УДК 517.165, 519.216.73

ОБ ОБОБЩЕНИИ БИНОМИНАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩЕМ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ON A GENERALIZATION OF THE BINOMIAL THEOREM ORIGINATED FROM DIFFERENTIAL EQUATIONS THEORY

[1]Д.С. Дончев, [2]С.М. Ситник, [3]Э.Л. Шишкина
D.S. Donchev, S.M. Sitnik, E.L. Shishkina

[1]Софийски университет "Св. Климента Охридского",
Болгария, 1504, г. София, бул. "Цар Освободител" 15

[1]Sofia university St. Kliment Ohridski, Bulgaria, 1504, Sofia, 15 Tsar Osvoboditel Blvd

[2]Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

[3]Воронежский государственный университет, Россия, Воронеж,
Университетская пл., д. 1

[3]Voronezh State University, Universitetskaya pl., 1, Voronezh, Russia

E-mail: dsdonche@gmail.com, sitnik@bsu.edu.ru, ilina_dico@mail.ru

Аннотация
В статье получена минимальная постоянная правой части неоклассического неравенства, обобщающего формулу бином Ньютона. Результаты этой статьи имеют приложения к стохастическим дифференциальным уравнениям, а также к оценкам вероятностных распределений.

Abstract
In this article the minimal constant of the right side of neo-classical inequality was obtained. This inequality generalizes Newton binomial formula. The results of this article apply to stochastic differential inequalities and estimates of distributions probabilities.

Ключевые слова: неоклассическое неравенство, стохастические дифференциальные уравнения, функция Райта-Фокса, неравенство Берри-Эссена, операторы Меллера-Кёнига-Зеллера.

Keywords: neo-classical inequality, stochastic differential inequality, Wright-Fox function, Berry-Essen inequality, Meller-König-Zeller operators.

В работе [1] предложен новый подход к решению “плохих” стохастических дифференциальных уравнений с негладкими данными вида

$$dy_t = \sum_k f_k(y_t) \quad dx_t^k \quad ,$$

где f_k - заданные векторные поля, x_t-управляющие члены, y_t - результирующая траектория. Проблема состоит в том, что если в соответствии со стандартным подходом рассматривать время t как параметр и решать данное уравнение как однородное, то, как правило, решение не будет непрерывным, оно может существовать лишь как распределение. В этом случае классическая теория не предлагает методов для определения решения; более того, даже для гладких, но сильно осциллирующих задач не существуют эффективные алгоритмы для численного отыскания решений. Вместе с тем указанная задача возникает во многих разделах математики: теории управления, радиотехнических задачах с шумом, теории алгебр Ли, теории вероятностей (многомерные Броуновские траектории, полумартингалы, случайные процессы). Более подробное описание приложений см. в [1].

Развивая существующие ранее методы, в [1] предложен удачный выбор функциональных пространств для решений, включающих норму с p- вариацией. В таких пространствах удалось в рамках не стохастического, а детерминистского подхода построить решение и эффективные численные методы для его нахождения. При этом были сразу усилены многие результаты: рассмотрены Броуновские пути с плохими траекториями, несколько обобщено понятие интеграла (вслед за определениями Ито, Стратоновича, Скорохода), расширены область применения формулы многомерной замены переменных и метода последовательных приближений решения итерированными интегралами.

Интересным является тот часто встречающийся факт, что в основе всех выкладок в [1] лежит достаточно простое на вид неравенство, контролирующее важнейшие для этой работы оценки. Это неравенство является обобщением формулы бинома Ньютона (случай p=1):

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n/p}^{k/p} \quad x^{k/p} \le C(n,p) \quad (1+x)^{n/p} \quad , \tag{1}$$

где $p \ge 1$, n- натуральное число, $0 \le x \le 1$, биноминальные коэффициенты понимаются как отношения гамма-функций, постоянная C(n,p)>0.

Таким образом, неравенство (1) является чрезвычайно важным в теории стохастических дифференциальных уравнений, а также в некоторых других задачах теории вероятностей, см. [2]-[8]. Оно исследовалось во многих работах и даже получило в англоязычной литературе собственное название – «neo-classical inequality» [6]-[8].

Это неравенство оказалось также важным в уточнениях другого классического знаменитого неравенства в теории вероятностей – неравенства Берри-Эссена [9]-[10]. Последнее неравенство является существенным уточнением знаменитой теоремы Ляпунова о сходимости последовательности распределений к нормальному. В теореме Ляпунова требуется равномерная ограниченность дисперсий, при этом сходимость может быть как угодно медленной. Неравенство Берри-Эссена при дополнительном требовании ограниченности третьих моментов устанавливает эффективную оценку сходимости последовательности распределений к нормально. В работах [7]-[8] неоклассическое неравенство (1) использовано для уточнения константы в неравенстве Берри-Эссена, а также для оценок технического средства, используемого в доказательстве – аппроксимирующих операторов Меллера-Кёнига-Зеллера. Эти операторы также играют важную роль в теории функций, в задачах приближения различных вероятностных распределений.

Настоящая статья посвящена дальнейшему исследованию неравенства (1), а именно нахождению наилучшей, то есть, наименьшей постоянной в правой части $C_{\min}(n,p)$. Кроме того, опровергается одна известная гипотеза Е.Р. Лава о величине этой точной константы, приводятся её различные оценки. Как следует из вышеизложенного, эти результаты имеют приложения к стохастическим дифференциальным уравнениям, а также к оценкам вероятностных распределений.

Отметим, что неравенство (1) представляет определённый интерес и для теории специальных функций, так представляет собой одно из немногих известных на данный момент неравенств для специальной функции Райта-Фокса [11], сводящейся в данном случае к конечному многочлену Райта-Фокса.

Точная постоянная в неравенстве, обобщающем формулу бинома Ньютона

Теорема 1. Пусть $p \ge n$. Для точной постоянной в неравенстве

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n/p}^{k/p} \quad x^{k/p} \le C(n,p) \quad (1+x)^{n/p}$$

справедливо равенство

$$C_{\min}(n,p) = \frac{1}{2^{n/p}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{p}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{p}+1\right)} \le p, \tag{2}$$

причем знак неравенства в (2) является строгим при всех $p>1$. Иными словами, найденная в теореме 1 оптимальная постоянная лучше постоянной из гипотезы, кроме тривиального случая $p=1$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{n/p}^{k/p} x^{k/p} \cdot (1+x)^{-n/p}.$$

Ее производная имеет вид

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{n/p}^{k/p} \left[k/p x^{k/p-1} \cdot (1+x)^{-n/p} - n/p x^{k/p} \cdot (1+x)^{-n/p-1} \right] =$$

$$= \frac{1}{p}(1+x)^{-n/p-1} \sum_{k=0}^{n} C_{n/p}^{k/p} x^{k/p-1} \left[k + (k-n)x \right].$$

Покажем, что $f'(x) \ge 0$ при $p \ge n$ и $x \in [0,1]$. Это будет означать, что $f(x)$ не убывает на $[0,1]$ и достигает своего наибольшего значения в точке $x=1$. Пусть сначала $n = 2m+1$, тогда число слагаемых четное, сгруппируем их парами, учитывая что

$$C_{n/p}^{j/p} = C_{n/p}^{(n-j)/p},$$

получим

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n/p}^{k/p} x^{k/p-1} \left[k + (k-n)x \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} C_{n/p}^{j/p} \left[x^{\frac{j}{p}-1}(j + (j-n)x) + x^{\frac{n-j}{p}-1}(n-j-jx) \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} C_{n/p}^{j/p} \left[jx^{\frac{j}{p}-1}(1 - x^{\frac{n-2j}{p}+1}) + (n-j)x^{\frac{n-j}{p}-1}(1 - x^{\frac{2j-n}{p}+1}) \right].$$

Поскольку $x \in [0,1]$, то $1 - x^{\frac{n-2j}{p}+1} \ge 0$, так как $\frac{n-2j}{p}+1 \ge 0$, а $1 - x^{\frac{2j-n}{p}+1} \ge 0$ поскольку $p \ge n-2j$ при $p \ge n$.

Если $n = 2m$, $p \ge n$, $x \in [0,1]$ то

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n/p}^{k/p} x^{k/p-1} \left[k + (k-n)x \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} C_{n/p}^{j/p} \left[x^{\frac{j}{p}-1}(j + (j-n)x) + x^{\frac{n-j}{p}-1}(n-j-jx) \right] + C_{n/p}^{n/2p} \frac{n}{2} x^{\frac{n}{2p}-1}(1-x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} C_{n/p}^{j/p} \left[j x^{\frac{j}{p}-1} \left(1 - x^{\frac{n-2j}{p}+1}\right) + (n-j) x^{\frac{n-j}{p}-1} \left(1 - x^{\frac{2j-n}{p}+1}\right) \right] + C_{n/p}^{n/2p} \frac{n}{2} x^{\frac{n}{2p}-1} (1-x) \geq 0.$$

Таким образом, $f'(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$, следовательно

$$f_{\text{наиб.}} = f(1) = \frac{1}{2^{n/p}} \sum_{k=0}^{n} C_{n/p}^{k/p} = \frac{1}{2^{n/p}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{p}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{p}+1\right)}.$$

Четырех-параметрическая функция Райта-Фокса (или обобщённая функция Миттаг-Леффлера) имеет вид (см. [12], стр. 129)

$$E_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1)\Gamma(\alpha_2 k + \beta_2)}, \qquad z \in \mathrm{C}$$

рассмотрим многочлен, соответствующий этой усечённой функции

$$E^{n}_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1)\Gamma(\alpha_2 k + \beta_2)}, \qquad z \in \mathrm{C},$$

тогда можем записать

$$f_{\text{наиб.}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{p}}} E^{n}_{\frac{1}{p},1;-\frac{1}{p},\frac{n}{p}+1}(1).$$

Поскольку $C_{\min}(n,p) = f_{\text{наиб.}}$, то теорема доказана.

Отметим, что в силу оптимальности найденной постоянной она будет заведомо меньше постоянной p из гипотезы.

Следствие 1. Пусть n=1, $p \geq 1$. Тогда справедливо равенство для точной постоянной в неравенстве (1)

$$C_{\min}(1,p) = 2^{1-1/p} \leq p, \tag{3}$$

причем знак неравенства в (3) является строгим при всех p>1.

Следствие 2. Пусть $n = 2, p \geq 2$. Тогда неравенство (1) выполнено с оптимальной постоянной

$$C_{\min}(2,p) = 2^{1-2/p} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/p + 1/2)}{\Gamma(1/p+1)}, \tag{4}$$

причем знак неравенства в (4) является строгим при всех p>1.

Почленные оценки суммы в неравенстве, обобщающем формулу бинома Ньютона

В этом пункте рассмотрим почленные оценки суммы в неравенстве

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n/p}^{k/p} \; x^{k/p} \leq C(n,p) \; (1+x)^{n/p}. \tag{5}$$

Возможным альтернативным методом является нахождение интегрального представления для функции в левой части (5), с последующим применением интегральных неравенств. Отметим, что указанная функция является функцией Райта-Фокса [11]. Неравенства для подобных специальных функций, как правило, очень трудно доказываются и только начинают изучаться. Как оценку из этого класса можно рассматривать и (5).

При почленных оценках ключевым является неравенство

$$C_{n/p}^{k/p} \le D(n,p) C_n^k , \tag{6}$$

позволяющее просуммировать слева в (5). Это соотношение имеет очевидный комбинаторный смысл. Из каждой оценки вида (6) следует соответствующее неравенство вида (1) со своей постоянной.

Теорема 2. Если выполнено неравенство (6), то выполнено неравенство (5) с постоянной

$$C(n,p) = 2^{n(1-1/p)} \quad D(n,p) .$$

Доказательство. Почленно оценивая слагаемые в (5) с учетом (6), получаем, что левая часть меньше

$$\sum_{k=0}^{n} D(n,p) C_n^k x^{k/p} = D(n,p)(1+x^{1/p})^n \le D(n,p) 2^{n(1-1/p)} (1+x)^{n/p} ,$$

с учётом уже упоминавшегося неравенства о средних.

Таким образом, при выбранном методе вопрос сводится к получению хороших оценок для отношений гамма или бета-функций вида (6). Известны несколько способов получения таких неравенств [13].

Другая возможность основана на использовании неравенств вида

$$C_{n/p}^{k/p} \le B(n,p) , \tag{7}$$

с некоторой постоянной B.

Теорема 3. Пусть выполнена оценка (7) при дополнительном условии $p > \frac{n+2}{3}$. Тогда выполнено неравенство (5) с постоянной

$$C(n,p) = (n+1) 2^{-\frac{n}{p}} B(n,p) . \tag{8}$$

Доказательство. Пусть выполнено (7), тогда, суммируя геометрическую прогрессию в левой части (5), получаем оценку

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n/p}^{k/p} \quad x^{k/p} \le B(n,p) \frac{1-(x^{1/p})^{n+1}}{1-x^{1/p}} \quad .$$

Теперь применим неравенство Тибора Радо [13] с уточнениями из [14-15] вида

$$R_n \le M_{\frac{n+2}{3}} ,$$

при $n \ge 1$. Тогда при дополнительном условии $\frac{n+2}{3p} < 1$, обеспечивающем сравнение со средним арифметическим, получим

$$\left[\frac{1-\left(x^{1/p}\right)^{n+1}}{(n+1)\left(1-x^{1/p}\right)}\right]^{1/n} = R_n\left(1, x^{1/p}\right) \le \left(\frac{1+\left(x^{1/p}\right)^{\frac{n+2}{3}}}{2}\right)^{\frac{3p}{n+2}\cdot\frac{1}{p}} \le \left(\frac{1+x}{2}\right)^{1/p},$$

$$\frac{1-x^{\frac{n+1}{p}}}{1-x^{1/p}} \le (n+1)\cdot 2^{-\frac{n}{p}} \cdot B(n,p).$$

Отсюда и получается неравенство (6).

Теорема 4. При выполнении ограничений предыдущей теоремы справедливо неравенство (5) с постоянной

$$C = \frac{(n+1)\Gamma\left(\frac{n}{2p}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\frac{n}{2p}+1\right)} \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(n+1)\sqrt{p}}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство следует из предыдущей теоремы и оценки вида (7) с учётом логарифмической выпуклости гамма-функции и неравенств для отношения гамма-функций с разностью аргументов, равной ½ (см. [11]).

Таким образом, при помощи результатов настоящей работы можно уточнить основные оценки и выводы из [1]. Отметим остающуюся нерешенной задачу о нахождении точной постоянной в (1) в общем случае в виде более компактного выражения для нужной конечной суммы, а также интересную задачу о нахождении точной постоянной, если в неравенстве (1) заменить знак на противоположный (оценка снизу).

Список литературы
References

1. Lyons T. 1998. Differential equations driven by rough signals. Revista Matematica Iberoamericana, 14(2): 215–310.
2. Chow Y.S. 1988. Probability Theory. New York, Springer-Verlag, 455.
3. Love E.R., Prasad G., Sahai. 1994. A. An improved estimate of the rate of the integrated Meyer - Konig and Zeller operators for functions of bounded variation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 187(1): 1–16.
4. Love E.R. 1998. On an inequality conjectured by T.J. Lyons. Journal of Inequalities and Applications, 2: 229–233.
5. Love E.R. 2000. An inequality conjectured by T.J. Lyons. Integral Transforms and Special Functions, 10 (3–4): 283–288.
6. Li J.H. 2004. On Lyons' inequality and estimates of convergence rates of approximation via Meyer - Konig and Zeller operators. Master thesis in National Central University.
7. Ситник С.М. 2004. Об обобщении биноминальной теоремы, возникаюшей в теории дифференциальных уравнений. Вестник ВИ МВД, 1: 143-147.

Sitnik S.M. 2004. On generalization of binomial theorem which arising in differential equations theory. Vestnik Voronezhskogo Instituta MVD Rossii, 1: . 143–147.

8. Hara K., Hino M. 2010. Fractional order Taylor's series and the neo-classical inequality. arXiv:1001.1775v1, , 11.
9. Bhattacharya R.N., Rao R.R. 2010. Normal Approximation and Asymptotic Expansions. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 316.

10. Srivastava H.M., Manocha H.L. 1984. A Treatise on Generating Functions. New York, Halsted Press, 569 p.

11. Gorenflo R. et al. 2014. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Berlin, Springer, 443.

12. Donchev D., Rachev S., Steigerwald S.D. 2002. Optimal policies for investment with time-varying return probabilities. Journal of Computational Analysis and Applications, 4: 269–312.

13. Donchev D. 2007. An excursion characterization of the first hitting time of Brownian motion in a smooth boundary. Journal of Random Operators and Stochastic Equations, 15: 35–48.

14. Donchev D. 2011. Random series with time-varying discounting. Communications in Statistics Theory and Methods, , 40(16) 2866–2878.

15. Donchev D. 2017. Exit probability levels of diffusion processes. Proceedings of the American Mathematical Society, 145(5): 2241–2253.

16. Qi F. 2010. Bounds for the ratio of two Gamma functions. Journal of Inequalities and Applications, 84.

17. Sitnik S.M. 2010. Generalized Young and Cauchy - Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey. arXiv:1012.3864, 51.

18. Rado T. 1935. On convex functions. Transactions of American Mathematical Society, 37: 266–285.