

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПО ВХОДУ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2006 А.Н. Волныкин, О.А. Кацюба

Самарская государственная академия путей сообщения

В статье рассматривается задача оценки параметров линейного разностного уравнения с многомерным входом при наличии помех наблюдения во входных и выходных сигналах. Эта задача отличается от стандартной задачи регрессионного оценивания, предложен новый критерий оценивания на основе отношения двух квадратичных форм, обобщающий стандартный метод наименьших квадратов и позволяющий получить состоятельные оценки параметров. Предлагается также численный метод определения оценок параметров линейных разностных уравнений, сводящийся к многократному решению линейных разностных уравнений.

Пусть имеет место стационарная линейная динамическая система, которая описывается следующим стохастическим уравнением заданного порядка с дискретным временем $i = \dots -1, 0, 1, \dots$

$$z_i - \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} z_{i-m} = \sum_{j=1}^d \sum_{m=0}^{r_j} a_0^{(mj)} x_{i-m}^{(j)}, \quad (1)$$

$$y_i = z_i + \xi_1(i), \quad w_i^{(j)} = x_i^{(j)} + \xi^{(j)}(i),$$

где $\xi_1(i)$ – помеха наблюдения в выходном сигнале, $\xi^{(j)}(i)$ – помеха наблюдения соответственно в j – м входном сигнале.

Применение классического МНК не позволяет получать состоятельные оценки параметров: в самом деле, использование классической процедуры МНК для определения параметров разностного уравнения приводит к минимизации среднего значения величины:

$$e^2(b^{(m)}, a^{(mj)}) = \left[y_i - \sum_{m=1}^r b^{(m)} y_{i-m} - \sum_{j=1}^d \sum_{m=0}^{r_j} a^{(mj)} w_{i-m}^{(j)} \right]^2.$$

Такая постановка задачи не совпадает с обычной постановкой задачи в регрессионном анализе.

Пусть выполняются следующие условия:

1) Множество $\tilde{B}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой линейной системы является компактом.

2) Помехи $\xi_1(i)$, $\xi^{(j)}(i)$, $j = \overline{1, d}$ статис-

тически независимы и удовлетворяют следующим условиям:

$$E(\xi_1(i+1)/\xi_1(i_0), \dots, \xi_1(i)) = 0 \quad \text{п.н.};$$

$$E((\xi_1)^2(i+1)/\xi_1(i_0), \dots, \xi_1(i)) = C_1(i+1) \leq \pi_1 < \infty \quad \text{п.н.};$$

$$E((\xi_1)^4(i)) < \pi_1^{(1)} \quad \text{п.н.};$$

$$E(\xi^{(j)}(i+1)/\xi^{(j)}(i_0), \dots, \xi^{(j)}(i)) = 0 \quad \text{п.н.};$$

$$E((\xi^{(j)})^2(i+1)/\xi^{(j)}(i_0), \dots, \xi^{(j)}(i)) = C^{(j)}(i+1) \leq \pi^{(j)} < \infty \quad \text{п.н.};$$

$$E((\xi^{(j)})^4(i)) < \pi^{(j1)} \quad \text{п.н.},$$

где E – оператор математического ожидания.

3) $\{x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(d)}\}$ статистически не зависят от $\{\xi_1(i)\}, \{\xi^{(j)}(i)\}$, $j = \overline{1, d}$.

4) Вектор входных переменных и истинные значения параметров удовлетворяют условиям:

$$N^{-1} \sum_{i=i_0}^N (z_r^T(i); (x_{r_1}^{(1)}(i))^T; \dots; (x_{r_d}^{(d)}(i))^T)^T (z_r^T(i); \dots; (x_{r_d}^{(d)}(i))^T)^T \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} H^*$$

где

$$z_r(i) = (z_{i-1} \dots z_{i-r})^T,$$

$$x_{r_j}^{(j)} = (x_i^{(j)} \dots x_{i-r_j}^{(j)})^T.$$

Представим уравнение (1) для всех $i = 1, 2, \dots, n$ в векторной форме в виде системы линейных алгебраических уравнений ($i_0 = 1$):

$$z = Zb_0 + Xa_0,$$

где

$$z = (z_1 \dots z_N)^T,$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_0 & \dots & z_{1-r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{N-1} & \dots & z_{N-r} \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_{1-r_1}^{(1)} & \dots & x_1^{(d)} & \dots & x_{1-r_d}^{(d)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N-1}^{(1)} & \dots & x_{N-1-r_1}^{(1)} & \dots & x_{N-1}^{(d)} & \dots & x_{N-1-r_d}^{(d)} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$b_0 = (b_0^{(1)} \dots b_0^{(r)})^T,$$

$$a_0 = (a_0^{(1)} \dots a_0^{(d)})^T,$$

$$a_0^{(j)} = (a_0^{(0j)} \dots a_0^{(r_j j)})^T.$$

Однако, вместо z, Z, X наблюдается только случайно возмущенный вектор $Y = (y_1 \dots y_N)^T \in R_N$ и матрицы A_Y и $A_W = (A_{W_1} \dots A_{W_d})$, которые определяются (2), если вместо $z_i \rightarrow y_i$, $x_i^{(j)} \rightarrow w_i^{(j)}$. Таким образом, задача идентификации параметров $(b_0 : a_0)^T$ сводится к решению стохастических алгебраических уравнений [1,2], определяемых значениями Y , $(A_Y : A_W) = A_{Y,W}$, вероятностные характеристики которых описываются условиями 1 – 4.

Представим уравнение (1) в виде:

$$y_i = (y_i^T(i); W_{r_1}^{(d)} \dots W_{r_d}^{(d)}(i)) \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} + \xi_1(i) - \Xi_r^T b_0 - \Xi_{r_1}^T a_0^{(1)} \dots - \Xi_{r_d}^T a_0^{(d)},$$

где

$$\Xi_{r_j} = (\xi_i^{(j)} \dots \xi_{i-r_j}^{(j)})^T \in R_{r_j+1}.$$

Введем следующую невязку:

$$e(b_0, a_0, i) = \xi_1(i) - \Xi_r^T b_0 - \Xi_{r_1}^T a_0^{(1)} \dots - \Xi_{r_d}^T a_0^{(d)}.$$

Тогда из уравнения (2) и леммы 1.1 [1,2], получаем, что средняя дисперсия невязки равна:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{i=k_0}^N E(e^2(b_0, a_0, i)) = \bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2 b_0^T b_0 + (\bar{\sigma}^{(1)})^2 (a_0^{(1)})^T a_0^{(1)} + \dots + (\bar{\sigma}^{(d)})^2 (a_0^{(d)})^T a_0^{(d)} = \bar{\sigma}_1^2 [1 + b_0^T b_0 + \gamma^{(1)} (a_0^{(1)})^T a_0^{(1)} + \dots + \gamma^{(d)} (a_0^{(d)})^T a_0^{(d)}] = \omega(b_0, a_0)$$

$$+ \dots + \gamma^{(d)} (a_0^{(d)})^T a_0^{(d)}] = \omega(b_0, a_0)$$

где:

$\bar{\sigma}_1^2$ – средняя дисперсия помехи наблюдения

$\xi_1(i)$, $(\bar{\sigma}^{(j)})^2$ – средняя дисперсия помехи наблюдения $\xi^{(j)}(i)$,

$$\gamma^{(j)} = \frac{(\bar{\sigma}^{(j)})^2}{\bar{\sigma}_1^2}.$$

Тогда определим оценку $\left(\frac{\hat{b}(N)}{\hat{a}(N)} \right)$ неизве-

стных истинных значений параметров $\left(\frac{b_0}{a_0} \right)$

из условия минимума суммы взвешенных квадратичных отклонений $e(b, a, i)$ с весом $\omega(b, a)$, то есть из:

$$\min_{\left(\frac{b}{a} \right) \in \tilde{B}} \omega^{-1}(b, a^{(1)} \dots a^{(d)}) U_N(b, a^{(1)} \dots a^{(d)}), \quad (3)$$

где

$$U_N(b, a^{(1)} \dots a^{(d)}) = \left(Y - A_{Y,W} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}, Y - A_{Y,W} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \right),$$

$(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение.

Утверждение 1. Пусть стационарная динамическая система с нулевыми начальными условиями описывается уравнением (1), и выполняются условия 1 – 4, тогда оценки

$\left(\frac{\hat{b}(N)}{\hat{a}(N)} \right)$, определяемые выражением (3) при

$N \rightarrow \infty$ существуют и являются сильно состоятельными оценками, то есть:

$$\left(\frac{\hat{b}(N)}{\hat{a}(N)} \right) \xrightarrow{П.Н.} \left(\frac{b_0}{a_0} \right).$$

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим функцию:

$$\frac{1}{N} U_N(b, a) = N^{-1} \sum_{i=1}^N (z_i + \xi_1(i) - (z_i^T(i) + \Xi_r^T) b - ((x_{r_1}^{(1)}(i))^T + \Xi_{r_1}^T) a^{(1)} - \dots - ((x_{r_d}^{(d)}(i))^T + \Xi_{r_d}^T) a^{(d)})^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= N^{-1} \sum_{i=1}^N (\xi_1(i) + z_r^T(i) b_0 + (x_{r_1}^{(1)}(i))^T a_0^{(1)} + \dots + (x_{r_d}^{(d)}(i))^T a_0^{(d)} - z_r^T(i) b - \\
 &\quad - \Xi_r^T b - (x_{r_1}^{(1)}(i))^T a^{(1)} - \Xi_{r_1}^T a^{(1)} - \dots - (x_{r_d}^{(d)}(i))^T a^{(d)} - \Xi_{r_d}^T a^{(d)})^2 = \\
 &= N^{-1} \sum_{i=1}^N (\xi_1(i) - z_r^T(i) \tilde{b} - (x_{r_1}^{(1)}(i))^T \tilde{a}^{(1)} - \dots - (x_{r_d}^{(d)}(i))^T \tilde{a}^{(d)} - \\
 &\quad - \Xi_r^T b - \Xi_{r_1}^T a^{(1)} - \dots - \Xi_{r_d}^T a^{(d)})^2 = v_1 + v_2 + v_3,
 \end{aligned}$$

где:

$$\tilde{b} = b - b_0,$$

$$\tilde{a}^{(j)} = a^{(j)} - a_0^{(j)}.$$

$$\begin{aligned}
 v_1 = N^{-1} \sum_{i=1}^N & \left(\xi_1^2(i) + b^T \Xi_r \Xi_r^T b + (a^{(1)})^T \Xi_{r_1} \Xi_{r_1}^T a^{(1)} + \dots + (a^{(d)})^T \Xi_{r_d} \Xi_{r_d}^T a^{(d)} + \right. \\
 & + 2b^T \Xi_r \Xi_{r_1}^T a^{(1)} + \dots + 2b^T \Xi_r \Xi_{r_d}^T a^{(d)} - 2\xi_1(i) \Xi_r^T b - 2\xi_1(i) (\Xi_{r_1}^T a^{(1)} - \\
 & \left. - \dots - 2\xi_1(i) (\Xi_{r_d}^T a^{(d)} + 2(a^{(1)})^T \Xi_{r_1} \Xi_{r_2}^T a^{(2)} + \dots + 2(a^{(d-1)})^T \Xi_{r_{d-1}} \Xi_{r_d}^T a^{(d)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_2 = N^{-1} \sum_{i=1}^N & \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{a}^{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{a}^{(d)} \end{pmatrix}^T \left(z_r^T(i) : (x_{r_1}^{(1)}(i))^T : \dots : (x_{r_d}^{(d)}(i))^T \right)^T \times \\
 & \times \begin{pmatrix} z_r^T(i) : \dots : (x_{r_d}^{(d)}(i))^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \vdots \\ \tilde{a}^{(d)} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_3 = 2N^{-1} \sum_{i=1}^N & \left(-\xi_1(i) z_r^T(i) \tilde{b} - \xi_1(i) (x_{r_1}^{(1)}(i))^T \tilde{a}^{(1)} - \dots - \xi_1(i) (x_{r_d}^{(d)}(i))^T \tilde{a}^{(d)} + \right. \\
 & + b^T \Xi_r z_r^T(i) \tilde{b} + (a^{(1)})^T \Xi_{r_1} z_r^T(i) \tilde{b} + \dots + (a^{(d)})^T \Xi_{r_d} z_r^T(i) \tilde{b} + \\
 & + b^T \Xi_r (x_{r_1}^{(1)}(i))^T \tilde{a}^{(1)} + \dots + b^T \Xi_r (x_{r_d}^{(d)}(i))^T \tilde{a}^{(d)} + (a^{(1)})^T \Xi_{r_1} (x_{r_1}^{(1)}(i))^T \tilde{a}^{(1)} + \\
 & \left. + \dots + (a^{(d)})^T \Xi_{r_d} (x_{r_d}^{(d)}(i))^T \tilde{a}^{(d)} + \dots + (a^{(d)})^T \Xi_{r_d} (x_{r_d}^{(d)}(i))^T \tilde{a}^{(d)} \right).
 \end{aligned}$$

Тогда из условия 2 по лемме 1.1 [1,2] получаем:

$$v_1 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{П.Н.} \bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2 b^T b + (\bar{\sigma}^{(1)})^2 (a^{(1)})^T a^{(1)} + \dots + (\bar{\sigma}^{(d)})^2 (a^{(d)})^T a^{(d)},$$

$$\forall \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \in \tilde{B}.$$

Из условия 4 следует:

$$v_2 = \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \vdots \\ \tilde{a} \end{pmatrix}^T H^* \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \vdots \\ \tilde{a} \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \in \tilde{B}.$$

Слагаемое

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(-\xi_1(i) z_r^T(i) \tilde{b} - \xi_1(i) (x_{r_1}^{(1)}(i))^T \tilde{a}^{(1)} - \dots - \xi_1(i) (x_{r_d}^{(d)}(i))^T \tilde{a}^{(d)} \right)$$

в силу условий 2, 3, 4 удовлетворяет условиям леммы 1.2 [1,2] и, следовательно, равно 0.

Заметим, что

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N b^T \Xi_r z_r^T(i) \tilde{b} = N^{-1} \sum_{i=1}^N b^T \begin{pmatrix} z_{i-1} \xi_1(i-1) & \dots & z_{i-r} \xi_1(i-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{i-1} \xi_1(i-r) & \dots & z_{i-r} \xi_1(i-r) \end{pmatrix} \tilde{b}. \quad (4)$$

Таким образом (4), можно представить в виде r^2 слагаемых, каждое из которых в силу условий 2, 3 по лемме 1.2 [1,2] сходится к нулю. Аналогично можно доказать, что и все остальные слагаемые сходятся к нулю с вероятностью 1 при $N \rightarrow \infty$.

Следовательно,

$$v_3 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{П.Н.} 0, \quad \forall \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \in \tilde{B}$$

и

$$\begin{aligned}
 N^{-1} U_N(b, a) & \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{П.Н.} \bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_1^2 b^T b + (\bar{\sigma}^{(1)})^2 (a^{(1)})^T a^{(1)} + \dots \\
 & \dots + (\bar{\sigma}^{(d)})^2 (a^{(d)})^T a^{(d)} + \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \vdots \\ \tilde{a} \end{pmatrix}^T H^* \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \vdots \\ \tilde{a} \end{pmatrix} = \bar{U}(b, a).
 \end{aligned}$$

Покажем, что решение задачи

$$\min \omega^{-1}(b, a^{(1)} \dots a^{(d)}) \bar{U}(b, a), \quad \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \in \tilde{B} \quad (5)$$

существует и достигается в единственной

$$\text{точке } \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$V(b, a, \theta) = \bar{U}(b, a) - \theta \omega(b, a^{(1)} \dots a^{(d)}), \quad \theta \in R_1,$$

$$V(\theta) = \min V(b, a, \theta), \quad \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \in \tilde{B}.$$

Тогда

$$V(b, a, \theta) = \bar{\sigma}_1^2 + \left(\frac{b_0}{a_0} \right)^T H^* \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} - 2 \left(H^* \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} - \bar{\sigma}_1^2 \theta + \left(\frac{b}{a} \right)^T \times$$

$$\times \begin{pmatrix} H_{ZZ} + \bar{\sigma}_1^2 I_r - \theta \bar{\sigma}_1^2 I_r & \dots & H_{ZX^{(d)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{X^{(d)}Z} & \dots & H_{X^{(d)}X^{(d)}} + (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} - \theta (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix},$$

если

$$H^* = \begin{pmatrix} H_{ZZ} & \cdots & H_{ZX^{(d)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{X^{(d)}Z} & \cdots & H_{X^{(d)}X^{(d)}} \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя $V(b, a, \theta)$ по $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ и приравняв производную к нулю, получим:

$$\begin{pmatrix} b(\theta) \\ a(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{ZZ} + \bar{\sigma}_1^2 I_r - \theta \bar{\sigma}_1^2 I_r & \cdots & H_{ZX^{(d)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{X^{(d)}Z} & \cdots & H_{X^{(d)}X^{(d)}} + (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} - \theta (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Тогда

$$V(\theta) = \bar{\sigma}_1^2 + \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}^T H^* \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} - \bar{\sigma}_1^2 \theta - \left(H^* \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \right)^T \times \begin{pmatrix} H_{ZZ} + \bar{\sigma}_1^2 I_r - \theta \bar{\sigma}_1^2 I_r & \cdots & H_{ZX^{(d)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{X^{(d)}Z} & \cdots & H_{X^{(d)}X^{(d)}} + (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} - \theta (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda_{\min}$ – минимальное характеристическое число регулярного числа форм

$$\begin{pmatrix} H_{ZZ} + \bar{\sigma}_1^2 I_r & \cdots & H_{ZX^{(d)}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{X^{(d)}Z} & \cdots & H_{X^{(d)}X^{(d)}} + (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} \end{pmatrix} - \theta \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1^2 I_r & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} \end{pmatrix},$$

то, следовательно, $\lambda_{\min} > 0$, и функция $V(\theta)$ на интервале $(-\infty, \lambda_{\min} + 1)$ непрерывна и

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = -\bar{\sigma}_1^2 - \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1^2 I_r & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

отрицательна на интервале $(-\infty, \lambda_{\min} + 1)$, отсюда следует, что $V(\theta) = 0$ на интервале $(-\infty, \lambda_{\min} + 1)$ имеет не более одного корня.

Нетрудно убедиться, что $\theta = 1$ является корнем уравнения $V(\theta) = 0$ и $1 < \lambda_{\min} + 1$.

Тогда из (6) непосредственно следует справедливость (5).

Введем следующий вектор $(1 \mid b \mid a^{(1)} \dots a^{(d)}) = u$ и матрицы $\bar{A}_{Y,W} = (-Y \mid A_{Y,W})$,

$$D^* = \begin{matrix} & \underbrace{r} & \underbrace{r_1+1} & & \underbrace{r_d+1} \\ r\{ & \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_1^2 I_r & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} \end{pmatrix} \\ r_d+1\{ & \end{matrix},$$

то (3) можно записать в виде:

$$\min_{u \in \tilde{B} \subset R_{r+\eta_1+1+\dots+r_d+1}} \frac{u^T \bar{A}_{Y,W}^T \cdot \bar{A}_{Y,W} u}{u^T D^* u},$$

где $\bar{A}_{Y,W}^T \bar{A}_{Y,W} > 0$.

Для конкретной выборки объема N нахождение корня уравнения $V_N(\theta) = 0$ (эти корни имеют те же свойства, что и для $V(\theta) = 0$) можно записать в следующей форме:

$\hat{\theta}_N = \lambda_{\min}(N) \left[\bar{A}_{Y,W}^T \bar{A}_{Y,W} (D^*)^{-1} \right]$ – минимальное характеристическое число пучка квадратичных форм, определяемых $\bar{A}_{Y,W}^T$, $\bar{A}_{Y,W}$ и D^* . Но $D^* \geq 0$, поэтому рассмотрим [3, С. 281]:

$$\lambda_{\min}(N) \left[\bar{A}_{Y,W}^T \bar{A}_{Y,W} - \theta D^* \right] = \frac{1}{\lambda_{\max}(N) \left[\left(\bar{A}_{Y,W}^T \bar{A}_{Y,W} \right)^{-1} D^* \right]}.$$

Известно [4, Р. 452], что:

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\lambda_{\max}(N) \left[\left(\bar{A}_{Y,W}^T \bar{A}_{Y,W} \right)^{-1} D^* \right]} \xrightarrow{п.н.} \frac{1}{\lambda_{\max} \left[\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \bar{A}_{Y,W}^T \bar{A}_{Y,W} \right)^{-1} D^* \right]} =$$

$$\lambda_{\min} \left[\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \bar{A}_{Y,W}^T \bar{A}_{Y,W} \right) (D^*)^{-1} \right].$$

Так как нахождение $\lambda_{\min} \left[\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \bar{A}_{Y,W}^T \bar{A}_{Y,W} \right) (D^*)^{-1} \right]$ можно интерпретировать как определение корня уравнения $V(\theta) = 0$, то $\frac{1}{N} \hat{\theta}_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{П.Н.} \hat{\theta}$.

Далее параметры можно определить, если ввести следующую вспомогательную функцию:

$$V_N(b, a, \theta) = Y^T Y - \bar{\sigma}_1^2 \theta - 2 \left(Y^T A_Y \mid Y^T A_W \right) \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_Y^T A_Y - \theta \bar{\sigma}_1^2 I_r & A_Y^T A_{W_1} & \cdots & A_Y^T A_{W_d} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{W_d}^T A_Y & \cdots & \cdots & A_{W_d}^T A_{W_d} - \theta (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя $V_N(b, a, \theta)$ по b и a и приравнявая производную к нулю имеем:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_Y^T A_Y - \theta \bar{\sigma}_1^2 I_r & A_Y^T A_{W_1} & \cdots & A_Y^T A_{W_d} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{W_d}^T A_Y & \cdots & \cdots & A_{W_d}^T A_{W_d} - \theta (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_Y^T Y \\ A_W^T Y \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$V_N(\theta) = Y^T Y - \bar{\sigma}_1^2 \theta - \left(\begin{array}{c} A_Y^T Y \\ A_W^T Y \end{array} \right)^T \times \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_Y^T A_Y - \theta \bar{\sigma}_1^2 I_r & A_Y^T A_{W_1} & \cdots & A_Y^T A_{W_d} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{W_d}^T A_Y & \cdots & \cdots & A_{W_d}^T A_{W_d} - \theta (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} \end{array} \right)^{-1} \times \begin{pmatrix} A_Y^T Y \\ A_W^T Y \end{pmatrix},$$

и неизвестные параметры могут быть определены из уравнения (7).

Тогда, очевидно

$$\frac{1}{N} \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_Y^T A_Y - \theta \bar{\sigma}_1^2 I_r & A_Y^T A_{W_1} & \cdots & A_Y^T A_{W_d} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{W_d}^T A_Y & \cdots & \cdots & A_{W_d}^T A_{W_d} - \theta (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{N} \left(\begin{array}{c} A_Y^T Y \\ A_W^T Y \end{array} \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{П.Н.} \left(\begin{array}{c|c|c|c} H_{ZZ} + \bar{\sigma}_1^2 I_r - \theta \bar{\sigma}_1^2 I_r & \cdots & \cdots & H_{ZX^{(d)}} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline H_{X^{(d)}Z} & \cdots & H_{X^{(d)}X^{(d)}} + (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} - \theta (\bar{\sigma}^{(d)})^2 I_{r_d+1} \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} - H^* \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Из единственности решения (6) и (7) и последнего выражения следует [5, Р. 178], что оценки стремятся к истинным значениям

$$\begin{pmatrix} \hat{b}(N) \\ \hat{a}(N) \end{pmatrix} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{П.Н.} \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Для получения численного метода вычисления оценок параметров из критерия (3) рассмотрим функцию:

$$V_N(b, a, \theta) = U_N(b, a) - \theta \omega(b, a),$$

$$V_N(\theta) = \min_{\left(\frac{b}{a} \right) \in \tilde{B}} V_N(b, a, \theta),$$

тогда:

$$V_N(b, a, \theta) = \left(Y^T - \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^T A_{Y,W}^T \right) \left(Y - A_{Y,W} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \right) - \theta \left(1 + b^T b + \gamma^{(1)} (a^{(1)})^T a^{(1)} + \cdots + \gamma^{(d)} (a^{(d)})^T a^{(d)} \right) = Y^T Y - 2 \left(Y^T A_Y \mid Y^T A_W \right) \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} - \theta + \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^T \times$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_Y^T A_Y - \theta I_r & A_Y^T A_{W^{(1)}} & \cdots & A_Y^T A_{W^{(d)}} \\ \hline A_{W^{(1)}}^T A_Y & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(1)}} - \theta \gamma^{(1)} I_{r_1+1} & \cdots & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(d)}} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{W^{(d)}}^T A_Y & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(1)}} & \cdots & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(d)}} - \theta \gamma^{(d)} I_{r_d+1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \quad (8)$$

Дифференцируя $V_N(b, a, \theta)$ по b и a и приравнявая производную к нулю имеем:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_Y^T A_Y - \theta I_r & A_Y^T A_{W^{(1)}} & \cdots & A_Y^T A_{W^{(d)}} \\ \hline A_{W^{(1)}}^T A_Y & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(1)}} - \theta \gamma^{(1)} I_{r_1+1} & \cdots & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(d)}} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{W^{(d)}}^T A_Y & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(1)}} & \cdots & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(d)}} - \theta \gamma^{(d)} I_{r_d+1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_Y^T Y \\ A_W^T Y \end{pmatrix}, \quad (9)$$

откуда

$$V_N(\theta) = Y^T Y - \theta \left(\frac{A_Y^T Y}{A_W^T Y} \right)^T \times$$

$$\times \begin{pmatrix} A_Y^T A_Y - \theta I_r & A_Y^T A_{W^{(1)}} & \dots & A_Y^T A_{W^{(d)}} \\ A_{W^{(1)}}^T A_Y & \dots & \dots & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(d)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{W^{(d)}}^T A_Y & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(1)}} & \dots & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(d)}} - \theta \gamma^{(d)} I_{r_d+1} \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} A_Y^T Y \\ A_W^T Y \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма: для функции $V_N(\theta)$, связанной с задачей (3) существует следующее утверждение:

- 1) Все корни уравнения $V_N(\theta) = 0$ не отрицательны;
- 2) Уравнение (10) на полусегменте $[0, \lambda_{\min}(N))$ имеет не более одного корня $\hat{\theta}(N)$, где $\lambda_{\min}(N)$ - минимальное собственное число регулярного пучка форм, то есть наименьший корень уравнения:

$$\det \begin{pmatrix} A_Y^T A_Y & A_Y^T A_{W^{(1)}} & \dots & A_Y^T A_{W^{(d)}} \\ A_{W^{(1)}}^T A_Y & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(1)}} & \dots & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(d)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{W^{(d)}}^T A_Y & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(1)}} & \dots & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(d)}} \end{pmatrix} -$$

$$-\theta \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, r_d+1} & \dots & 0_{r, r_d+1} \\ 0_{r, r_d+1}^T & \gamma^{(1)} I_{r_1+1} & \dots & 0_{r_1+1, r_d+1} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0_{r, r_d+1}^T & 0_{r_1+1, r_d+1}^T & \dots & \gamma^{(d)} I_{r_d+1} \end{pmatrix} = 0;$$

- 3) Существование корня $\hat{\theta}(N)$ на полусегменте $[0, \lambda_{\min}(N))$ является необходимым и достаточным условием существования и единственности решения (3).

Доказательство леммы. Функция $V_N(\theta)$ на $[0, \lambda_{\min}(N))$ непрерывна, к тому же $\lambda_{\min}(N) \geq 0$ как собственное число неотрицательной определенной матрицы.

Далее,

$$\dot{V}_N(\theta) = - \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^T \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, r_d+1} & \dots & 0_{r, r_d+1} \\ 0_{r, r_d+1}^T & \gamma^{(1)} I_{r_1+1} & \dots & 0_{r_1+1, r_d+1} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0_{r, r_d+1}^T & 0_{r_1+1, r_d+1}^T & \dots & \gamma^{(d)} I_{r_d+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \right) \leq -1.$$

Тогда на интервале $(-\infty, \lambda_{\min}(N))$ $V_N(\theta)$ имеет не более одного корня, если он существует, $V_N(0) \geq 0$ и, следовательно, $V_N(\theta) > 0 \forall \theta \in (-\infty, 0)$ (матрица

$$I_N - \left(\frac{A_Y^T}{A_W^T} \right)^T \begin{pmatrix} A_Y^T A_Y & A_Y^T A_{W^{(1)}} & \dots & A_Y^T A_{W^{(d)}} \\ A_{W^{(1)}}^T A_Y & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(1)}} & \dots & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(d)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{W^{(d)}}^T A_Y & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(1)}} & \dots & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(d)}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_Y^T \\ A_W^T \end{pmatrix}$$

идемпотентная).

Отсюда вытекает справедливость утверждений 1, 2 и достаточность 3. Необходимость 3⁰ вытекает из экстремальных свойств регулярного пучка форм [3].

Утверждение 2. Пусть выполняются все условия утверждения 1, тогда с вероятностью 1 при $N \rightarrow \infty$ существует корень $\hat{\theta}(N) \in [0, \lambda_{\min}(N)]$ и единственная оценка (9), которая является одновременно решением задачи (3) и $\hat{b}(N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} b_0$ п. н.; $\hat{a}(N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} a_0$ п. н.

Доказательство утверждения 2 следует из утверждения 1 и леммы.

На основании утверждения 2 предлагается численный метод, который позволяет:

ответить на вопрос существует ли единственная оценка $\hat{b}(N)$, $\hat{a}(N)$;

определить начальное приближение, гарантирующее сходимость итерационного процесса к единственной оценке $\hat{b}(N)$, $\hat{a}(N)$;

вычислить с любой наперед заданной точностью оценку $\hat{b}(N)$, $\hat{a}(N)$;

Утверждение 3. Пусть последовательность $\{\hat{\theta}(i)\}$ определяется следующим алгоритмом:

Шаг 0.

$$\hat{\theta}'(0) = 0;$$

Шаг 1.

$$\hat{\theta}'(i) = \frac{(\lambda_{\min} + \hat{\theta}'(i-1))}{2};$$

Шаг 2. Вычислить $\hat{b}(N, \hat{\theta}'(i))$, $\hat{a}(N, \hat{\theta}'(i))$ из системы линейных уравнений (9);

Шаг 3. Вычислить

$$V_N(\hat{\theta}'(i)) = Y^T Y - \theta - \left(\frac{A_Y^T Y}{A_W^T Y} \right)^T \begin{pmatrix} \hat{b}(N, \hat{\theta}'(i)) \\ \hat{a}(N, \hat{\theta}'(i)) \end{pmatrix};$$

Шаг 4. Проверить условие $V_N(\hat{\theta}'(i)) \leq 0$.

Тогда если уравнение $V_N(\hat{\theta}'(i)) = 0$ имеет корень $\hat{\theta}'_1(N) \in [0, \lambda_{\min}(N))$, то последовательность $\hat{\theta}'(0), \hat{\theta}'(1), \dots, \hat{\theta}'(0)$ – конечна и $\hat{\theta}(0) \in [\hat{\theta}'_1(N), \lambda_{\min}(N))$, в противном случае последовательность бесконечна.

Доказательство утверждения непосредственно следует из леммы.

Этот алгоритм позволяет определить начальное приближение $\hat{\theta}(0)$, необходимое для дальнейшего применения метода Ньютона или определить, что корень $\hat{\theta}'_1(N)$ не существует.

Утверждение 4. Пусть существуют $\hat{\theta}(0) \in [\hat{\theta}'_1(N), \lambda_{\min}(N))$, тогда $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\theta}(i) = \hat{\theta}'_1(N)$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{b}(i, \hat{\theta}(i)) = \hat{b}(N)$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{a}(i, \hat{\theta}(i)) = \hat{a}(N)$, где $\hat{\theta}(i)$, $\hat{b}(i, \hat{\theta}(i))$ и $\hat{a}(i, \hat{\theta}(i))$ определяется совместно со следующим алгоритмом:

Шаг 1. Вычислить $\hat{b}(N, \hat{\theta}(i))$, $\hat{a}(N, \hat{\theta}(i))$ из системы уравнений (9);

Шаг 2. Вычислить

$$\begin{aligned} \theta(i+1) = & \left(1 + \hat{b}(N, \hat{\theta}(i))^T \hat{b}(N, \hat{\theta}(i)) + \gamma^{(1)} [a^{(1)}(N, \hat{\theta}(i))]^T a^{(1)}(N, \hat{\theta}(i)) + \dots \right. \\ & \dots + \gamma^{(d)} [a^{(d)}(N, \hat{\theta}(i))]^T a^{(d)}(N, \hat{\theta}(i)) \Big)^{-1} \left\{ Y^T Y + \hat{\theta}(i) \left[\hat{b}(N, \hat{\theta}(i))^T \hat{b}(N, \hat{\theta}(i)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma^{(1)} [a^{(1)}(N, \hat{\theta}(i))]^T a^{(1)}(N, \hat{\theta}(i)) + \dots + \gamma^{(d)} [a^{(d)}(N, \hat{\theta}(i))]^T a^{(d)}(N, \hat{\theta}(i)) \right] - \right. \\ & \left. - \left(\frac{A_Y^T Y}{A_W^T Y} \right) \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{pmatrix} \right\}; \end{aligned}$$

Шаг 3. Перейти к шагу 1.

Процесс вычисления заканчивается, если выполняется условие

$$\frac{\|V_N(\hat{\theta}(i+1)) - V_N(\hat{\theta}(i))\|}{\|V_N(\hat{\theta}(i+1))\|} \leq \delta$$

где δ - априорно заданная точность оценок.

Это утверждение непосредственно вытекает из метода Ньютона:

$$\hat{\theta}(i+1) = \hat{\theta}(i) - \frac{V_N(\hat{\theta}(i))}{\dot{V}_N(\hat{\theta}(i))}$$

Обоснованность использования метода Ньютона следует из того, что $V_N(\hat{\theta})$ - непрерывна для $\forall \hat{\theta} \in [0, \lambda_{\min}(N))$, $\dot{V}_N(\hat{\theta}) \leq -1$ для $\forall \hat{\theta} \in [0, \lambda_{\min}(N))$ и

$$\ddot{V}_N(\hat{\theta}) = -2 \left(\frac{b}{a} \right)^T \begin{vmatrix} I_r & 0_{r, r_1+1} & \dots & 0_{r, r_d+1} \\ 0_{r, r_1+1}^T & \gamma^{(1)} I_{r_1+1} & \dots & 0_{r_1+1, r_d+1} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0_{r, r_d+1}^T & 0_{r_1+1, r_d+1}^T & \dots & \gamma^{(d)} I_{r_d+1} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} A_Y^T A_Y & A_Y^T A_{W^{(1)}} & \dots & A_Y^T A_{W^{(d)}} \\ A_{W^{(1)}}^T A_Y & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(1)}} & \dots & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(d)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{W^{(d)}}^T A_Y & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(1)}} & \dots & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(d)}} \end{vmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} I_r & 0_{r, r_1+1} & \dots & 0_{r, r_d+1} \\ 0_{r, r_1+1}^T & \gamma^{(1)} I_{r_1+1} & \dots & 0_{r_1+1, r_d+1} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0_{r, r_d+1}^T & 0_{r_1+1, r_d+1}^T & \dots & \gamma^{(d)} I_{r_d+1} \end{vmatrix} \times \left(\frac{b}{a} \right) \leq 0$$

для $\forall \hat{\theta} \in [0, \lambda_{\min}(N))$.

На основании предложенного численного алгоритма создано программное обеспечение, позволяющее получать оценки параметров с наперед заданной точностью.

В качестве примера рассмотрена стационарная динамическая система, которая описывается следующим линейным разностным уравнением:

$$z_i - \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} z_{i-m} = \sum_{j=1}^d \sum_{m=0}^{r_j} a_0^{(mj)} x_{i-m}^{(j)},$$

При $d = 2$, $r = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ имеем

$$z_i = z_{i-1} \cdot b_0^{(1)} + z_{i-2} \cdot b_0^{(2)} + x_i^{(1)} \cdot a_0^{(0,1)} + x_{i-1}^{(1)} \cdot a_0^{(1,1)} + x_i^{(2)} \cdot a_0^{(0,2)} + x_{i-1}^{(2)} \cdot a_0^{(1,2)} + x_{i-2}^{(2)} \cdot a_0^{(2,2)}$$

Векторы входных сигналов $X_i = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}\}$ и векторы помех $\Xi_i = \{\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \xi_1(i)\}$ заданы с помощью генератора случайных чисел:

$$x_i^{(1)} = \text{rnorm}(N, 0, 0.2)$$

$$x_i^{(2)} = \text{rnorm}(N, 0, 0.2)$$

$$\xi_i^{(1)} = \text{rnorm}(N, 0, 0.1)$$

$$\xi_i^{(2)} = \text{rnorm}(N, 0, 0.1)$$

$$\xi_1(i) = \text{rnorm}(N, 0, 0.15)$$

В табл. 1 приведены значения оценок параметров, полученные в результате тестирования на основе предлагаемого численного метода (при числе экспериментов $N = 120$).

Также получено значение среднеквадратичного отклонения сигнала Z_i от $\hat{Z}_i$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Z_i - \hat{Z}_i)^2}{N-1}, \quad \sqrt{\hat{\sigma}^2} = 0,018,$$

где $\hat{Z}_i$ - значения выходного сигнала, полученные по рассчитанным оценкам коэффициентов $\hat{b}(N, \hat{\theta}'(i))$, $\hat{a}(N, \hat{\theta}'(i))$.

Таблица 1. Сравнение полученных оценок параметров с истинными значениями.

П а р а м е т р ы	И с т и н н ы е значения	П о л у ч е н н ы е оценки
$b^{(1)}$	1	1,018
$b^{(2)}$	-0,5	-0,523
$a^{(0,1)}$	0,5	0,501
$a^{(1,1)}$	0,4	0,381
$a^{(0,2)}$	0,3	0,28
$a^{(1,2)}$	0,6	0,579
$a^{(2,2)}$	0,2	0,203

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кацуба О.А., Жданов А.И. О состоятельных оценках решений некорректных стохастических алгебраических уравнений при идентификации параметров линейных разностных операторов // Изв. Ан. СССР. Техническая кибернетика. 1981. №5.
2. Кацуба О.А., Жданов А.И. О состоятельных оценках решений некорректных стохастических алгебраических уравнений при идентификации параметров линейных разностных операторов // Изв. Ан. СССР. Техническая кибернетика. 1981. № 5.
3. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
4. Stoica P., Soderstrom T. Bias correction in least – Squares identification // int. J. Control. 1982. Vol. 35. No 3.
5. Unton F. Recursive estimator of the solutions of linear equation sequence // IEEE Trans. AuT. Control. 1984. Vol. AC-29. No 2.

IDENTIFICATION OF STATIONARY LINEAR DYNAMIC SYSTEMS MULTIVARIATE ON INPUT

© 2006 A.N. Volnykin, O.A. Katsyuba

Samara State Academy of Ways of Communication

In article the problem of an estimation of parameters linear difference equations with a multivariate input is considered at presence of handicapes of supervision in input and output signals. This task differs from a standard problem regression estimation, the new criterion of estimation is offered on the basis of the relation of two square-law forms, generalizing standard method of the least squares and allowing to receive well-grounded estimations of parameters. The numerical method of definition of estimations of parameters linear difference the equations, reduced to the repeated decision linear difference the equations is offered also.