалом, скрепляющее действие которого может быть эквивалентно заменено стягивающим напряжением σ_m

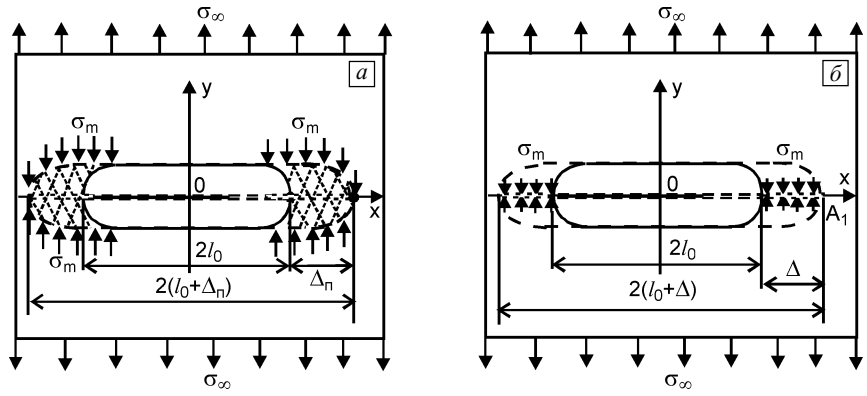


Рис. 3. Схемы модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла для узкого выреза с закруглением в вершине (*а*) и модифицированного упругопластического аналога задачи Гриффитса (*б*)

(рис. 3, *а*). Поскольку напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины узкого выреза определяется коэффициентом интенсивности напряжений для соответствующей этому вырезу трещины, возможен переход от упругопластической задачи о растяжении пластины с модельным вырезом к упругопластическому аналогу задачи Гриффитса для трещины. Взяв за основу модель Гриффитса, рассмотрим модельную трещину-разрез длины $2\ell = 2(\ell_0 + \Delta)$, соответствующую вырезу длины $2\ell = 2(\ell_0 + \Delta)$ с закругленным концом радиуса ρ (рис. 3, *б*). Модифицированный критерий Нейбера–Новожилова позволяет получить среднее значение напряжений на интервале осреднения в случае, когда радиус кривизны ρ в вершине модельного выреза мал настолько, что значение нормального напряжения в вершине модельного выреза значительно выше теоретической прочности материала σ_m. На рис. 4 схематично показан характер изменения напряжений в вершине A_1 модельного выреза. Рисунок 4, *а* соответствует достаточно малым значениям ρ. Площадь прямоугольника $A_1A_2A_4A_6$ на рис. 4, *а* равна площади фигуры $A_1A_3A_5A_6$ и равна среднему значению напряжений в окрестности вершины модельного выреза, полученному с помощью модифицированного критерия Нейбера–Новожилова. Величина nr_e — интервал осреднения, r_e — характерный линейный размер микроструктуры (макроструктуры) материала, например, расстояние между атомами в простой решетке Браве или размер зерна поликристаллического материала, n — число связей. Рисунок 4, *б* соответствует достаточно большим значениям ρ: $\sigma_{yy}(\ell, 0) \le \sigma_m$. Осреднения напряжений в этом случае не требуется. Однако, как уже отмечалось ранее, чем меньше ρ, тем точнее оценка напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины модельного выреза, полученная в рамках линейной механики разрушения. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только таких ρ, при которых использование модифицированного критерия Нейбера–Новожилова оправдано.

Для того чтобы во второй части статьи найти критическое значение внешних усилий для упругопластического материала с ограниченным предельным удлинением при пластичности, при котором реализуется предельно равновесное состояние пластины с вырезом, определим некоторую последовательность действий. Выпишем напряженное состояние в окрестности вершины исходного и модельного вырезов [2]. Найдем поле смещений для модельного выреза и раскрытие в вершине исходного выреза. Оценим поперечный размер пласти-

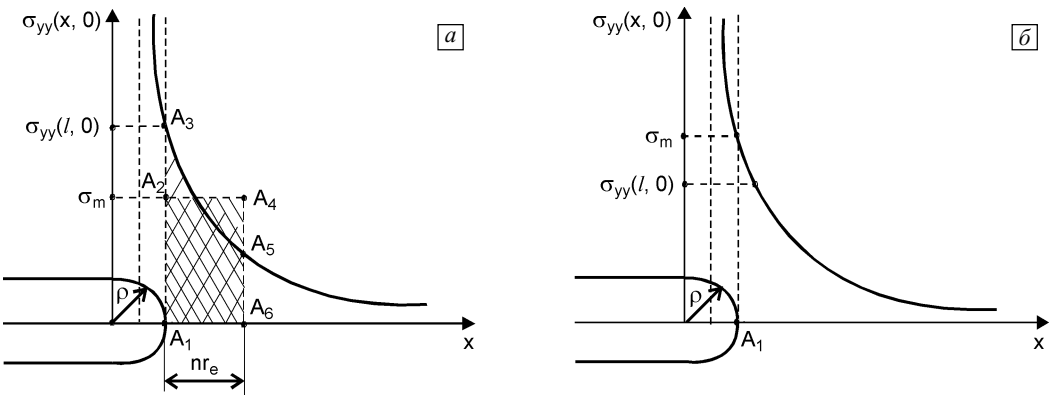


Рис. 4. Схематичное представление характера изменения напряжений в вершине модельного выреза

ческой области, возникающей перед вершиной исходного выреза, а следовательно, и критическое раскрытие в вершине исходного выреза. Решая систему двух уравнений, соответствующую достаточному критерию прочности, определим критическое значение внешних усилий.

2. Определение критического значения внешних усилий для пластины с трещиной

2.1. Напряженное состояние в пластине с исходной трещиной

Алгоритм нахождения напряженного состояния в тонкой пластине с исходной трещиной длины $2\ell_0$ реализуется в два этапа [4]. Первый этап соответствует растяжению пластины без трещины напряжениями на бесконечности σ_∞. На втором этапе для моделирования трещины отрезок $y = 0$, $|x| \le \ell_0$ нагружают усилиями, противоположными по направлению усилиям, найденным на первом этапе, то есть сжимающими усилиями — σ_∞. Полное решение задачи есть сумма решений, найденных на этих двух этапах. Выпишем решение для первого этапа:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = \sigma_\infty.$$

Граничные условия на линии трещины при $y = 0$, $|x| \le \ell_0$ для второго этапа:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = -\sigma_\infty.$$

Компоненты тензора напряжений для второго этапа вычисляются по формулам [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \operatorname{Re} Z_1 - y \operatorname{Im} Z_1', \\ \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} Z_1 + y \operatorname{Im} Z_1', \\ \sigma_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_1', \end{aligned} \tag{1}$$

где Z_1 — голоморфная функция, имеющая вид

$$Z_1 = \frac{\sigma_\infty}{\pi\sqrt{z^2 - \ell_0^2}} \int\limits_{-\ell_0}^{\ell_0} \frac{\sqrt{\ell_0^2 - \xi^2}}{z - \xi}\, d\xi = \frac{J}{\sqrt{2\pi(z - \ell_0)}},$$

где

$$J = \frac{\sqrt{2}\sigma_\infty}{\sqrt{\pi(z + \ell_0)}} \int\limits_{-\ell_0}^{\ell_0} \frac{\sqrt{\ell_0^2 - \xi^2}}{z - \xi}\, d\xi = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_\infty}{\sqrt{z + \ell_0}} \left(z - \sqrt{z^2 - \ell_0^2} \right).$$

При исследовании поведения поля напряжений в окрестности вершины трещины используется полярная система координат $z - \ell_0 = re^{i\theta}$, $r = \sqrt{(x - \ell_0)^2 + y^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}[y/(x - \ell_0)]$ при $x > \ell_0$; $\theta = \operatorname{arctg}[y/(x - \ell_0)] + \pi$ при $x \le \ell_0$. При малых r получаем $J = K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi \ell_0}$ — постоянную величину, равную коэффициенту интенсивности напряжений, зависящему от распределения приложенных нормальных напряжений и длины трещины. Вычислим $\operatorname{Re} Z_1$, $\operatorname{Im} Z_1$, $\operatorname{Re} Z_1'$, $\operatorname{Im} Z_1'$, $\operatorname{Re} J$, $\operatorname{Im} J$, $\operatorname{Re} J'$, $\operatorname{Im} J'$ для произвольного r

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left(\operatorname{Re} J \cos\frac{\theta}{2} + \operatorname{Im} J \sin\frac{\theta}{2} \right), \\
\operatorname{Im} Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\operatorname{Re} J \sin\frac{\theta}{2} + \operatorname{Im} J \cos\frac{\theta}{2} \right), \\
\operatorname{Re} Z_1' &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \operatorname{Re} J' \cos\frac{\theta}{2} + \operatorname{Im} J' \sin\frac{\theta}{2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2r} \left(\operatorname{Re} J \cos\frac{3\theta}{2} + \operatorname{Im} J \sin\frac{3\theta}{2} \right) \right\}, \\
\operatorname{Im} Z_1' &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ -\operatorname{Re} J' \sin\frac{\theta}{2} + \operatorname{Im} J' \cos\frac{\theta}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2r} \left(\operatorname{Re} J \sin\frac{3\theta}{2} - \operatorname{Im} J \cos\frac{3\theta}{2} \right) \right\}, \\
\operatorname{Re} J &= \sqrt{2\pi}\sigma_\infty \left(\frac{r_1}{\sqrt{r_2}} \cos\left[\theta_1 - \frac{\theta_2}{2} \right] - \sqrt{r} \cos\frac{\theta}{2} \right), \\
\operatorname{Im} J &= \sqrt{2\pi}\sigma_\infty \left(\frac{r_1}{\sqrt{r_2}} \sin\left[\theta_1 - \frac{\theta_2}{2} \right] - \sqrt{r} \sin\frac{\theta}{2} \right), \\
\operatorname{Re} J' &= \sqrt{2\pi}\sigma_\infty \left(\frac{1}{\sqrt{r_2}} \cos\frac{\theta_2}{2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{r_1}{2\sqrt{r_2^3}} \cos\left[\theta_1 - \frac{3\theta_2}{2} \right] - \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos\frac{\theta}{2} \right), \\
\operatorname{Im} J' &= \sqrt{2\pi}\sigma_\infty \left(-\frac{1}{\sqrt{r_2}} \sin\frac{\theta_2}{2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{r_1}{2\sqrt{r_2^3}} \sin\left[\theta_1 - \frac{3\theta_2}{2} \right] + \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin\frac{\theta}{2} \right),
\end{aligned} \tag{2}$$

где $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x + \ell_0)^2 + y^2}$, $\theta_1 = \operatorname{arctg}[y/x]$, $\theta_2 = \operatorname{arctg}[y/(x + \ell_0)]$. Подставив (2) в (1), получим решение для второго этапа. Полное решение задачи будет

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \operatorname{Re} J \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) + \right. \\
&\quad + \operatorname{Im} J \sin\frac{\theta}{2} \left(1 + \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \right) + \\
&\quad \left. + 2r \left(\operatorname{Re} J' \sin^2\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} - \operatorname{Im} J' \cos^2\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \right) \right\}, \\
\sigma_{yy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \operatorname{Re} J \cos\frac{\theta}{2} \left(1 + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) + \right. \\
&\quad + \operatorname{Im} J \sin\frac{\theta}{2} \left(1 - \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \right) - \\
&\quad \left. - 2r \left(\operatorname{Re} J' \sin^2\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} - \operatorname{Im} J' \cos^2\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \right) \right\} + \\
&\quad + \sigma_\infty,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left\{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(\mathrm{Re}\,J\cos\frac{3\theta}{2} + \mathrm{Im}\,J\sin\frac{3\theta}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - 2r\left(\mathrm{Re}\,J'\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \mathrm{Im}\,J'\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\right\}.$$

Если положить в формулах (2), (3) $y = 0$, то для $x \geq \ell_0$ получим [8]:

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_\infty x}{\sqrt{x^2 - \ell_0^2}} - \sigma_\infty,$$
$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_\infty x}{\sqrt{x^2 - \ell_0^2}}, \quad \sigma_{xy} = 0. \tag{4}$$

Заметим, что, находясь в рамках классической теории упругости, мы получили в вершине трещины сингулярность. В действительности для всех материалов при напряжениях выше предела текучести σ_m реализуется пластическое течение. В результате рост напряжений ограничен конечной величиной, а перед фронтом трещины всегда есть более или менее протяженная пластическая зона.

2.2. Оценка границы зоны пластичности, возникающей перед вершиной исходной трещины

Чтобы оценить границу зоны пластичности около вершины исходной трещины поступим следующим образом. Запишем критерий пластичности Мизеса в главных осях [4]

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 2\sigma_\mathrm{m}^2, \tag{5}$$

где

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2},$$
$$\sigma_3 = 0. \tag{6}$$

Третье главное напряжение выписано при плоском напряженном состоянии. Подставим (6) в (5) и получим равенство

$$3\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + 3\sigma_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)^2 = \sigma_\mathrm{m}^2. \tag{7}$$

Пусть $\sigma_\mathrm{m}/\sigma_\infty = p$. После подстановки формул (3) в равенство (7) получаем

$$\frac{1}{r\sigma_\infty^2}\left\{\frac{3\sin^2\theta}{4}(\mathrm{Im}^2\,J + \mathrm{Re}^2\,J + 4r^2\,\mathrm{Re}^2\,J' + \right.$$
$$+ 4r^2\,\mathrm{Im}^2\,J') + 4r\{\sin\theta(\mathrm{Re}\,J\,\mathrm{Im}\,J' - \mathrm{Im}\,J\,\mathrm{Re}\,J') -$$
$$- \cos\theta(\mathrm{Re}\,J\,\mathrm{Re}\,J' + \mathrm{Im}\,J\,\mathrm{Im}\,J')\} +$$
$$+ \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{r}\sigma_\infty}\left\{\left(\mathrm{Re}\,J\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{Im}\,J\sin\frac{\theta}{2}\right) - \right.$$
$$- \frac{3\sin\theta}{2}\left[-\mathrm{Re}\,J\sin\frac{3\theta}{2} + \mathrm{Im}\,J\cos\frac{3\theta}{2} + \right.$$
$$\left.\left. + 2r\left(\mathrm{Re}\,J'\sin\frac{\theta}{2} - \mathrm{Im}\,J'\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\} +$$
$$+ 2\pi(1 - p^2) = 0. \tag{8}$$

Если изначально в формуле (3), определяющей нормальное напряжение σ_{yy}, не принимать во внимание гладкую часть — напряжение σ_∞ — и ограничиться исследованием асимптотического поведения напряжения вблизи вершины трещины ($r \ll \ell_0$), вместо формулы (8) для плоского напряженного состояния получим следующее приближенное равенство [4]

$$r(\theta) \cong \frac{\ell_0}{4p^2}\left[\frac{3}{2}\sin^2\theta + \cos\theta + 1\right]. \tag{9}$$

На рис. 5, *а* показаны границы пластических зон, определяемые выражениями (8), (9) при $p = 8$. Начало декартовой системы координат Ox_1y_1 совпадает с правой вершиной трещины ($x_1 = x/\ell_0$, $y_1 = y/\ell_0$). Сплошная линия соответствует приближенному равенству (9), точечная — равенству (8). При этом наблюдается значительное сходство. Однако при $p < 8$ мы уже не можем говорить о совпадении уточненного и прибли-

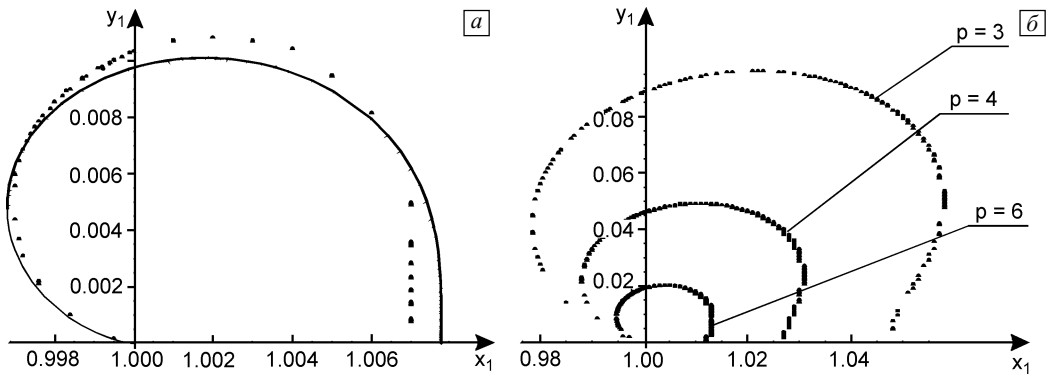


Рис. 5. Конфигурации пластических областей, полученных по критерию текучести Мизеса, при плоском напряженном состоянии

женного решений. На рис. 5, *б* показаны кривые, построенные с использованием формулы (8). Заметим, что зоны пластичности около вершины трещины при $p > 1$ не смыкаются, что согласуется с моделью Леонова–Панасюка–Дагдейла [1, 5, 6].

Оценим продольный $\Delta_{\text{п}}$ $(y_1 = 0)$ и поперечный h $(x_1 = 1)$ размеры пластической области. Вначале получим оценку продольного размера пластической области $\Delta_{\text{п}}$. Заметим, что при $y_1 = 0$: $\theta = \theta_1 = \theta_2 = 0$, $r/\ell_0 = x_1 - 1$, $r_1/\ell_0 = x_1$, $r_2/\ell_0 = x_1 + 1$. Тогда из выражения (8), а также при подстановке (4) в равенство (7) получаем

$$x_1 = \frac{\sqrt{4p^2 - 3} + 1}{\sqrt{4p^2 - 6 + 2\sqrt{4p^2 - 3}}}.$$

Следовательно, оценка длины зоны пластичности, полученная с помощью уточненного решения, запишется в виде

$$\Delta_{\text{п}} = (x_1 - 1)\ell_0 = \left(\frac{\sqrt{4p^2 - 3} + 1}{\sqrt{4p^2 - 6 + 2\sqrt{4p^2 - 3}}} - 1 \right) \ell_0. \qquad (10)$$

Оценка критической длины зоны пластичности, полученная с помощью приближенного равенства (9), имеет вид

$$\Delta_{\text{п}}^* = 0.5 p^{-2} \ell_0. \qquad (11)$$

Ирвин вычислил длину зоны пластичности $\Delta_{\text{п}}^*$ (см. формулу (11)) для трещины нормального отрыва, принимая в первом приближении нормальное напряжение, действующее на участке длиной $\Delta_{\text{п}}^*$, равным пределу текучести материала [9]. Однако «срезая» пик напряжений введением пластической зоны, нарушают равновесие сил, передаваемых этими напряжениями [9]. Вследствие чего величина $\Delta_{\text{п}}^*$ оказывается заниженной по сравнению с реальным размером пластической зоны. Равновесие может быть достигнуто только смещением поля напряжений на длину, равную $\Delta_{\text{п}}^*$. Эта процедура сводится к фиктивному удлинению трещины на величину $\Delta_{\text{п}}^*$ — поправку Ирвина на пластичность. Таким образом, при второй аппроксимации, когда принимают во внимание равновесие нагрузок, происходит смещение зоны пластичности на $\Delta_{\text{п}}$ для уточненного решения и на $\Delta_{\text{п}}^*$ для приближенного решения, что приводит к увеличению в два раза продольного размера зоны пластичности. При этом поперечник зоны пластичности остается неизменным [4, 9, 10]. Заметим, что формулу (10) можно получить, если в первом приближении положить напряжение $\sigma_{yy} = \sqrt{\sigma_{\text{m}}^2 - 3\sigma_\infty^2/4} - \sigma_\infty/2$. Соотношение

$$\Delta_{\text{п}}^{**} = \ell_0 \left[\sec\left(\frac{\pi}{2p} \right) - 1 \right] \qquad (12)$$

Таблица 1

p	1.2	1.5	3	10
$2\Delta_{\text{п}}/\ell_0$	1.03	0.45	0.094	0.009
$2\Delta_{\text{п}}^*/\ell_0$	0.69	0.44	0.111	0.01
$\Delta_{\text{п}}^{**}/\ell_0$	2.86	1	0.154	0.0125

дает длину пластической зоны при плоском напряженном состоянии в соответствии с моделью Леонова–Панасюка–Дагдейла. Сравним размеры пластических зон, определяемые формулами (10)–(12), учитывая, что имеет место плоское напряженное состояние. Формулы (10), (11) определяют половину длины пластической зоны, поэтому сравнение необходимо проводить между величинами $2\Delta_{\text{п}}/\ell_0$, $2\Delta_{\text{п}}^*/\ell_0$ и $\Delta_{\text{п}}^{**}/\ell_0$. Согласно табл. 1 при $p \geq 1.5$ (квазихрупкое разрушение) наблюдается значительное сходство безразмерных величин $2\Delta_{\text{п}}/\ell_0$, $2\Delta_{\text{п}}^*/\ell_0$. Таким образом, при вычислении продольного размера зоны пластичности приближенное решение можно использовать только для квазихрупкого разрушения. Кроме того, при $p < 3$ длина пластической зоны, вычисленная по модели Ирвина, отличается от ее значения, вычисленного по модели Леонова–Панасюка–Дагдейла. При $p \geq 3$ совпадение сравниваемых величин, полученных по рассматриваемым моделям, учитывая сильное различие между используемыми моделями, можно считать хорошим.

Вычислим поперечный размер зоны пластичности h. В этом случае $\theta = \pi/2$, $\theta_1 = \operatorname{arctg} y_1$, $\theta_2 = \operatorname{arctg}(y_1/2)$, $r/\ell_0 = y_1$, $r_1/\ell_0 = \sqrt{y_1^2 + 1}$, $r_2/\ell_0 = \sqrt{y_1^2 + 4}$. Заметим, что даже после упрощения соотношения (8) выразить y_1 через p весьма затруднительно. Поэтому для зависимости $p(y_1)$ подберем эмпирическую формулу. Вычислим величину p из уравнения (8) посредством подстановки в него определенного значения y_1. Полагая начальное значение $y_1 = 0.0001$, шаг, с которым оно будет увеличиваться, $t = 0.001$, вычислим 1370 пар (y_1, p). Построив график зависимости $p(y_1)$ (рис. 6) и сравнив его с графиком, помещенным

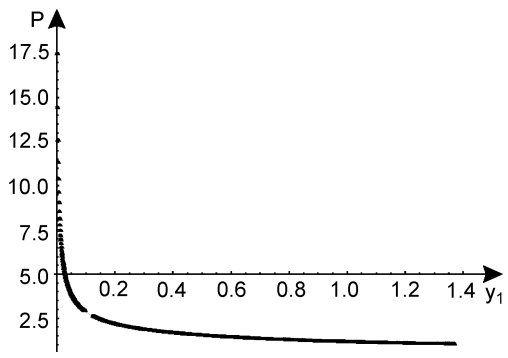


Рис. 6. График зависимости $p(y_1)$, соответствующий эмпирической формуле $p = a y_1^b$

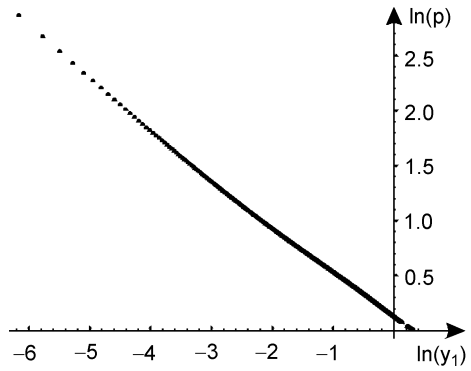


Рис. 7. Линейная зависимость между $\ln p$ и $\ln y_1$, полученная по методу выравнивания

на с. 579 справочника [11], убедимся, что для данного случая может подойти формула $p = ay_1^b$. Сходство графиков проверим по методу выравнивания. В данном случае выравниваются величины $X = \ln y_1$ и $Y = \ln p$: $Y = \ln a + bX$. Вычисляя для заданных значений y_1 и p соответствующие X и Y, увидим, что зависимость между X и Y практически линейна (рис. 7). Следовательно, формула выбрана правильно. Для определения констант a и b ищем линейную зависимость между величинами $\ln y_1$ и $\ln p$ по методу средних. Разделим условные уравнения $Y = \ln a + bX$ для имеющихся пар X_i, Y_i на две равные группы. Каждая группа состоит из 685 уравнений в порядке возрастания переменной X_i. Складывая уравнения каждой группы, получим систему двух уравнений, из которой и определим a и b:

$$\begin{cases} 471.4 = 685\ln a - 948.11b, \\ 82.65 = 685\ln a + 5.174b. \end{cases}$$

Откуда $\ln a = 0.1237$, $a = 1.132$, $b = -0.408$. Значения p вычисляются по формуле $p = 1.132y_1^{-0.408}$. Выразим y_1 через p: $y_1 = 1.355p^{-2.45}$. Тогда оценка поперечного размера зоны пластичности запишется в виде

$$h = 2y_1\ell_0 = 2.71p^{-2.45}\ell_0. \qquad (13)$$

Оценка (13) используется ниже в критерии критического раскрытия трещины.

2.3. Критическое раскрытие в вершине исходной трещины

Величину критического раскрытия в вершине исходной трещины получим, если в зоне пластичности у контура трещины выберем элементарный объем (прямоугольник со сторонами h и Δ на рис. 1, *a*) такой высоты, относительное удлинение которого в результате деформирования материала равно критическому раскрытию трещины в вершине. Тогда, если $\varepsilon_m - \varepsilon_0$ — максимальное относительное удлинение пластического материала (рис. 8) ($\varepsilon_0 = \sigma_m/E$ — предельное удлинение идеальноупругого материала, ε_m — предельное удлинение материала), учитывая формулу (13), запишем критическое раскрытие в вершине трещины

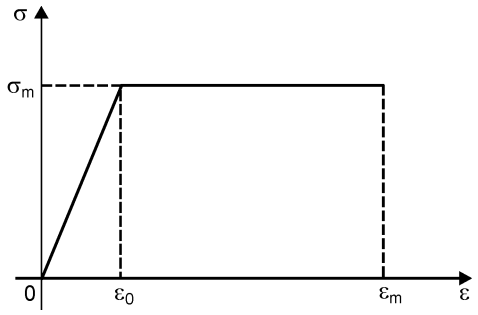


Рис. 8. $\sigma - \varepsilon$ -диаграмма

$$h_m = h(\varepsilon_m - \varepsilon_0) = 2.71p^{-2.45}\ell_0(\varepsilon_m - \varepsilon_0). \qquad (14)$$

Причем при $\varepsilon_m - \varepsilon_0 = 0$ получаем хрупкий материал, при $\varepsilon_m \to \infty$ имеем идеальнопластический материал. Для сравнения приведем критическое раскрытие в вершине трещины, полученное с помощью приближенного равенства (9) в работе [2] $h_m^* = 1.25p^{-2}\ell_0(\varepsilon_m - \varepsilon_0)$. Равенство $h_m = h_m^*$ имеет место при $p \approx 5.6$. Таким образом, при вычислении оценки поперечника пластической области приближенную формулу (9) можно использовать лишь для ограниченного числа параметров p, достаточно близких к $p \approx 5.6$ (табл. 2). Заметим, что в работе [12] критическое раскрытие в вершине трещины определяется отношением $h_m = h\varepsilon_m$, причем параметр h описывается лишь в общих чертах. Но поскольку элементарный объем выбирается в зоне пластичности (см. рис. 1, *a*), а материал в этой зоне уже упруго деформирован, более правильной будет запись $h_m = h(\varepsilon_m - \varepsilon_0)$. Отметим, что для материалов, обладающих повышенной пластичностью, для которых выполняется условие $\varepsilon_m \gg \varepsilon_0$, величиной ε_0 можно пренебречь. Пусть $\Delta = \Delta^*$, $\sigma_\infty = \sigma_\infty^*$, $\varepsilon = \varepsilon_m^*$ ($\Delta = \Delta^{**}$, $\sigma_\infty = \sigma_\infty^{**}$, $\varepsilon = \varepsilon_m^{**}$) — критические параметры для упругопластического материала с ограниченным предельным удлинением при пластичности (упруго-идеальнопластического материала). Величины Δ^*, σ_∞^*

Таблица 2

p	1.2	1.5	2	4	6	10	20	50
$h_m/(\ell_0(\varepsilon_m - \varepsilon_0))$	1.734	1	0.5	0.09	0.034	0.0096	0.002	0.0002
$h_m^*/(\ell_0(\varepsilon_m - \varepsilon_0))$	0.87	0.55	0.31	0.078	0.035	0.0125	0.003	0.0005

$(\Delta^{**},\ \varepsilon_{\mathrm{m}}^{**})$ определяем из достаточного критерия прочности, решая систему двух уравнений, одно из которых — модифицированный критерий Нейбера–Новожилова (условие конечности напряжений), другое — критерий критического раскрытия трещины.

2.4. Нормальное напряжение и перемещение на линии модельной трещины. Величина раскрытия в вершине исходной трещины

Для того чтобы найти напряженно-деформированное состояние на линии модельной трещины воспользуемся принципом суперпозиции и разобьем задачу на три вспомогательные задачи: растяжение пластины без модельной трещины напряжениями на бесконечности σ_∞; деформирование пластины с разрезом длины $2(\ell_0+\Delta)$ напряжениями $-\sigma_\infty$ при отсутствии внешних нагрузок; растяжение пластины с разрезом длины $2(\ell_0+\Delta)$ напряжениями σ_{m}, распределенными по концевым поверхностям трещины длиной Δ, при отсутствии внешних нагрузок. Полное решение задачи есть сумма решений трех вспомогательных задач. Для первой задачи нетрудно сразу выписать решение

$$\sigma_{yy}^{(\mathrm{I})}=\sigma_\infty,\ \ u_y^{(\mathrm{I})}=y\sigma_\infty/E=0\ \text{ при } y=0. \tag{15}$$

Сумма решений для второго и третьего этапов на линии модельной трещины для упругопластического материала с ограниченным предельным удлинением при пластичности запишется в виде [3, 4] $(\Delta_1=\Delta/\ell_0)$

$$\sigma_{yy}^{(\mathrm{II+III})}(x,0)=\frac{1}{\pi\sqrt{x_1^2-(1+\Delta_1)^2}}\times$$
$$\times\left[\pi(\sigma_\infty-\sigma_{\mathrm{m}})\left(x_1-\sqrt{x_1^2-(1+\Delta_1)^2}\right)+\right.$$
$$+2\sigma_{\mathrm{m}}x_1\arcsin\frac{1}{1+\Delta_1}+\sigma_{\mathrm{m}}\sqrt{x_1^2-(1+\Delta_1)^2}\times$$
$$\left.\times\left(\arcsin\frac{(1+\Delta_1)^2-x_1}{(1+\Delta_1)(x_1-1)}-\arcsin\frac{(1+\Delta_1)^2+x_1}{(1+\Delta_1)(x_1+1)}\right)\right]$$
$$(|\,x_1\,|\geq 1+\Delta_1), \tag{16}$$

$$u_y^{(\mathrm{II+III})}(x,0)=\frac{\ell_0}{\pi}\frac{\sigma_{\mathrm{m}}}{E}\{(x_1-1)\Gamma(1+\Delta_1,x_1,1)-$$
$$-(x_1+1)\Gamma(1+\Delta_1,x_1,-1)\}+2\ell_0\frac{\sigma_{\mathrm{m}}}{E}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{1+\Delta_1}\right)\sqrt{(1+\Delta_1)^2-x_1^2}$$
$$(|\,x_1\,|\leq 1+\Delta_1), \tag{17}$$

где

$$\Gamma(1+\Delta_1,x_1,\xi)=$$
$$=\ln\frac{(1+\Delta_1)^2-x_1\xi-\sqrt{((1+\Delta_1)^2-x_1^2)((1+\Delta_1)^2-\xi_1^2)}}{(1+\Delta_1)^2-x_1\xi+\sqrt{((1+\Delta_1)^2-x_1^2)((1+\Delta_1)^2-\xi_1^2)}}.$$

Учитывая формулы (15)–(17), запишем

$$\sigma_{yy}(x,0)=\sigma_{yy}^{(\mathrm{I})}(x,0)+\sigma_{yy}^{(\mathrm{II+III})}(x,0),$$
$$u_y=u_y^{(\mathrm{II+III})}. \tag{18}$$

При $\Delta=0$ (хрупкий материал) формула (18) переходит в формулу (4).Таким образом, предельный переход выполнен. Полагая в (17) $x_1\to 1$ $(x\to\ell_0)$, можно получить раскрытие в вершине исходной трещины для упруго пластического материала с ограниченным предельным удлинением при пластичности

$$2u_y(\ell_0,0)=4\ell_0\frac{\sigma_{\mathrm{m}}}{E}\times$$
$$\times\left[\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{1+\Delta_1}\right)\sqrt{\Delta_1^2+2\Delta_1}+\frac{2}{\pi}\ln(1+\Delta_1)\right]. \tag{19}$$

Смещение $u_y(x,0)$ для упруго-идеальнопластического материала получим, если в формуле (17) положим нулю второе слагаемое, содержащее множитель $\sqrt{(1+\Delta_1)^2-x_1^2}$, поскольку именно оно соответствует проинтегрированной сингулярной части выражения (16). Тогда для перемещений точек разреза $|\,x_1\,|\leq 1+\Delta_1$ имеем

$$2u_y(x,0)=\frac{\ell_0}{\pi}\frac{\sigma_{\mathrm{m}}}{E}\{(x_1-1)\Gamma(1+\Delta_1,x_1,1)-$$
$$-(x_1+1)\Gamma(x_1+1)\}. \tag{20}$$

При $x_1\to 1$ $(x\to\ell_0)$ из выражения (20) получаем раскрытие в вершине исходной трещины для упруго-идеальнопластического материала

$$\delta_{\mathrm{m}}=2u_y(x=\ell_0)=\frac{8\ell_0}{\pi}\frac{\sigma_{\mathrm{m}}}{E}\ln(1+\Delta_1). \tag{21}$$

Для упруго-идеальнопластического материала условие конечности напряжений в вершине модельной трещины заключается в равенстве нулю сингулярной части в выражении (16) и имеет вид

$$\pi(1-p)+2p\arcsin\frac{1}{1+\Delta_1}=0.$$

Откуда получаем

$$\Delta_1=\sin^{-1}\left(\frac{\pi(p-1)}{2p}\right)-1. \tag{22}$$

Согласно равенству (22) при $p\to 1$ величина $\Delta_1\to\infty$, что характерно для идеальнопластического материала.

2.5. Необходимый критерий хрупкой прочности

Запишем необходимый дискретно-интегральный критерий хрупкой прочности — модифицированный критерий Нейбера–Новожилова $(\Delta=0)$

$$\frac{1}{kr_{\mathrm{e}}}\int_{\ell_0}^{\ell_0+nr_{\mathrm{e}}}\sigma_{yy}(x,0)\mathrm{d}x=\sigma_{\mathrm{m}}. \tag{23}$$

Здесь σ_{m} — предел пропорциональности поликристаллических металлов («теоретическая» прочность мате-

риала), который в нашем случае равен пределу текучести материала; n и k — числа ($n \ge k$, $k \ge 1$ — число бездефектных связей). Критерий (23) — однопараметрический силовой критерий (параметр σ_m). Подставляя в критерий (23) нормальное напряжение на линии трещины (4) и интегрируя, получаем критическую нагрузку p^*, при которой реализуется предельно равновесное состояние пластины с трещиной

$$p^* = \sqrt{2\left(\frac{\ell_0}{r_e}\right)\frac{n}{k^2} + \left(\frac{n}{k}\right)^2}. \qquad (24)$$

Сравним равенство (24) с формулой (23) из [1], полученной на основе приближенного решения для квазихрупкого разрушения упругопластического материала с ограниченным предельным удлинением при пластичности. Полагая в формуле (23) из [1] $\Delta^* = 0$, получим

$$p^* = \frac{n}{k} + \frac{\sqrt{n}}{k}\sqrt{\frac{2\ell_0}{r_e}}. \qquad (25)$$

Положим $n = k = 1$. Критические нагрузки, найденные при использовании уточненного равенства (24): при $r_e/\ell_0 = 0.5$ (очень короткие трещины) имеем $p^* = 2.23$; при $r_e/\ell_0 = 0.25$ (короткие трещины) $p^* = 3$; при $r_e/\ell_0 = 0.1$ (длинные трещины) $p^* = 4.6$. Критические нагрузки, полученные при использовании приближенного равенства (25): при $r_e/\ell_0 = 0.5$ $p^* = 3$; при $r_e/\ell_0 = 0.25$ $p^* = 3.8$; при $r_e/\ell_0 = 0.1$ $p^* = 5.5$. Таким образом, чем длиннее трещина, тем требуется меньше усилий, для того чтобы пластина начала разрушаться. Кроме того, при определенном значении параметра r_e/ℓ_0 критическая нагрузка σ_∞^*, полученная с помощью уточненного равенства (24), больше критической нагрузки, полученной с помощью приближенного равенства (25).

2.6. Достаточные критерии прочности

Достаточный критерий прочности для упругопластического материала с ограниченным предельным удлинением при пластичности представляет собой систему двух уравнений, одно из которых — критерий Нейбера–Новожилова (напряжение $\sigma_{yy}(x, 0)$ определяется формулами (15), (16), (18)), другое — критерий критического раскрытия трещины (критическое раскрытие и раскрытие в вершине исходной трещины определяются соотношениями (14), (19) соответственно)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{kr_e}\displaystyle\int_{\ell}^{l+nr_e} \sigma_{yy}(x, 0)\,dx = \sigma_m \quad \text{при} \quad x \ge \ell, \\ 2u_y(\ell_0, 0) = h_m. \end{cases} \qquad (26)$$

Достаточный критерий прочности для упруго-идеальнопластического материала также состоит из двух уравнений, одно из которых — условие конечности напряжений в вершине трещины (см. формулу (22)), другое — критерий критического раскрытия трещины (критическое раскрытие и раскрытие в вершине исходной трещины определяются соотношениями (14), (21) соответственно)

$$\begin{cases} \Delta_1 = \sin^{-1}\left(\dfrac{\pi(p-1)}{2p}\right) - 1 \quad \text{при} \quad x \ge \ell, \\ \delta_m = h_m \qquad\qquad\qquad\quad \text{при} \quad x = \ell_0. \end{cases} \qquad (27)$$

Критерии (26), (27) — двухпараметрические (параметры σ_m, h_m) деформационно-силовые критерии. Заметим, что в критериях критического раскрытия трещины (26), (27) используется критическое раскрытие в вершине трещины h_m, полученное с помощью уточненного решения задачи. В работе [1] используется параметр h_m^* — критическое раскрытие в вершине трещины, полученный с помощью приближенного решения [1]. Однако, как отмечалось ранее, величину h_m^* можно использовать только для ограниченного набора параметров p, соответствующих квазихрупкому разрушению.

2.7. Критическое значение внешних усилий для упругопластического материала с ограниченным предельным удлинением при пластичности

Подставив формулы (14), (19) в деформационный критерий (26) и учитывая, что $\varepsilon_0 = \dfrac{\sigma_m}{E}$, получаем

$$\sqrt{\Delta_1^2 + 2\Delta_1} = \frac{2.71(\varepsilon_m - \varepsilon_0)p^{-2.45} - \dfrac{8}{\pi}\dfrac{\sigma_m}{E}\ln[1+\Delta_1]}{4\dfrac{\sigma_m}{E}\left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{\pi}\arccos\left[\dfrac{1}{1+\Delta_1}\right]\right]} = w(\Delta_1, \varepsilon_m, \varepsilon_0, p). \qquad (28)$$

Поскольку $w(\Delta_1, \varepsilon_m, \varepsilon_0, p) > 0$, уравнение (28) при фиксированных значениях параметров ε_m, ε_0, p запишем в виде

$$\Delta_1 = \sqrt{1 + w^2(\Delta_1)} - 1 = w_1(\Delta_1) \qquad (28')$$

и решим методом последовательных приближений (методом итераций) (см. с. 145–146 справочника [11]) с начальным значением $\Delta_1^{(0)} = 0$ (хрупкое разрушение). Если в правую часть равенства (28') вместо Δ_1 подставить $\Delta_1^{(0)}$, получим новое значение $\Delta_1^{(1)} = w_1(\Delta_1^{(0)})$. Подставляя $\Delta_1^{(1)}$ в правую часть уравнения (28'), получим $\Delta_1^{(2)} = w_1(\Delta_1^{(1)})$ и так далее. Повторяя этот процесс несколько раз, можно найти значение корня с любой степенью точности.

После подстановки нормального напряжения (18) в критерий (26) и интегрирования при $n = k = 1$ получаем неравенство

$$\left(1-p+\frac{2p}{\pi}\arcsin\left[\frac{1}{1+\Delta_1}\right]\right)\sqrt{2\frac{r_e}{\ell_0}(1+\Delta_1)+\left(\frac{r_e}{\ell_0}\right)^2}+$$

$$+\frac{p}{\pi}\left\{\left(\frac{r_e}{\ell_0}+\Delta_1\right)\arcsin\left[\frac{\Delta_1(\Delta_1+1)-r_e/\ell_0}{(\Delta_1+1)(\Delta_1+r_e/\ell_0)}\right]-\right.$$

$$\left.-\left(2+\Delta_1+\frac{r_e}{\ell_0}\right)\arcsin\left[\frac{(\Delta_1+1)(\Delta_1+2)+r_e/\ell_0}{(\Delta_1+1)(\Delta_1+2+r_e/\ell_0)}\right]+\pi\right\}=$$

$$=f_1(p,\varepsilon_m,\varepsilon_0,r_e/\ell_0,\Delta_1)=0. \qquad (29)$$

Полагая в выражении (29) $\Delta_1=0$ (хрупкий материал), получаем при $n=k=1$ равенство (24). Критерий (26) выполняется, если для согласованного набора параметров p, ε_m, ε_0, Δ_1, r_e/ℓ_0 имеет место равенство $f_1(p,\varepsilon_m,\varepsilon_0,r_e/\ell_0,\Delta_1)=0$. Для того чтобы определить критическую нагрузку $p^*=\sigma_m/\sigma_\infty^*$ при фиксированных параметрах ε_m, ε_0, r_e/ℓ_0 предпринимается следующая последовательность действий. Выбирается начальное значение $p=1.000001$, шаг, с которым p будет меняться, $t=0.001$. Для каждого значения p из преобразованного деформационного критерия (28') методом последовательных приближений вычисляется соответствующее ему Δ_1 и подставляется в преобразованный силовой критерий (29). Если имеет место равенство $f_1(p^*,\varepsilon_m^*,\varepsilon_0,r_e/\ell_0,\Delta_1^*)=0$, критическая нагрузка p^*, при которой материал начнет разрушаться, найдена. На рис. 9 показано семейство кривых *1–3* — срезы поверхности $f_1(p,\varepsilon_m,\varepsilon_0,r_e/\ell_0,\Delta_1)$ при фиксированных параметрах ε_m, ε_0, r_e/ℓ_0. Кривая *1* соответствует $\varepsilon_m=0.2$, $r_e/\ell_0=0.1$, $\varepsilon_0=0.1$; кривая *2* — $\varepsilon_m=0.2$, $r_e/\ell_0=0.25$, $\varepsilon_0=0.1$; кривая *3* — $\varepsilon_m=0.2$, $r_e/\ell_0=0.5$. Критические параметры для кривой *1*: $p^*\approx4.48$, $\Delta_1^*=0.0024$; кривой *2*: $p^*\approx2.92$, $\Delta_1^*=0.0083$; кривой *3*: $p^*\approx2.17$. Таким образом, кривые *1*, *2*, *3* имеют место при квазихрупком разрушении. Согласно рис. 9, чем меньше параметр r_e/ℓ_0 при фиксированном ε_0, то есть чем длиннее трещина, тем меньше значение σ_∞^*, при котором материал начнет разрушаться.

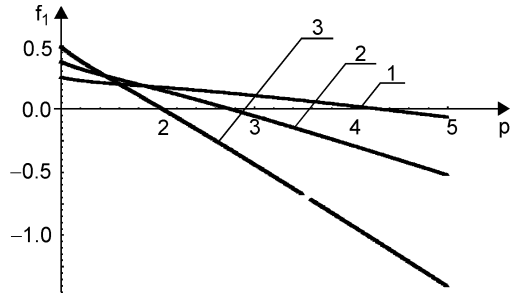


Рис. 9. Графическое представление достаточного критерия прочности. Критические нагрузки p^* определяются из условия $f_1(p^*,\varepsilon_m^*,\varepsilon_0,r_e/\ell_0,\Delta_1^*)=0$

2.8. Критическое значение внешних усилий для упруго-идеальнопластического материала

Для нахождения критической нагрузки p^{**} для упруго-идеальнопластического материала в деформационном критерии (27) величину δ_m (см. формулу (21)) положим равной параметру h_m (см. формулу (14)). Тогда получим

$$\Delta_1^{**}+1=\exp\left(\frac{E}{\sigma_m}\frac{0.34(\varepsilon_m^{**}-\varepsilon_0)\pi}{p^{**2.45}}\right). \qquad (30)$$

Подставляя выражение (30) в формулу (22) (условие конечности напряжений в вершине модельной трещины), найдем критическую нагрузку p^{**}

$$p^{**}=\left[\frac{2}{\pi}\arccos\left\{\exp\left(-\frac{0.34\pi}{p^{**2.45}}\left\langle\frac{\varepsilon_m^{**}}{\varepsilon_0}-1\right\rangle\right)\right\}\right]^{-1} \qquad (31)$$

или

$$\frac{\varepsilon_m^{**}}{\varepsilon_0}=-\frac{p^{**2.45}}{0.34\pi}\ln\cos\frac{\pi}{2p^{**}}+1. \qquad (32)$$

Согласно равенствам (31), (32), при $p^{**}\to1$ величина $\varepsilon_m^{**}\to\infty$, что характерно для упруго-идеальнопластического материала. Отношение $\varepsilon_m^{**}/\varepsilon_0$ является мерой вытягивания пластического материала зоны предразрушения при условиях, имеющих место в конце трещины. Выражение (32) является условием распространения трещины. Трещина начнет распространяться только тогда, когда деформация ε_m в вершине реальной трещины достигнет своего предельного значения. Если в деформационном критерии (27) величину δ_m положить равной параметру $h_m^*=1.25p^{-2}\ell_0(\varepsilon_m-\varepsilon_0)$, полученному с помощью приближенного равенства (9) [1], учитывая соотношение (22), получим равенство

$$\frac{\varepsilon_m^{**}}{\varepsilon_0}=-\frac{6.4p^{**2}}{\pi}\ln\cos\frac{\pi}{2p^{**}}+1. \qquad (33)$$

Согласно рис. 10 для определенного значения p^{**} величина критической деформации, полученная из уточненного решения (см. формулу (32), кривая *1*),

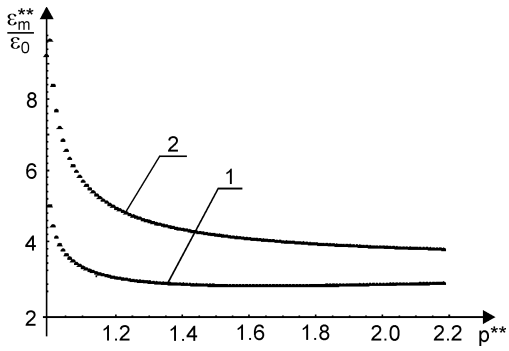


Рис. 10. Отношение деформаций $\varepsilon_m^{**}/\varepsilon_0$ как функция отношения напряжений p^{**}

меньше величины критической деформации, определенной из приближенного решения (см. формулу (33)), кривая *2*).

Таким образом, использование точного аналитического решения задачи Гриффитса, а также уточненной оценки поперечного размера зоны пластичности, позволило при определенном наборе входных параметров: 1) для упругопластического материала с ограниченным предельным удлинением при пластичности указать критическую нагрузку; 2) для упруго-идеальнопластического материала найти предельную деформацию, при которой начнется распространение трещины.

Перейдем ко второй части работы.

3. Определение критического значения внешних усилий для пластины с узким вырезом с закруглением в вершине

3.1. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины исходного и модельного вырезов

Поскольку и исходный, и модельный вырезы погружены в упругодеформированный материал, напряженно-деформированное состояние в окрестности их вершин определяется коэффициентом интенсивности напряжений, вычисляемыми методами линейной механики разрушения. Формулы, позволяющие оценить напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины исходного выреза, могут быть получены, если при аналогичном нагружении известны значения коэффициента интенсивности напряжений (K_{I}) для соответствующей этому вырезу трещины. Выражения для компонент напряжений в декартовых координатах имеют вид [2]

$$\sigma_{xx} = -\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{\rho}{2r}\cos\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]\right) + \ldots,$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{\rho}{2r}\cos\frac{3\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\left[1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]\right) + \ldots,$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\left(\frac{\rho}{2r}\sin\frac{3\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) + \ldots. \quad (34)$$

Здесь

$$r = \sqrt{(x - (\ell_0 - \rho/2))^2 + y^2},$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\,[y/(x - (\ell_0 - \rho/2))],$$

$$K_{\mathrm{I}} = \sigma_\infty\sqrt{\pi\ell_0}.$$

В соотношениях (34) расстояние r мало по сравнению с длиной выреза и удалением его вершины от границы тела.

Получим поле смещений u_x, u_y в окрестности вершины узкого выреза. В справочнике [2] оно не определено. Выразим напряжения (34) в полярных координатах r, θ. Для этого подставим выражения (34) в формулы преобразования напряжений [13]

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_r + \sigma_\theta,$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = e^{-2\theta i}(\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\sigma_{r\theta}).$$

Тогда

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}[\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})\cos 2\theta - 2\sigma_{xy}\sin 2\theta] =$$

$$= \frac{K_{\mathrm{I}}}{2\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1 + \frac{\rho}{r} + \cos\theta\right],$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2}[\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})\cos 2\theta + 2\sigma_{xy}\sin 2\theta] = \quad (35)$$

$$= \frac{K_{\mathrm{I}}}{2\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[3 - \frac{\rho}{r} - \cos\theta\right].$$

Подставим (35) в соотношения, связывающие смещения и напряжения, записанные в полярных координатах [13]:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{2\mu}[\sigma_r - \nu_1(\sigma_r + \sigma_\theta)],$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{2\mu}[\sigma_\theta - \nu_1(\sigma_r + \sigma_\theta)] - \frac{u_r}{r}.$$

Здесь $\mu = G = E/(2(1+\nu))$ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона. Значения коэффициента ν_1 для плоской деформации и обобщенного плоского напряженного состояния равны $\nu_1 = \nu$ и $\nu_1 = \nu/(1+\nu)$ соответственно. Проводя необходимые вычисления, получим

$$u_r = \frac{K_{\mathrm{I}}\sqrt{r}}{4\mu\sqrt{2\pi}}\left[\left(2\kappa - 1 + \frac{2\rho}{r}\right)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}\right],$$

$$u_\theta = \frac{K_{\mathrm{I}}\sqrt{r}}{4\mu\sqrt{2\pi}}\left[-\left(2\kappa + 1 + \frac{2\rho}{r}\right)\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right]. \quad (36)$$

Значения упругой постоянной κ для плоской деформации и обобщенного плоского напряженного состояния равны $\kappa = 3 - 4\nu$ и $\kappa = (3-\nu)(1+\nu)^{-1}$ соответственно. Если подставить (36) в формулы преобразования смещений [13]

$$u_x + iu_y = e^{i\theta}(u_r + iu_\theta),$$

то получим

$$u_x = u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta =$$

$$= \frac{K_{\mathrm{I}}\sqrt{r}}{4\mu\sqrt{2\pi}}\left[\left(2\kappa - 1 + \frac{2\rho}{r}\right)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}\right],$$

$$u_y = u_r\sin\theta + u_\theta\cos\theta = \quad (37)$$

$$= \frac{K_{\mathrm{I}}\sqrt{r}}{4\mu\sqrt{2\pi}}\left[\left(2\kappa + 1 + \frac{2\rho}{r}\right)\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2}\right].$$

При $\rho \to 0$ формулы (34), (37) переходят в асимптотические представления компонент напряжений и смещений в декартовой системе координат в окрестности вершины трещины.

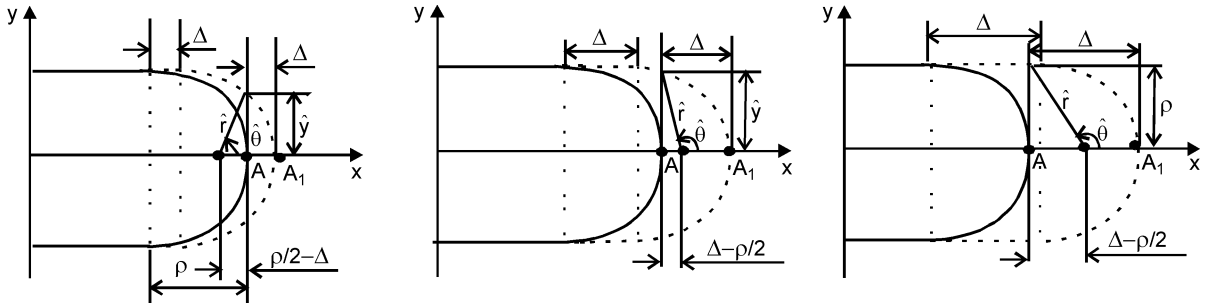


Рис. 11. Схема исходного и модельного вырезов для малой, «средней» и «большой» протяженности зоны пластичности при $\rho \ll \ell_0$

Формулы (34), (37) можно использовать для модельного выреза, если r заменить на $\tilde{r} = \sqrt{(x-(\ell-\rho/2))^2+y^2}$, θ — на $\tilde{\theta} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-(\ell-\rho/2)}$, а K_{I} — на $K_{\mathrm{I}}^{(\Sigma)}$. Суммарный коэффициент интенсивности $K_{\mathrm{I}}^{(\Sigma)}$ определяется в рамках модели Гриффитса суперпозицией решений двух задач линейной механики разрушения [4]: деформирование пластины с разрезом длины $2(\ell_0+\Delta)$ напряжениями $-\sigma_\infty$ при отсутствии внешних нагрузок; растяжение пластины с разрезом длины $2(\ell_0+\Delta)$ напряжениями σ_{m}, распределенными по концевым поверхностям трещины длиной Δ, при отсутствии внешних нагрузок (см. рис. 3, *б*). Первая задача имеет решение $K_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{I})} = \sigma_\infty\sqrt{\pi\ell}$, вторая [4] —

$$K_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{II})} = -\frac{2\sigma_{\mathrm{m}}\sqrt{\ell}}{\sqrt{\pi}}\arccos\left(1-\frac{\Delta}{\ell}\right).$$

Тогда

$$K_{\mathrm{I}}^{(\Sigma)} = \sigma_\infty\sqrt{\pi\ell}\left[1-\frac{2p}{\pi}\arccos\left(1-\frac{\Delta}{\ell}\right)\right]. \qquad (38)$$

3.2. Раскрытие в вершине исходного выреза

Раскрытие в вершине исходного выреза для упругопластического материала с ограниченным предельным удлинением при пластичности получим, если в формуле, определяющей смещения в окрестности вершины модельного выреза, положим $x \to \ell_0$, $y \to \hat{y}$

$$2u_y(\ell_0, \hat{y}) = \frac{K_{\mathrm{I}}^{(\Sigma)}\sqrt{\hat{r}}}{2\mu\sqrt{2\pi}}\left[\left(2\kappa+1+\frac{2\rho}{\hat{r}}\right)\sin\frac{\hat{\theta}}{2}-\sin\frac{3\hat{\theta}}{2}\right]. \qquad (39)$$

Причем при $0 < \Delta \le \rho/2$:

$$\hat{y} = \sqrt{2\Delta\rho-\Delta^2},$$

$$\hat{\theta} = \operatorname{arctg}[\hat{y}/(\rho/2-\Delta)],$$

$$\hat{r} = \sqrt{(\rho/2-\Delta)^2+\hat{y}^2} \quad \text{(рис. 11, } a\text{)};$$

при $\rho/2 < \Delta \le \rho$:

$$\hat{y} = \sqrt{2\Delta\rho-\Delta^2},$$

$$\hat{\theta} = \pi - \operatorname{arctg}[\hat{y}/(\Delta-\rho/2)],$$

$$\hat{r} = \sqrt{(\Delta-\rho/2)^2+\tilde{y}^2} \quad \text{(рис. 11, } б\text{)};$$

при $\rho < \Delta$:

$$\hat{\theta} = \pi - \operatorname{arctg}[\rho/(\Delta-\rho/2)],$$

$$\hat{r} = \sqrt{(\Delta-\rho/2)^2+\rho^2} \quad \text{(рис. 11, } в\text{)}.$$

На рис. 11 сплошной линией обозначено закругление исходного выреза, пунктирной линией — закругление модельного выреза.

3.3. Оценка границы пластической зоны в вершине исходного выреза

Чтобы оценить границу зоны пластичности в вершине исходного выреза при плоском напряженном состоянии, запишем критерий пластичности Мизеса в главных осях (см. формулу (5)). Подставим (34) в (7) и получим

$$\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{2\pi r}\left[3\left(\frac{\rho}{2r}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos\theta+1\right)\right] = \sigma_{\mathrm{m}}^2$$

или, учитывая, что в окрестности исходного выреза $K_{\mathrm{I}} = \sigma_\infty\sqrt{\pi\ell_0}$,

$$\frac{\ell_0}{r}\left[3\left(\frac{\rho}{\ell_0}\right)^2\left(\frac{\ell_0}{2r}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos\theta+1\right)\right] = 2p^2. \qquad (40)$$

При $\rho \to 0$ выражение (40) переходит в формулу (2.54) из [4], записанную для трещины при плоском напряженном состоянии. На рис. 12, *а* показаны границы пластических зон, определяемые выражением (40) при $\rho/\ell_0 = 0.001$ ($x_1 = x/\ell_0$, $y_1 = y/\ell_0$). Заметим, что при $p \ge 2$ длина зоны пластичности при $y = 0$ существенно меньше полудлины выреза, что соответствует квазихрупкому разрушению. Поскольку, оценивая границу зоны пластичности, мы использовали приближенное решение, рассматривать значения p достаточно близкие к 1, при которых реализуется квазивязкое, вязкое разрушение, мы не можем. На рис. 12, *б* кривая *1* соответствует $\rho/\ell_0 = 0.0001$, $\rho/\ell_0 = 0.001$, $p = 2$; кривая *2* — $\rho/\ell_0 = 0.01$, $p = 2$. Пластическая зона в вершине исходного выреза при $\rho/\ell_0 = 0.01$, $\rho/\ell_0 = 0.001$,

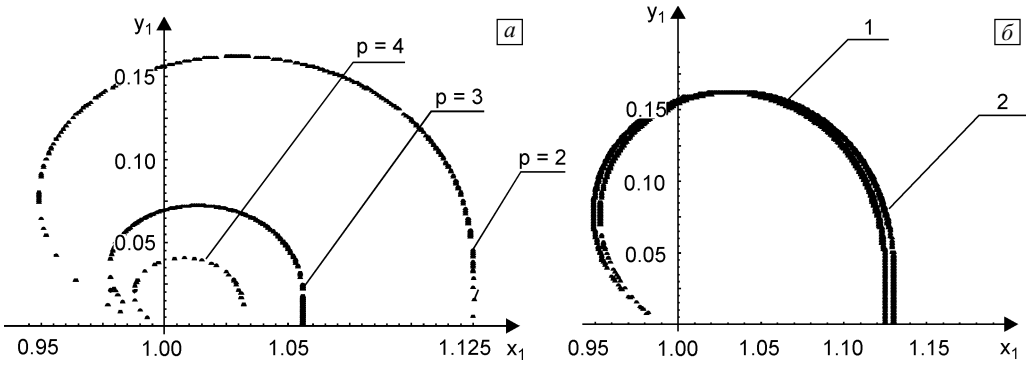


Рис. 12. Пластические зоны, полученные по критерию Мизеса при плоском напряженном состоянии

$\rho/\ell_0 = 0.0001$ напоминает пластическую зону в вершине трещины (см. рис. 2.11 из [4]).

Оценим поперечный размер пластической области h при $x = \ell_0$. В этом случае $\theta = \text{arctg}\,[2y_1/(\rho/\ell_0)]$. Выразить y_1 через p в равенстве (40) мы не можем. Поэтому подберем эмпирическую формулу для зависимости $p(y_1)$. Значение величины p определим из уравнения (40) посредством подстановки в него определенного значения y_1. Поскольку мы имеем дело с вырезом, начальное значение y_1^0 не может быть меньше ρ/ℓ_0. Положим $y_1^{(0)} = \rho/\ell_0$, шаг, с которым оно будет увеличиваться $h = 0.001$. Вычислим пары (y_1^i, p^i), $i = 1...400$ для $\rho/\ell_0 = 0.01$, $\rho/\ell_0 = 0.001$, $\rho/\ell_0 = 0.0001$. Графики зависимости $p(y_1)$ для выше указанных ρ/ℓ_0 (рис. 13) практически совпадают. Как и для трещины, в данном случае может подойти формула $p = ay_1^b$ [11]. Вычисляя для заданных значений y_1^i и p^i соответствующие X^i и Y^i, увидим, что зависимости между X и Y для разных ρ/ℓ_0 практически линейны (рис. 14). Следовательно, формула выбрана правильно. Складывая уравнения каждой группы, получим три системы уравнений для $\rho/\ell_0 = 0.01$, $\rho/\ell_0 = 0.001$, $\rho/\ell_0 = = 0.0001$

$$\begin{cases} 198.74 = 200\ln a - 483.21b, \\ 72.78 = 200\ln a - 238.15b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 212.89 = 200\ln a - 525.34b, \\ 75.21 = 200\ln a - 244.28b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 215.89 = 200\ln a - 525.34b, \\ 75.46 = 200\ln a - 244.9b, \end{cases}$$

соответственно из которых и определим a и b. Решением первой системы уравнений является $\ln a = -0.248$, $a = 0.78$, $b = -0.51$; второй и третьей систем уравнений — $\ln a = -0.24$, $a = 0.79$, $b = -0.5$. Значение p для $\rho/\ell_0 = 0.01$ вычисляется по формуле $p = 0.78y_1^{-0.51}$, значения p для $\rho/\ell_0 = 0.001$, $\rho/\ell_0 = 0.0001$ — по формуле $p = 0.79y_1^{-0.5}$. Выражая y_1 через p, получим для $\rho/\ell_0 = 0.01$: $y_1 = 0.61p^{-1.96}$, для $\rho/\ell_0 = 0.001$, $\rho/\ell_0 = = 0.0001$: $y_1 = 0.624p^{-2}$. Тогда оценки поперечных размеров зон пластичности для $\rho/\ell_0 = 0.001$, $\rho/\ell_0 = 0.01$ соответственно запишутся в виде

$$h = 2\ell_0 y_1 = 1.248\ell_0 p^{-2}, \qquad (41)$$

$$h = 2\ell_0 y_1 = 1.23\ell_0 p^{-1.96}. \qquad (41')$$

3.4. Критическое раскрытие в вершине исходного выреза

Критическое раскрытие в вершине исходного выреза определяется относительным удлинением элементарного объема высотой h и длиной Δ (см. рис. 1, *б*). Тогда,

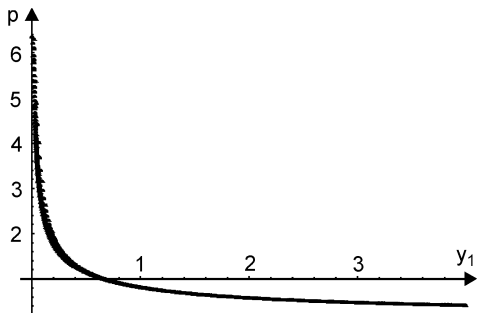


Рис. 13. Графики зависимости $p(y_1)$, соответствующие эмпирической формуле $p = ay_1^b$, построенные для $\rho/\ell_0 = 0.01$, $\rho/\ell_0 = 0.001$, $\rho/\ell_0 = 0.0001$

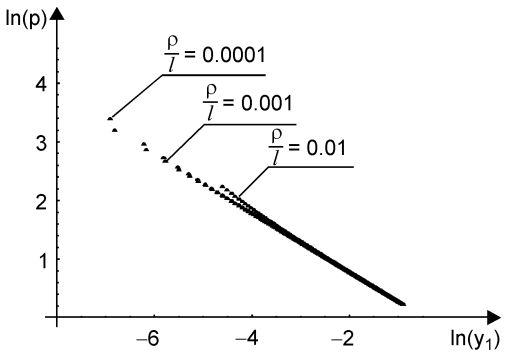


Рис. 14. Линейная зависимость между $\ln p$ и $\ln y_1$, полученная по методу выравнивания

учитывая формулы (41), (41′), запишем критические раскрытия в вершине исходного выреза для $\rho/\ell_0 = 0.001$, $\rho/\ell_0 = 0.01$ соответственно

$$h_{\rm m} = h(\varepsilon_{\rm m} - \varepsilon_0) = 1.248\ell_0 p^{-2}(\varepsilon_{\rm m} - \varepsilon_0), \quad (42)$$

$$h_{\rm m} = h(\varepsilon_{\rm m} - \varepsilon_0) = 1.23\ell_0 p^{-1.96}(\varepsilon_{\rm m} - \varepsilon_0). \quad (42')$$

Заметим, что критическое раскрытие в вершине исходного выреза $h_{\rm m}$ при $\rho/\ell_0 = 0.001$ совпадает с критическим раскрытием в вершине трещины $h_{\rm m}^* = 1.25p^{-2}\ell_0(\varepsilon_{\rm m} - \varepsilon_0)$ при $\rho = 0$, полученным с помощью приближенного решения в работе [1].

3.5. Достаточный критерий квазихрупкой прочности

Достаточный критерий квазихрупкой прочности для упругопластического материала с ограниченным предельным удлинением при пластичности при условии $\sigma_{yy}(\ell, 0) > \sigma_{\rm m}$ запишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{1}{kr_{\rm e}} \displaystyle\int_{\ell}^{l+nr_{\rm e}} \sigma_{yy}(x, 0)\,{\rm d}x = \sigma_{\rm m} \ \text{ при } \ x \ge \ell, \\ 2u_y(\ell_0, \hat{y}) = h_{\rm m}. \end{cases} \quad (43)$$

Здесь $2u_y(\ell_0, \hat{y})$ — раскрытие в вершине исходного выреза (см. формулу (39)); $h_{\rm m}$ определяется формулами (42), (42′). Критерий (43) — трехпараметрический критерий, в котором параметры $\sigma_{\rm m}$, $h_{\rm m}$ — деформационно-силовые параметры, а параметр ρ — геометрический.

3.6. Критические значения внешних усилий для пластины с узким вырезом

Подставим формулу, определяющую нормальное напряжение в окрестности вершины модельного выреза при $y = 0$:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{K_{\rm I}^{(\Sigma)}}{\sqrt{2\pi\tilde{r}}}\left(\frac{\rho}{2\tilde{r}}\cos\frac{3\tilde{\theta}}{2} + \cos\frac{\tilde{\theta}}{2}\left[1 + \sin\frac{\tilde{\theta}}{2}\sin\frac{3\tilde{\theta}}{2}\right]\right) + \ldots$$

($K_{\rm I}^{(\Sigma)}$ определяется соотношением (38)) в модифицированный критерий Нейбера–Новожилова (43). После интегрирования при $n = k = 1$ и некоторых преобразований получаем

$$p = \frac{N_1\left(\dfrac{\rho}{\ell_0}, \dfrac{r_{\rm e}}{\ell_0}\right)\sqrt{1+\Delta_1}}{\dfrac{2}{\pi}N_1\left(\dfrac{\rho}{\ell_0}, \dfrac{r_{\rm e}}{\ell_0}\right)\sqrt{1+\Delta_1}\arccos\left[\dfrac{1}{1+\Delta_1}\right] + \sqrt{2}\,\dfrac{r_{\rm e}}{\ell_0}}, \quad (44)$$

где

$$N_1\left(\frac{\rho}{\ell_0}, \frac{r_{\rm e}}{\ell_0}\right) = -\frac{\rho}{\ell_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho/(2\ell_0) + r_{\rm e}/\ell_0}} - \sqrt{\frac{2\ell_0}{\rho}}\right) + 2\left(\sqrt{\frac{\rho}{2\ell_0} + \frac{r_{\rm e}}{\ell_0}} - \sqrt{\frac{\rho}{2\ell_0}}\right).$$

Подставим формулу (39) и поочередно формулы (42), (42′) в деформационный критерий (43). После соответствующих преобразований получаем для плоского напряженного состояния

$$f_2\left(p, \Delta_1, \varepsilon_{\rm m}, \varepsilon_0, \frac{\rho}{\ell_0}, \frac{r_{\rm e}}{\ell_0}\right) = \left(\frac{A\sqrt{2}\left(\dfrac{\varepsilon_{\rm m}}{\varepsilon_0} - 1\right)}{(1+\nu)N_2\left(\dfrac{\rho}{\ell_0}, \Delta_1\right)\sqrt{(1+\Delta_1)\hat{r}_1\left(1 - \dfrac{2p}{\pi}\arccos\left[\dfrac{1}{1+\Delta_1}\right]\right)}}\right)^m - p = 0, \quad (45)$$

где

$$\hat{r}_1 = \hat{r}/\ell_0;$$

$$N_2\left(\frac{\rho}{\ell_0}, \Delta_1\right) = \left(2\kappa + 1 + 2\frac{1}{\hat{r}_1}\frac{\rho}{\ell_0}\right)\sin\frac{\hat{\theta}}{2} - \sin\frac{3\hat{\theta}}{2};$$

$\nu = 0.3$, $A = 1.25$, $m = 1$ при $\rho/\ell_0 = 0.001$;

$A = 1.23$, $m = 1.042$ при $\rho/\ell_0 = 0.01$.

Значение p при фиксированных параметрах $\varepsilon_{\rm m}$, ε_0, ρ/ℓ_0, $r_{\rm e}/\ell_0$ определим из преобразованного силового критерия (44) посредством подстановки в него определенного значения Δ_1 (начальное значение $\Delta_1 = 0.0001$). Затем согласованный набор параметров $\varepsilon_{\rm m}$, ε_0, ρ/ℓ_0, $r_{\rm e}/\ell_0$, Δ_1, p подставим в преобразованный деформационный критерий (45). Критическая нагрузка $p^* = \sigma_{\rm m}/\sigma_\infty^*$ находится из условия

$$f_2(p^*, \Delta_1^*, \varepsilon_{\rm m}^*, \varepsilon_0, \rho/\ell_0, r_{\rm e}/\ell_0) = 0.$$

На рис. 15, *а* показано семейство кривых *1–6* — срезы поверхности $f_2(p, \Delta_1, \varepsilon_{\rm m}, \varepsilon_0, \rho/\ell_0, r_{\rm e}/\ell_0)$ при фиксированных параметрах $\rho/\ell_0 = 0.001$, $\varepsilon_0 = 0.1$. Кривая *1* соответствует $\varepsilon_{\rm m} = 0.2$, $r_{\rm e}/\ell_0 = 0.1$; кривая *2* — $\varepsilon_{\rm m} = 0.2$, $r_{\rm e}/\ell_0 = 0.25$; кривая *3* — $\varepsilon_{\rm m} = 0.2$, $r_{\rm e}/\ell_0 = 0.5$; кривая *4* — $\varepsilon_{\rm m} = 0.3$, $r_{\rm e}/\ell_0 = 0.1$; кривая *5* — $\varepsilon_{\rm m} = 0.3$, $r_{\rm e}/\ell_0 = 0.25$; кривая *6* — $\varepsilon_{\rm m} = 0.3$, $r_{\rm e}/\ell_0 = 0.5$. Критические значения для кривой *1*: $p^* \approx 3.29$, $\Delta_1^* \approx 0.008$; кривой *2*: $p^* \approx 2.11$, $\Delta_1^* \approx 0.02$; кривой *3*: $p^* \approx 1.51$, $\Delta_1^* \approx 0.037$. Критических значений для кривых *4–6* нет. Таким образом, критические значения определяются не для всякого набора параметров $\varepsilon_{\rm m}$, ε_0, ρ/ℓ_0, $r_{\rm e}/\ell_0$. На рис. 15, *б* кривые *1–6* построены при фиксированных параметрах $\varepsilon_{\rm m} = 0.2$, $\varepsilon_0 = 0.1$. Кривая *1* соответствует $\rho/\ell_0 = 0.01$, $r_{\rm e}/\ell_0 = 0.1$; кривая *2* — $\rho/\ell_0 = 0.01$, $r_{\rm e}/\ell_0 = 0.25$; кривая *3* — $\rho/\ell_0 = 0.01$, $r_{\rm e}/\ell_0 = 0.5$; кривая *4* — $\rho/\ell_0 = 0.1$, $r_{\rm e}/\ell_0 = 0.1$; кривая *5* — $\rho/\ell_0 = 0.1$, $r_{\rm e}/\ell_0 = 0.25$; кривая *6* — $\rho/\ell_0 = 0.1$, $r_{\rm e}/\ell_0 = 0.5$. Критические значения для кривой *1*: $p^* \approx 3.14$, $\Delta_1^* \approx 0.01$; кривой *2*: $p^* \approx 1.87$, $\Delta_1^* \approx 0.029$; кривой *3*: $p^* \approx 1.515$, $\Delta_1^* \approx 0.035$; для кривой *4* $p^* \approx 2.59$, $\Delta_1^* \approx 0.016$; кри-

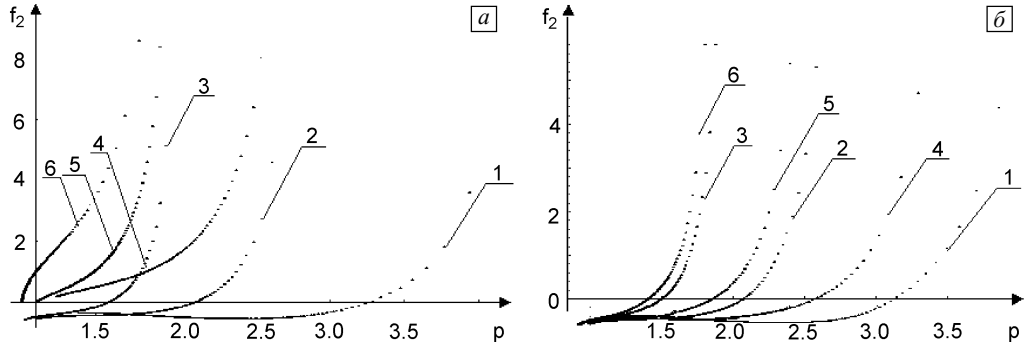


Рис. 15. Графическое представление достаточного критерия прочности. Критические нагрузки определяются условием $f_2(p^*, \Delta_1^*, \varepsilon_m^*, \varepsilon_0, \rho/\ell_0, r_e/\ell_0) = 0$

вой *5*: $p^* \approx 1.87$, $\Delta_1^* \approx 0.03$; кривой *6*: $p^* \approx 1.42$, $\Delta_1^* \approx 0.05$. Таким образом, кривые *1–3* на рис. 15, *а* и кривые *1–6* на рис. 15, *б* имеют место при квазихрупком разрушении. Кроме того, чем меньше параметр r_e/ℓ_0, то есть чем длиннее трещина, при фиксированных ε_m, ε_0, ρ/ℓ_0, тем больше $p^* = \sigma_m/\sigma_\infty^*$, следовательно, меньше требуется усилий σ_∞^* для того, чтобы материал начал разрушаться.

Таким образом, сведение упругопластической задачи для пластины с узким вырезом к граничной задаче теории упругости для пластины с трещиной, соответствующей вырезу, позволило значительно упростить численное решение задачи, построить трехпараметрический достаточный критерий прочности для квазихрупкого разрушения и определить критическую нагрузку, при которой реализуется предельно равновесное состояние пластины с вырезом.

4. Заключение

Заметим, что мы ограничились рассмотрением достаточно узких вырезов ($\rho/\ell_0 \le 0.01$), для которых выполняется модифицированный критерий Нейбера–Новожилова. Поэтому наблюдается некоторое сходство результатов, полученных в первой и второй частях статьи, а именно: форма зоны пластичности для выреза напоминает форму зоны пластичности для трещины, полученную с помощью приближенного решения; критическое раскрытие в вершине узкого выреза при ρ/ℓ_0 0.001 совпадает с критическим раскрытием в вершине трещины, полученным с помощью приближенного решения.

Поскольку на рис. 9 и рис. 15, *а* (графическое представление достаточных критериев прочности для трещины и узкого выреза) кривые *1–3* построены при идентичных значениях параметров ε_m, r_e/ℓ_0, ε_0 и $\rho/\ell_0 = 0.001$, сравним критические значения p^*, Δ_1^*. Пусть $p_т^*$, $\Delta_{1т}^*$ ($p_в^*$, $\Delta_{1в}^*$) — критические величины для трещины (выреза). Тогда можно записать $p_т^* > p_в^*$, $\Delta_{1т}^* < \Delta_{1в}^*$. Следовательно, для разрушения пластины с трещиной требуется меньше усилий, чем для разрушения пластины с вырезом. При этом зона пластичности перед вершиной трещины будет менее протяженная, чем перед вершиной выреза.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00873) и гранта Президента РФ № НШ-319.2003.1.

Литература

1. *Корнев В.М.* Обобщенный достаточный критерий прочности. Описание зоны предразрушения // ПМТФ. – 2002. – Т. 43. – № 5. – С. 153–161.
2. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Механика разрушения и прочность материалов: В 4 т. – Т. 2. – Киев: Наук. думка, 1988. – 618 с.
3. *Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З.* Основы механики разрушения материалов. Механика разрушения и прочность материалов: В 4 т. – Т. 1. – Киев: Наук. думка, 1988. – 487 с.
4. *Керштейн И.М., Клюшников В.Д., Ломакин Е.В., Шестериков С.А.* Основы экспериментальной механики разрушения. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 140 с.
5. *Леонов М.Я., Панасюк В.В.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикладная механика. – 1959. – Т. 5. – №. 4. – С. 391–401.
6. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – V. 8. – P. 100–104.
7. *Корнев В.М.* Распределение напряжений и раскрытие трещин в зоне предразрушения (подход Нейбера–Новожилова) // Физ. мезомех. – 2004. – Т. 7. – № 3. – С. 53–62.
8. *Хеллан К.* Введение в механику разрушения. – М.: Мир, 1988. – 364 с.
9. *Сиратори М., Миёси Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
10. *Плювинаж Г.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Мир, 1993. – 448 с.
11. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: Справочник. – М.: Наука. Физматлит, 1958. – 608 с.
12. *Гудьер Дж.* Математическая теория равновесных трещин / Разрушение. – М.: Мир, 1975. – Т. 2. – С. 13–82.
13. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения / Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения. – М.: Мир, 1975. – С. 84–201.